

带脱层的复合材料层板屈曲 分析中的接触问题

胡 宁 胡 彬* 姚振汉

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

(重庆钢铁专科学校机械系, 重庆 400050)

福永久雄 关根英树

(日本东北大学工学部机械系机械航空工学科, 日本仙台 980-77)

摘要 用基于 Mindlin 板理论的有限元方法进行了带脱层损伤复合材料层板的屈曲载荷分析. 为了处理在屈曲模态中上下脱层之间的接触问题, 我们提出了一种有效的算法. 在这种算法中, 首先用一阶灵敏度分析和二次规划方法相结合的迭代算法算出接触区域的虚拟力, 然后将这种虚拟力转化成一些假想弹簧的刚度系数, 并对原始刚度矩阵进行修正. 数值算例表明本算法可以有效地克服屈曲模态中上下脱层之间的相互贯穿. 同时, 还对脱层的大小, 形状和位置对屈曲载荷的影响进行了研究.

关键词 复合材料层板, 脱层, 屈曲分析, 接触分析

引 言

由冲击事件、制造过程中的缺陷和疲劳等引起的脱层损伤是复合材料层板主要的破坏形式之一, 这类损伤将会引起复合材料层板的强度和整体刚度的降低, 同时, 脱层局部失稳还可能引发脱层的扩展并导致在远低于以无损层板为对象的设计值时发生整体结构的破坏. 随着复合材料层板在航空航天等工程领域中的广泛使用, 研究带脱层损伤复合材料层板的压缩强度就变得十分重要了, 它一般简称为 CAI (compression after impact). 从 Chai 等人在 1981 年的工作开始^[1], 人们已在这一领域内进行了广泛的研究.

带脱层损伤复合材料层板的屈曲分析的一个重要的方面是处理上下脱层之间的接触问题. 这种接触现象可能由多种原因引发, 如: 由于脱层所引起的非对称铺层和上下脱层之间厚度的巨大差异等. 在以往的研究中, 广泛采用的是贯穿板幅脱层的一维模型^[2~7]. 除了 Chai 发现在较厚脱层的弯曲刚性的某些特定值时^[1], 会出现接触之外, 在该模型中, 通常不会出现接触现象. 所以对一维模型, 甚至包括多个脱层的情况^[6], 可以不考虑接触问题. 对更复杂的二维^[8~12]和三维^[13]模型, 如埋藏脱层等, 很容易出现接触现象, 因此在大多数研究中都考虑了脱层之间的接触问题. 如, Peck 和 Springer^[11]和 Whitcomb^[13]等人在处理二维和三维模型的屈曲分析时, 用虚拟力的概念处理接触问题, 但他们所用的接触算法只能处理在实际的压缩

1997-11-10 收到第一稿, 1998-06-01 收到修改稿.

载荷下平衡问题中的接触问题，这时，极限屈曲载荷是由载荷 - 应变历史得到的。很显然，这种算法是很耗时的。

众所周知，屈曲载荷可以从分析一个特征值问题得到，但是，大多数用这一手段进行的研究工作，没有考虑脱层之间相互接触，这可能产生物理上不可能的屈曲模态，如脱层之间的相互贯穿等。与一般已知载荷的平衡问题中的接触问题不同，在特征值问题分析中，有屈曲载荷和屈曲模态两个未知量。所以，正如 Peck 和 Springer^[11] 指出的：处理在特征值问题分析中的接触问题是很困难的。最近，Suemasu^[12] 等人在处理边界脱层的屈曲问题特征值分析中用一种假想的弹簧来克服脱层之间的相互贯穿，它可以归为罚函数方法，但他们未给出计算弹簧刚度的有效算法，而仅仅靠试凑法来反复计算。

本文提出了一种求解屈曲载荷特征值问题中接触问题的算法。这种方法首先基于灵敏度信息和二次规划技术迭代求出接触区域的虚拟力，然后在特征值分析中，将这些虚拟力转化成某些假想弹簧的刚度系数并对结构的刚度矩阵进行修正，从而避免脱层之间的相互贯穿。这种方法可以找到假想弹簧的刚度系数之间的相互关系。本文的数值算例表明这一算法在处理特征值分析中的接触问题时十分有效，从算例的结果出发，本文还分析了接触对屈曲载荷的影响，同时，对脱层的大小、形状和位置等因素对屈曲载荷的影响也进行了详细的研究。

