第 30 卷 第 4 期 1998 年 7 月
力 学 学 报 ACTA MECHANICA SINICA
Vol. 30, No. 4 July, 1998

接近亏损系统的矩阵摄动法

徐 涛 陈塑寰 赵建华
(吉林工业大学力学系, 长春 130025)

摘要 随着系统参数的变化, 带有重频的系统可转变成带有密集频率的系统, 反之亦然. 本文讨论了亏损系统与接近亏损系统之间的关系. 并提出了接近亏损系统的平均移位的摄动方法. 算例表明了此方法的有效性.

关键词 接近亏损系统, 矩阵摄动

引 言

具有密集性质的频率组在实际工程结构中经常会遇见. 如准对称结构、局部准对称结构及其相应的振动控制系统, 它们的振动固有频率很可能是密集的; 大型空间柔性结构振动的一个突出特点就是固有频率低而且密集; 带有严格的重频率结构的亏损系统、非亏损系统, 当设计变量有微小的变化时, 其频率也会受其影响而转化为密集频率组. 因此, 研究密集频率组的特性及变化已经引起人们的重视.

关于密集频率结构振动分析的矩阵摄动理论的研究, 文献[1～3]提出特征值移位的思想, 建议用重特征值结构的矩阵摄动法处理密集频率结构的问题, 但这种处理方式是假设摄动后的振动系统仍为非亏损系统而言的. 然而, 具密集频率的振动系统经摄动后的系统的频率重合或几乎重合, 而相应的特征向量系会退化为不完全或接近线性相关系统, 即原系统是接近亏损系统. 本文将讨论这种接近亏损系统的摄动法.

关于亏损系统的矩阵摄动法, 已在文献[4, 5]给出了结论.

1 接近亏损系统的矩阵摄动法

为了简便, 不妨先设 n 阶实矩阵 A 的 n 个特征值是一个密集特征值组. 当求解其特征子空间时, 若出现接近亏损现象, 即特征子空间接近线性相关, 则重选择稳定算法, 求出与 A 的 n 个特征值 λ_i 相应的右正交特征向量矩阵 $U = [u_1, \cdots, u_n]$ 满足

$$AU = UJ \tag{1}$$

及其伴随系统中的左正交特征向量矩阵 $V = [v_1, \cdots, v_n]$ 满足

$$A^H V = VJ^H \tag{2}$$

J 为由 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 构成的对角阵, A^H, J^H 分别为 A 和 J 的共轭转置阵. 此时 U, V 满足广义正交性条件

$$U^H V = VU^H = I \tag{3}$$

若在计算中, 系统出现亏损现象, 求不出完全的特征向量系, 则可用广义特征向量将其补齐, 即直接求出对应于(1), (2) 式中的近似广义正交矩阵(即近似广义模态空间的正交基), 这

1997-08-24 收到第一稿, 1998-03-04 收到修改稿.

时 J 为分块对角阵,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

在不影响讨论的情况下, 这里设(1) ,(2) 式成立.

取 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的算术平均值为

$$\lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{4}$$

或若 $\lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 取其几何平均值为

$$\lambda_0 = \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n} \tag{5}$$

记

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \delta J = J - J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_0 & -1 & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} - \lambda_0 & -1 \\ & & & & \lambda_n - \lambda_0 \end{bmatrix}$$

则(1) ,(2) 式中的 J 阵便可表示为

$$J = J_0 + \delta J \tag{6}$$

将(6) 式代入(1) ,(2) 式中, 得

$$A = UJ_0V^H + U\delta JV^H = A_r + \delta A \tag{7}$$

式中

$$A_r = UJ_0V^H, \qquad \delta A = U\delta JV^H \tag{8}$$

由于正交相似变换不改变矩阵的特征值, 故 A_r 与 J_0 有相同的特征值与特征向量系. 因而(7) 式表明状态矩阵 A 被分解为一个带有 n 重特征值 λ_0 的亏损矩阵 A_r 和一个扰动矩阵 δA 的和矩阵.

假设有一个摄动使 A 变成 $\tilde{A} = A + \varepsilon A$, 相应的摄动系统便为

$$(A + \varepsilon A_1)\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{J} \tag{9}$$

统一记 $\varepsilon\delta A = \varepsilon A_1 + \delta A$, 则上式为

$$(A_r + \varepsilon\delta A)\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{J} \tag{10}$$

这里 A_r 是带有 n 个重特征亏损特征系统的矩阵, 而 $\varepsilon\delta A$ 便可视为摄动矩阵, 利用文献[4, 5]中介绍的亏损系统的矩阵摄动理论便可进行摄动求解.