1 控制方程

首先，我们用包括横向剪切变形的 Mindlin 八结点等参板元来模拟复合材料层板，由于脱层会引起非对称铺层，故必须考虑面内自由度，在每个节点有五个自由度，即 $\{u_i, v_i, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}\}$ 。同时，由于我们不研究脱层的扩展，所以在脱层前沿的局部变形和错位可以忽略。整体板分为上下脱层和脱层外区域等三个部分，如图 1 所示，在脱层前沿线上的位移连续条件为

$$w_i = w_0 \quad (1a)$$

$$\phi_{xi} = \phi_{x0} \quad (1b)$$

$$\phi_{yi} = \phi_{y0} \quad (1c)$$

$$u_i = u_0 + z_i \phi_{x0} \quad (1d)$$

$$v_i = v_0 + z_i \phi_{y0} \quad (1e)$$

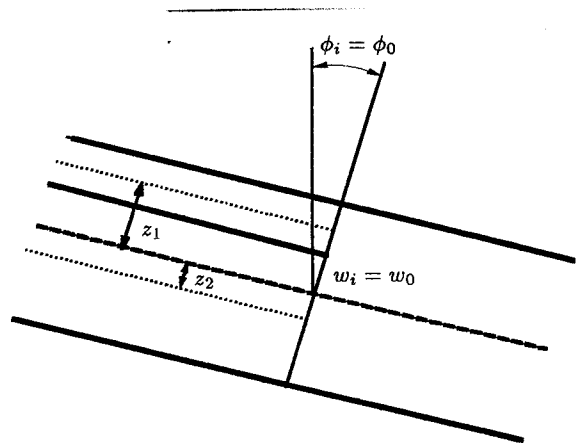


图 1 脱层前沿的位移连续条件

Fig.1 Continuity conditions of the displacements at the delamination front

其中， i 的取值为 $1 \sim 2$ ，代表上下脱层， 0 代表脱层区域以外的板的中央面。

用有限元法进行屈曲分析时，可以从著名的 Tefftz 准则得到以下特征值方程

$$Ku = \lambda_\sigma K_\sigma u \quad (2)$$

其中 K 为层板的弹性刚度矩阵， u 是屈曲模态， λ_σ 是屈曲载荷（最小的特征值）， K_σ 是层板

的几何刚度矩阵.

层板的总体弹性和几何刚度矩阵可以用通常的有限元方法得到. 这里, 我们用 Corr 和 Jennings^[14] 的同时迭代法求解方程 (2), 发现该方法是十分有效的.

2 接触分析

如前所述, 在处理特征值分析中的接触问题是十分困难的. 为简单起见, 我们不计脱层之间的相对滑动和摩擦, 接触条件仅依赖于上下脱层垂直于板平面的横向位移. 对于一般已知载荷的平衡问题, 目前广泛存在的求解接触问题的方法大致可分为三大类, 即拉氏乘法^[15]、罚函数方法^[16]和数学规划方法^[17]. 通常上述方法不能直接用于求解特征值问题中的接触分析, 下面我们来建立求解这一接触问题的计算方法.

2.1 接触问题的二次规划模型

首先, 假定在接触区域内存在虚拟力, 并将方程 (2) 改为以下形式

$$K u = \lambda_{\sigma} K_{\sigma} u + F \quad (3)$$

我们希望上述方程中的虚拟力矢量 F 能够克服在屈曲模态中上下脱层的相互贯穿.

该虚拟力矢量的求解可以化为下面分析接触过程互补问题的最优化模型

$$\text{最小化} \quad G = \int_{\Gamma_C} F u_s d\Gamma_C \quad (4a)$$

$$\text{约束条件为} \quad \begin{cases} F \geq 0 \\ u_s \geq 0 \end{cases} \quad (4b)$$

$$(4c)$$

这里, u_s 为间隙矢量, Γ_C 为接触边界.

与已知载荷的接触问题不同, 上述方程很难直接求解. 因此, 我们将目标转化为使接触区域内的间隙总和为最小, 故上述方程又可以写成下面的最小二乘的形式,

$$\text{最小化} \quad G = \|u_s\|_2 \quad (5a)$$

$$\text{约束条件为} \quad F \geq 0 \quad (5b)$$

由接触问题的互补条件, 我们可以判断满足下述条件的第 i 个点对为正在接触的点对

$$u_s^i \leq 0 \quad (6a)$$

$$u_s^i \geq 0 \text{ 和 } F^i \geq 0 \quad (6b)$$

在不计刚体位移的情况下, $(k+1)$ 次迭代的间隙矢量可展开成下述泰勒级数的形式

$$u_s^{k+1} \approx u_s^k + \frac{\partial u_s^k}{\partial F^k} \Delta F^k = u_s^k + S^k \Delta F^k \quad (7)$$

将上式代入 (5) 式, 可将其化为下述二次规划模型

$$\text{最小化} \quad G = \frac{1}{2} \Delta F^{kT} H^k \Delta F^k + C^{kT} \Delta F^k + D^k \quad (8a)$$

$$\text{约束条件为 } \mathbf{F}^k + \Delta \mathbf{F}^k \geq 0 \quad (8b)$$

其中

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{S}^{kT} \mathbf{S}^k \quad (8c)$$

$$\mathbf{C}^k = \mathbf{S}^{kT} \mathbf{u}_s^k \quad (8d)$$

$$\mathbf{D}^k = \frac{1}{2} \mathbf{u}_s^{kT} \mathbf{u}_s^k \quad (8e)$$

以上的二次规划问题可以用多种方法求解, 如 Lemke 法等, 这里, 我们用 Goldfarb 和 Idnani^[18] 的算法来求解. 当 \mathbf{H}^k 矩阵正定时, 上面的最优化模型在凸域中可以得到唯一最优解. 同时, 上面的模型与以往求解接触问题的二次规划法^[17] 是完全不一样的.

在求得了虚拟力矢量的增量后, 我们可以更新目前的虚拟力矢量

$$\mathbf{F}^{k+1} = \mathbf{F}^k + \Delta \mathbf{F}^k \quad (9)$$

由于有约束条件 (8b), 因此, \mathbf{F}^{k+1} 矢量中的分量总能保证是正的 (点对之间的抵抗力).

2.2 假想弹簧

在求得 \mathbf{F}^{k+1} 后, 下一步是求解方程 (3). 对一般静平衡问题, 方程 (3) 的右端项 $\lambda_s \mathbf{K}_s \mathbf{u}$ 可看成已知外载. 因此, 我们可将 \mathbf{F}^{k+1} 代入方程 (3) 中迭代求解 \mathbf{u} , 作者发现该方法在处理静平衡接触问题时十分有效. 但对特征值问题, λ_s 和 \mathbf{u} 皆为未知, 无法直接求解方程 (3). 因此, 我们认为这些虚拟力是由一些假想弹簧提供的, 弹簧的两个节点位于上下脱层的接触点对上, 如我们能求出这些弹簧的刚度系数, 就能对结构总体的刚度矩阵进行修正. 某点弹簧的刚度系数可由该点的间隙与虚拟力 (接触力) 的关系来得到

$$F_i^{k+1} = K_i^{p^{k+1}} \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (10)$$

这里 $K_i^{p^{k+1}}$ 是在第 i 个接触点对的假想弹簧在第 $(k+1)$ 次迭代时的刚度系数, α_i 是第 i 个接触点对在第 $(k+1)$ 次迭代时的间隙量, n_c 为第 k 次迭代时接触点对的总数.

但在得到 $K_i^{p^{k+1}}$ 之前, 我们并不知道 α_i 的任何信息. 为了简单起见, 我们对所有的接触点对都给定一个统一的值, 它为第 k 次迭代时的平均间隙量

$$\alpha^k = \frac{\sum_{i=1}^{n_c} |u_{is}^k|}{n_c} \quad (11)$$

式中 u_{is}^k 是第 i 个接触点对在第 k 次迭代时的间隙量.

所以方程 (10) 可以写成下面的形式

$$K_i^{p^{k+1}} = \frac{\beta E_i^{k+1}}{\alpha^k} \quad (12)$$

这里, β 为一个使收敛速度加快的参数.

由于所有的弹簧都用的同一平均间隙量,故不同接触点对的弹簧的刚度系数的比只取决于虚拟力的大小.在有了弹簧的刚度系数之后,就容易得到它的刚度矩阵 K_i^{*k+1} ,然后,再用这些弹簧的刚度矩阵对结构的原始总体刚度矩阵 K^0 进行修正

$$K^{k+1} = K^0 + \sum_{i=1}^{n_c} K_i^{*k+1} \quad (13)$$

2.3 虚拟力的修正

当用方程 (13) 求得新的总体刚度矩阵之后,我们就可以用方程 (2) 直接求解一个普通的特征值问题,然后,我们就可以得到新的间隙矢量并对虚拟力进行修正,

$$F_i^{k+1} = -K_i^{*k+1} u_{i_s}^{k+1}, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (14)$$

其中 K_i^{*k+1} ($i = 1, \dots, n_c$) 为由方程 (12) 得到的上一次迭代的第 i 个弹簧的刚度系数, $u_{i_s}^{k+1}$ 是在第 i 个接触点对的新间隙量.