一般情况, 若 A 的特征值为 3 部分组成, (i) m 个密集特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$; (ii) t 个亏损重特征值 $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{m+t}$; (iii) $n - m - t$ 个非亏损且非密特征值, 则相应地按列分块 U , V 为如下形式

$$U = (U_1, U_2, U_3) \tag{11}$$

$$V = (V_1, V_2, V_3) \tag{12}$$

U_i, V_i ($i=1,2,3$) 分别对应第 i 部分的特征(广义)子矩阵. 同理分解 A 为

$$A = U_1 J_1 V_1^H + U_2 J_2 V_2^H + U_3 J_3 V_3^H \tag{13}$$

这里 J_1 对应密集特征值形成的矩阵, 仿前方法, 可得

$$A = (U_1 J_0 V_1^H + U_2 J_2 V_2^H + U_3 J_3 V_3^H) + U_1 \delta J_0 V_1^H = A_r + \delta A \tag{14}$$

且 A_r 中第一项对应一个为 m 重特征值的亏损矩阵.

2　算　例

取矩阵 A 为如下 3 种形式[6]

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & -2\sqrt{2}(1+\varepsilon) & -36 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -6 & 0 & -81 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 & -2\sqrt{2}(1+\varepsilon) & -36 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -6+\delta 2\sqrt{2}\varepsilon & 0 & -81 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} -4 & -2\sqrt{2}(1+\varepsilon) & -36 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -6 & 0 & -81 \\ 1 & 0 & -2\sqrt{2}\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若关于小变量参数 ε 分别取值为 0.000 1, 0.000 001, 可以计算出 $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ 均有 4 个独立的特征值, 且两两密集, 见表 1. 若取摄动阵 A_1 为 3 种情况: (i) 在第 1 行第 2 列位置元素为 $2\sqrt{2}$, 其它元素为零, 记为 $A_{(12)}$; (ii) 在第 2 行第 2 列位置元素为 $2\sqrt{2}$, 其它元素为零, 记为 $A_{(22)}$; (iii) 在第 3 行第 4 列位置元素为 $2\sqrt{2}$, 其它元素为零, 记为 $A_{(34)}$. 由于在求 $A^{(i)}$ ($i=1,2,3$) 特征向量的过程中, 其中两两向量接近成比例, 则可断定此系统为接近亏损. 采用本文的接近亏损系统矩阵摄动公式计算. 表 1 列出加上摄动矩阵 εA_1 后的矩阵特征值的精确值与用摄动近似公式得到的摄动特征值的误差 $\Delta\lambda = \lambda_i - \tilde{\lambda}_i$.

3　结　论

本文指明了接近亏损系统的性质. 利用接近亏损系统的特征向量几乎线性相关的特点, 将接近亏损系统的摄动转化为亏损重频系统的摄动问题来处理, 使摄动过程变成两部分摄动的叠加, 一部分是由真正结构修改引起的(εA_1), 另一部分是由移位引起的(δA), 从而提供了接近亏损系统的摄动理论与方法. 算例证明了此方法的合理性及有效性.

表 1　$A^{(i)}$ 特征值的精确解及误差

Table 1　Exact solution and error of $A^{(i)}$ characteristic value

	$\lambda(A^{(1)})$	$\lambda(A^{(2)})$	$\lambda(A^{(3)})$	$\Delta\lambda(A^{(1)})$	$\Delta\lambda(A^{(2)})$	$\Delta\lambda(A^{(3)})$	ε
1	- 2. 485 858 + i6. 915 237	- 2. 512 576 + i6. 915 430	- 2. 512 280 + i6. 910 149	- 0. 014 142 - i0. 005 100	- 0. 001 257 6 - i0. 005 293	0. 012 280 + i0. 000 012	
2	- 2. 514 142 + i6. 905 005	- 2. 487 565 + i6. 904 792	- 2. 487 720 + i6. 910 149	- 0. 014 142 + i0. 005 132	- 0. 001 243 5 + i0. 005 345	- 0. 012 280 - i0. 000 012	
3	- 2. 485 858 - i6. 915 237	- 2. 512 576 - i6. 915 430	- 2. 512 280 - i6. 910 149	- 0. 014 142 + i0. 005 100	0. 001 257 6 + i0. 005 293	0. 012 280 + i0. 000 012	0.1×10^{-3}
4	- 2. 514 142 - i6. 905 005	- 2. 487 565 - i6. 904 792	- 2. 487 720 - i6. 910 149	0. 014 142 - i0. 005 132	- 0. 001 243 5 - i0. 005 345	0. 012 280 - i0. 000 012	
1	- 2. 498 586 + i6. 910 649	- 2. 501 251 + i6. 910 669	- 2. 501 228 - i6. 910 138	- 0. 001 441 - i0. 000 512	0. 001 250 - i0. 000 532	0. 001 228 - i0. 000 001	
2	- 2. 501 414 + i6. 909 626	- 2. 498 750 + i6. 909 606	- 2. 498 772 + i6. 910 138	0. 001 414 + i0. 000 511	- 0. 001 250 + i0. 000 531	- 0. 001 228 - i0. 000 001	0.1×10^{-5}
3	- 2. 498 586 - i6. 910 649	- 2. 501 251 - i6. 910 669	- 2. 501 228 - i6. 910 138	- 0. 001 441 + i0. 000 512	0. 001 250 + i0. 000 532	0. 001 228 + i0. 000 001	
4	- 2. 501 414 - i6. 909 626	- 2. 498 750 - i6. 909 606	- 2. 498 772 - i6. 910 138	0. 001 414 - i0. 000 511	- 0. 001 250 - i0. 000 531	- 0. 001 228 + i0. 000 001	

参　考　文　献

1 **刘中生，陈塑寰，王家林，赵又群．密集模态摄动的新方法．固体力学学报**，1993，14(1) (Liu ZS，Chen SH，Wang JL，Zhao YQ. A new matrix perturbation method for chosely spaced eigenvaluees of vibration. *Acta Mechanica Solica Sinica*，1993，14(1) (in Chinese))

2 **刘中生，陈塑寰．频率集聚时模态分析的移动摄动法．宇航学报**，1993(1)：81～88 (Liu ZS，Chen SH. Perturbation analysis of vibration modes with close eigenvalues by eigenvalue shift. *Journal of Chinese Society of Astronautics*，1993(1)：81～88 (in Chinese))

3 Chen Suhuan and Liu Z S. Perturbation analysis of vibration modes with close frequencies. *Commuc Num Math Eng*，1993，9

4 **陈塑寰，徐涛，韩万芝．线性振动亏损系统的矩阵摄动理论．力学学报**，1992，24(6) (Chen SH，Xu T，Han WZ. Matrix perturbation theory for defective systems of linear vibration. *Acta Mechanica Sinica*，1992，24(6) (in Chinese))

5 Xu Tao，Chen Suhuan and Liu Zhongsheng. Perturbation sensitivity of generalized modes of defective systems. *Computers & Structures*，1994，52(2)：179～185

6 **时国勤，诸德超．线性振动亏损系统的广义模态理论．力学学报**，1989，21(2) (Shi GQ，Zhu DC. Generalized mode theory for defective systems of linear vibration. *Acta Mechanica Sinica*，1989，21(2) (in Chinese))

PERTURBATION METHOD OF NEAR DEFECTIVE SYSTEMS

Xu Tao　Chen Suhuan　Zhao Jianhua

(Department of Mechanics, Jilin University of Technology, Changchun 130025, China)

Abstract　The matrix perturbation theory for the distinct eigenvalues of the real symmetric matrix was well developed. If some of eigenvalues are multiple, the nature of the problem changes and difficulties arise. To avoid such difficulties, it is usually assumed that the system has a set of complete eigenvectors to span the space, i. e. the system is non-defective. However, in actual engineering problems, such as general damping systems, flutter analysis of aero-elasticity, and so on, the defective system, that do not have a set of complete eigenvectors to span the space, do exist and can not be ignored.

Recently, Ref. [4,5] discussed the perturbation method for the defective system. From the numerical examples it can be seen that the system with defective repeated eiganvalues can be transformed into that with close eigenvalues and the corresponding eigenvectors to be near parallel with each other, which is known as the near defective system. Therefore, development of the perturbation theory for the near defective systems with close eigenvalues is necessary.

It should be point out that the matrix perturbation methods discussed above for the distinct eigenvalues and repeated eigenvalues can not be used to deal with the case of systems with near defective close eigenvalues. In Ref. [1,2,3], using the shift method, the perturbation problem with close eigenvalues for the real modes can be transformed into one of the repeated eigenvalues, which is applicable only for the case of the non-defective systems.

In this paper, we try to expand the method for perturbation analysis of close eigenvalues in Ref. [1,2,3] to the case of near defective systems. First, we discuss the identification of the close eigenvalues and then give matrix perturbation for near defective systems. In order to illustrate the application of the theory discussed, a numerical example is given.

Key words　near defective system, matrix perturbation

Received 24 August 1997, revised 4 March 1998.