从上面的方程可以看出,当第 i 个接触点对的新间隙量为正时,对应的虚拟力变成负值(点对之间的拉力).所以第 i 个接触点对的接触状态的应该由下面的式子来判断

$$u_s^i \leq 0 \quad (15a)$$

$$u_s^i \geq 0 \text{ 和 } F^i < 0 \quad (15b)$$

因此我们用上面的式子来判断所有可能的接触点对的接触状态.负的虚拟力是不真实的,它将在新的迭代步的二次规划问题的求解中用 (8b) 式来消除.

2.4 灵敏度分析

在这一节,我们讨论 (7) 式中灵敏度矩阵 S 的计算过程.首先,用前差分法并考虑第 k 次迭代中第 i 个接触点对的虚拟力的差分步矢量为 $\Delta_F^{i_k}$,方程 (3) 可以写成

$$K^k u = \lambda_\sigma^k K_\sigma u + \Delta_F^{i_k} \quad (16)$$

其中差分步矢量 $\Delta_F^{i_k}$ 可以写成

$$\Delta_F^{i_k} = \{0 \dots 0 \xi_i^k 0 \dots 0 - \xi_i^k 0 \dots 0\}^T \quad (17)$$

ξ_i^k 和 $-\xi_i^k$ 的位置对应于第 i 个接触点对在上下脱层的点的垂直于板面的自由度.令

$$X^k = \lambda_\sigma^k K_\sigma u^k \quad (18)$$

u^k 为第 k 次迭代中的屈曲模态.我们用 X^k 中的分量来计算 ξ_i^k

$$\xi_i^k = (|X_m^k| + |X_n^k|)/100 \quad (19)$$

其中 X_m^k 和 X_n^k 在 X^k 中的位置与 ξ_i^k 和 $-\xi_i^k$ 相同.

我们的目的是在这一差分步下求解 u 并得到间隙矢量. 但由于 $(K^k - \lambda_\sigma^k K_\sigma)$ 缺秩, 因此, 很难从方程 (16) 直接得到 u . 我们用下面的迭代格式来求解

$$K^k u^{j+1} = \lambda_\sigma^k K_\sigma u^j + \Delta_F^{i^k} \quad (20)$$

j 是为了求解第 i 个接触点对的虚拟力灵敏度的子迭代步.

上面迭代过程的收敛判断由下面的分析来完成, 首先, 我们计算两个迭代步的差异

$$\Delta u^{j+1} = \sqrt{\|u^{j+1} - u^j\|_2} \quad (21)$$

直接用 Δu^{j+1} 来进行判断是不行的, 因为由 (19) 式可知矢量 $\Delta_F^{i^k}$ 中的 ξ_i^k 很小, 故 Δu^{j+1} 的值也很小, 不便于建立相应的收敛判据. 我们用两个迭代步中得到的差异来判断

$$\delta = |(\Delta u^{j+1} - \Delta u^j) / \Delta u^j| \leq \varepsilon \quad (22)$$

其中, ε 为设定的收敛精度, 可取为 0.01. 上面的收敛判据相对比较严格, 但益处是这样做所得到的灵敏度矩阵 S 的精度很高, 便于提高 H^k 矩阵的数值稳定性 (见 (8c) 式).

在上面的子迭代过程收敛后, 我们得到了在第 i 个点对的虚拟力差分步下的新的间隙矢量 $d_s^{i^k}$, 并可进一步用下式求得对应的灵敏度矢量,

$$S^{i^k} = (d_s^{i^k} - u_s^k) / \xi_i^k \quad (23)$$

在求得所有的接触点对的灵敏度矢量之后, 我们就得到了灵敏度矩阵 S^k .

3 迭代步骤

对第 k 次迭代步, 我们可以将上面的计算过程归纳如下:

- 1) 分解总体刚度矩阵 K^k , 并进行特征值分析.
- 2) 用屈曲模态计算间隙矢量, 如无负的间隙分量, 则计算结束. 否则, 转入下步.
- 3) 用所有接触点对的间隙中最大绝对值来进行收敛判断. 如果, 它小于一个很小的数 η 时, 认为迭代已收敛. 否则, 进行下面的计算.
- 4) 如果 $k = 1$, 从间隙矢量判断接触状态并直接转到下面一步; 如果 $k > 1$, 用方程 (14) 进行虚拟力的修正, 并用方程 (15) 判断接触状态.
- 5) 通过迭代过程, 并利用从上面的第一和第二步中的分解后的总刚和间隙矢量来进行灵敏度分析.
- 6) 求解在 (8a)~(8e) 等式中定义的二次规划问题, 从而得到虚拟力矢量的增量.
- 7) 用方程 (9) 和 (13) 更新虚拟力矢量和总体刚度矩阵, 然后返回到第一步进行下一步的计算.

通过以上的迭代过程的总结, 我们可看出以上的分析方法实际上是一种求解接触问题中的罚函数方法和数学规划法的结合形式. 用上述方法所编制的程序, 我们验证了许多一维和二维的算例^[2~5,11], 并包括一些实验结果^[12], 得到了令人满意的结果.

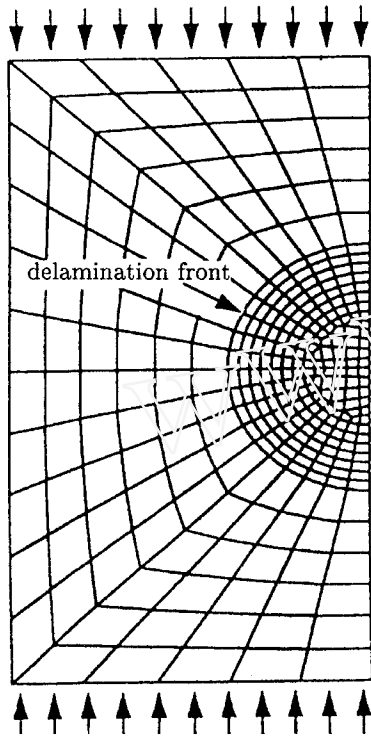


图2 有限元分析模型
Fig.2 FEM analytical mesh

4 计算结果和讨论

我们计算了一个有十层铺层 $[90/0/90/0/0]$ 的正方形复合材料层板, 边界条件为简支, 每一层的材料常数为: $E_{11} = 181.0 \text{ GPa}$, $E_{22} = 10.3 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.28$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7.17 \text{ GPa}$. 板的长宽和厚度分别为 20.0 cm 和 0.3 cm . 在板的第一和第二铺层之间有一圆形或椭圆形脱层, 它位于板平面的中心处. 该问题虽然有对称性, 但由于可能出现反对称模态, 必须取板的一半来分析. 所采用的有限元网格如图2所示, 其中共有 516 个 8 节点单元, 1613 个节点, 7725 个有效自由度, 这一网格的收敛性已经经过验证.

4.1 接触分析过程的讨论

首先, 我们对具有半径 a 为 4.5 cm 的圆形脱层进行研究, 同时, 方程 (12) 中的 β 取值为 100, η 设为 10^{-4} . 在计算的第一步, 沿载荷方向的板的中心线截面的屈曲模态形状如图 (3a) 所示, 我们可以发现上下脱层之间有明显的贯穿现象. 考虑接触分析后, 在图 (3b) 中, 我们可以看到贯穿被消除, 即到迭代第四步时, 计算就收敛了.

屈曲载荷的迭代值如图 4 所示, 从中我们可以看出屈曲载荷随着迭代呈上升的趋势, 这时屈曲载荷由第一步的 1023.9 (N) 升到结束时的 1252.2 (N) , 上升了 22%. 同时, 从作者的计算经验来看, 当 β 的取值越大, 收敛越快, 计算的稳定性也不会受到影响. 我们还发现, 仅当引入接触分析明显改变结构的屈曲模态时, 屈曲载荷才会明显提高.

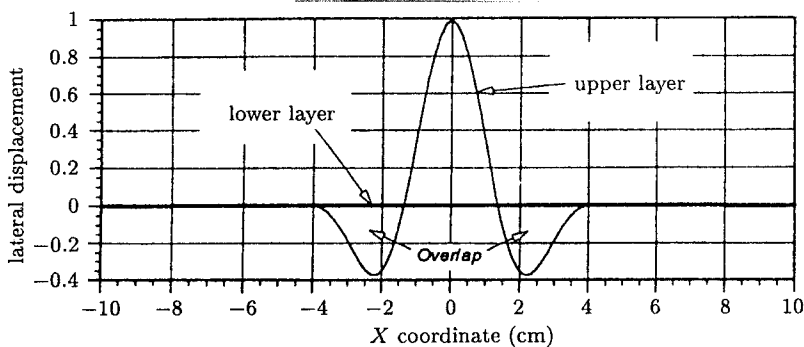


图3(a) 初始分析的屈曲模态
Fig.3(a) Deflection distribution of buckling mode at the first step

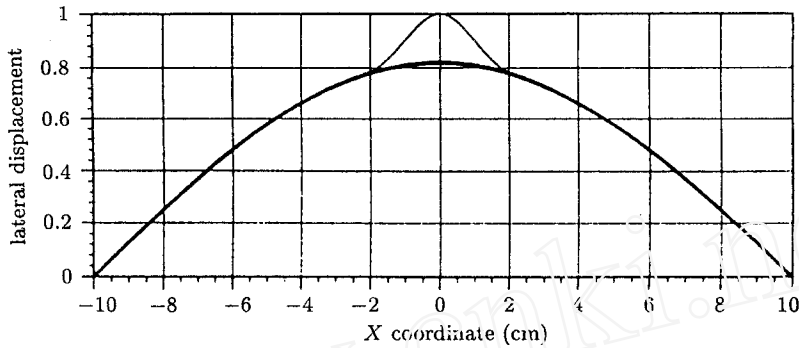


图 3(b) 第四次迭代的屈曲模态

Fig.3(b) Deflection distribution of buckling mode at the fourth step

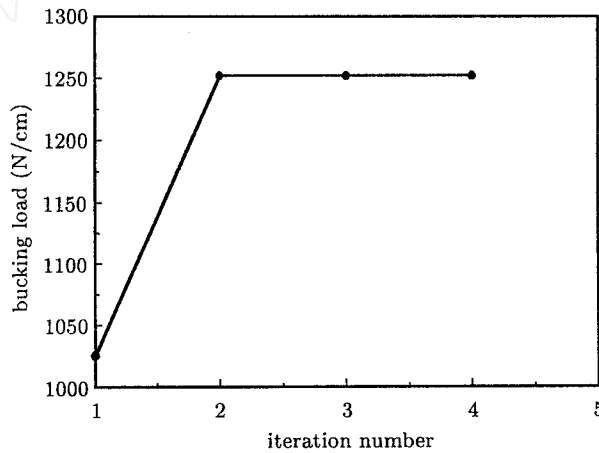


图 4 屈曲载荷的收敛历史

Fig.4 Iterative history of buckling load

4.2 脱层大小对屈曲载荷的影响

为了考察脱层大小对屈曲载荷的影响，我们以圆脱层的半径 a 为变参数。计算结果如图 5 所示，图中的横轴为脱层面积和板面积的比，纵轴是以无脱层损伤层板的屈曲载荷为基础进行无量纲化后的屈曲载荷。从图中可以看出，随着脱层面积的变大，屈曲载荷将降低，这一变化过程可分为三个阶段 [2,3,6]：(1) 当脱层很小时为整体屈曲模态，屈曲载荷降低很小；(2) 当脱层逐渐变大时，出现混合屈曲模态，屈曲载荷有一定程度的降低；(3) 当脱层很大时，出现局部屈曲模态，屈曲载荷有很显著的降低。从图中还可看到在消

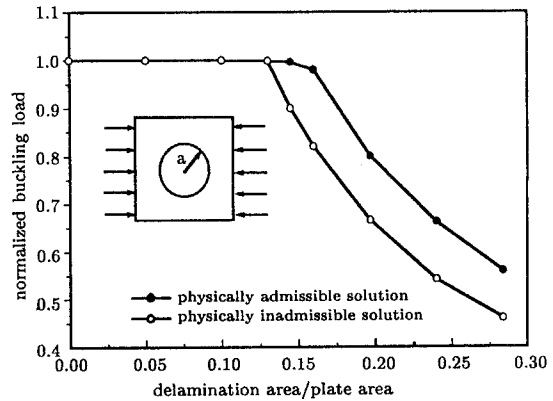


图 5 脱层大小对屈曲载荷的影响

Fig.5 Effect of delamination size on buckling load

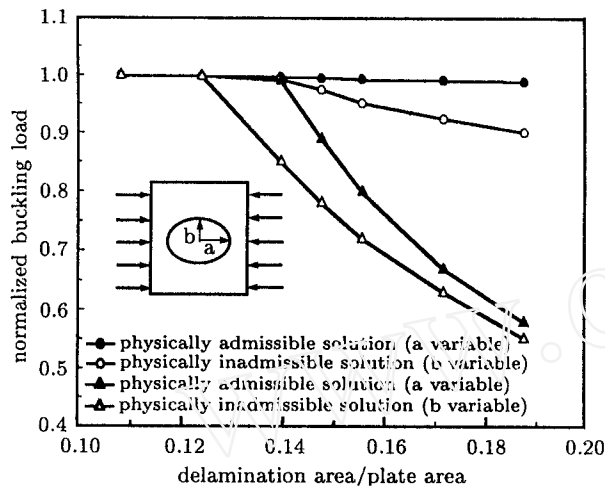


图6 脱层形状对屈曲载荷的影响
Fig.6 Effect of delamination shape on buckling load

4.4 脱层位置对屈曲载荷的影响

我们研究了脱层沿垂直于板面方向的位置对屈曲载荷的影响, 结果如图7所示, 图7中的横轴为上脱层厚度与板总厚度的比. 从图中可看到, 当脱层靠近板的上表面时, 为局部屈曲模态, 这时屈曲载荷很低. 随着脱层往整体板的中央面移动, 屈曲载荷逐渐升高并出现混合屈曲模态. 当上脱层的厚度达到整体板厚的1/4时, 屈曲模态变为整体模态, 这时, 脱层对屈曲载荷的影响很小. 但有趣的是, 当脱层继续靠近整体板的中央面时, 屈曲载荷稍有降低, 它是由板整体弯曲刚度的降低所引起的.

6 结论

本文提出了一种求解特征值问题中接触问题的分析的方法, 该方法通过灵敏度分析和二次规划方法相结合的技术求解接触区域的虚拟力, 并将该虚拟力转化为接触区域的假想弹簧来对结构的刚度矩阵进行修正, 以避免脱层之间的相互贯穿. 本文还分析了接触对屈曲载荷的影响,

除了脱层之间的相互贯穿之后, 结构的屈曲载荷有明显的上升, 最大的上升幅度达到20%以上.

4.3 脱层形状对屈曲载荷的影响

我们考察图6中的椭圆形脱层的情况, 并建立两种模型. 在第一种模型中, 以椭圆的 b 轴作为变参数, 并固定 a 为4.0cm; 在第二种模型中, 将 a 轴作为变参数, 并固定 b 为4.0cm. 从分析的结果可以发现, 当 b 轴, 即垂直于载荷方向的轴线变长时, 脱层将使屈曲载荷明显降低; 但当 a 轴, 即平行于载荷方向的轴线变长时, 脱层对屈曲载荷的影响很小, 尽管此时两种模型中的脱层面积相同. 从图6中还可发现当考虑接触时, 屈曲载荷将有不同程度的升高.

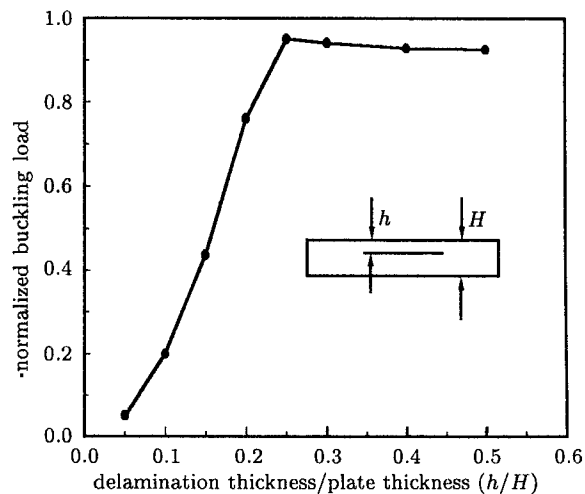


图7 脱层位置对屈曲载荷的影响
Fig.7 Effect of delamination position on buckling load

并讨论了脱层的大小、形状和位置对屈曲载荷的影响。从中可以得到以下结论:

1) 本文所提出的接触问题的分析方法能有效地克服在脱层之间的相互贯穿,它的精度和收敛速度很高。在出现混合或局部模态时,与不考虑接触相比,引入接触分析会提高屈曲载荷的值。

2) 结构的屈曲载荷将随着脱层面积的增大而降低,屈曲模态的变化过程一般分为两个阶段,即变形首先从整体模态到混合模态,然后从混合模态到局部模态。在第二个阶段中,屈曲载荷将明显降低。

3) 对一个椭圆形脱层,当它的长轴沿载荷方向时所得到的结构的屈曲载荷将高于把它的短轴置于载荷方向时所得到的屈曲载荷。

4) 当脱层平面朝板的中央面移动时,屈曲载荷的变化可分为两个阶段,在第一个阶段中,屈曲载荷有明显的上升,此时,屈曲模态是由局部模态到混合模态;在第二个阶段中,屈曲载荷有不太明显的下降,此时,屈曲模态是由混合模态到整体模态。

参 考 文 献

- 1 Chai H, Babcock CD, Knauss WG. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int J Solids Struct*, 1981, 17: 1069~1083
- 2 Simites GJ, Sallam S, Yin WL. Effect of delamination of axially loaded homogeneous laminated plates. *AIAA Journal*, 1985, 23: 1437~1444
- 3 Kardomateas GA, Schmueser DW. Buckling and postbuckling of delaminated composites under compressive loads including transverse shear effects. *AIAA Journal*, 1988, 26: 337~343
- 4 Marshall RD, Sandirff PE, Lauraitis KN. Buckling of a damaged sublaminates in an impacted laminate. *J Composites Tech & Research*, 1988, 10: 107~113
- 5 Chen HP. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth. *AIAA Journal*, 1991, 29: 813~819
- 6 Lee J, G Ürdal Z, Griffin Jr OH. Layer-wise approach for the bifurcation problem in laminated composites with delaminations. *AIAA Journal*, 1993, 31: 331~338
- 7 Chattopadhyay A, Gu H. New higher order plate theory in modeling delamination buckling of composite laminates. *AIAA Journal*, 1994, 32: 1709~1716
- 8 Chai H, Babcock C. Two-dimensional modelling of compressive failure in delaminated laminates. *J of Composite Materials*, 1985, 19: 67~98
- 9 Chai H. Buckling and post-buckling behavior of elliptical plates: Part I-Analysis. *J Appl Mech ASME*, 1990, 57: 981~988
- 10 Chai H. Buckling and post-buckling behavior of elliptical plates: Part II-Results. *J Appl Mech ASME*, 1990, 57: 989~994
- 11 Peck SO, Springer GS. The behavior of delaminations in composite plates analytical and experimental results. *J of Composite Materials*, 1991, 25: 907~929
- 12 Suemasu H, Gozu K, Hayashi K. Compressive buckling of rectangular composite plates with a free-edge delamination. *AIAA Journal*, 1995, 33: 312~319
- 13 Whitcomb JD. Analysis of a laminate with a postbuckled embedded delamination including contact effects. *J of Composite Materials*, 1992, 26: 1523~1535
- 14 Corr RB, Jennings A. A simultaneous iteration algorithm for symmetric eigenvalue problems. *Int J Numer Meth Engng*, 1976, 10: 647~663
- 15 Bathe KJ, Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *Int J Numer Meth Engng*, 1985, 21: 65~88

- 16 Oden JT. Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Wunderlich W et al., eds, Springer-Verlag, New York, 1981
- 17 Zhong WX, Sun SM. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. *Comput Struct*, 1988, 32: 623~643
- 18 Goldfarb D, Idnani A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Mathematical Programming*, 1983, 27: 1~33

CONTACT PROBLEM IN BUCKLING ANALYSIS OF DELAMINATED LAMINATES

Hu Ning Hu Bin* Yao Zhenhan

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(*Department of Mechanical Engineering, Chongqing Iron and Steel College, Chongqing 400050, China*)

Hisao Fukunaga Hideki Sekine

(*Department of Aeronautics and Space Engineering, Tohoku University, Sendai 980-77, Japan*)

Abstract In this paper, the buckling analysis of laminates with an embedded delamination has been conducted by employing the finite element method based on the Mindlin plate theory. To avoid the overlap between two delaminated layers in the buckling mode, an effective solution method has been put forward to deal with the contact problem in the buckling analysis. In this method, an iterative updating process incorporating the first-order sensitivity analysis and the quadratic programming technique has been proposed to compute fictitious forces in contact area, which can be used to calculate stiffness parameters of some artificial springs. By introducing the contribution of these artificial springs into the structural stiffness matrix, the global stiffness can be modified appropriately. Finally, the penetration between two delaminated layers in the buckling mode can be prevented effectively through inserting these artificial springs into the overlapped area. Numerical examples indicated that this method is very efficient to solve the contact problem in buckling analysis. Its accuracy and convergence speed are very high. For the laminates with an embedded delamination, the effect of the introduced contact analysis on the buckling load was analyzed in detail. The numerical results demonstrated that the contact analysis is very important for buckling analysis in some cases. It was found that inclusion of contact analysis to prevent overlaps increases the buckling load, particularly, when the buckling mode changes significantly after including contact analysis. Furthermore, the effects of various sizes, shapes and positions of the delamination on the buckling load have been also investigated. Some important phenomena have been revealed and several conclusions have been drawn.

Key words composite laminates, delamination, buckling analysis, contact analysis

Received 10 November 1997, revised 1 June 1998.