

矩形截面管内电流变液的流动¹⁾

朱克勤 彭杰 席葆树
(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 基于伽辽金方法, 导出了矩形截面直管内泊肃叶流动的一阶和二阶近似解. 在此基础上, 研究了电流变单链的变形问题, 并得到了描述它形状的多项式函数.

关键词 电流变液, 泊肃叶流, 伽辽金方法, 电流变链

引言

电流变液是一种新型的智能材料, 通常由绝缘程度很好的基液和均匀散布在其中的固体电介质微粒组成. 在没有外加电场时, 电流变液呈现出牛顿流体的特性; 在外加电场中, 由于介电粒子的链化, 电流变液的表现粘度增大并呈现出非牛顿流体的特性. 该过程不但可逆, 而且响应时间极短, 仅为毫秒量级. 在电场作用下电流变液的粘性发生变化的现象被称为电流变效应, 该效应在工业界具有广泛的应用前景^[1].

为了获得均匀的电场, 研究电流变液流动特性常用矩形截面的管道. 与电流变液的应力计算类似^[2], 电流变液在管道中流动特性的研究可分成高浓度和低浓度两种典型情况进行. 本文研究粒子体积分数较小的低浓度情况, 目的在于分析电流变链在泊肃液流中的变形问题. 本项研究是 Chen 等人^[3]有关工作的继续, 他们在点偶极子近似的基础上, 导出了一个描述泊肃液流中单链变形的非线性常微分方程. 由于方程的非线性, 单链形状的最后确定只能通过数值求解来得到.

在电流变液中介电粒子相距较近的情况下, 由于点偶极子模型会产生较大的误差, 本文将不采用这一模型. 我们从电流变链的力矩平衡方程出发, 通过分析, 得到了一个简单的多项式函数, 用它描述电流变单链在泊肃叶流中的变形, 不但具有简单的特点, 而且与实验结果相当一致.

1 矩形截面管内泊肃叶流动的伽辽金解

研究电流变液在矩形截面直管内的流动问题, 必须首先提供基液的速度分布, 以此为基础才能进一步分析管内电流变链的变形和断裂等一系列更复杂的现象. 矩形截面管内泊肃叶流速度分布的精确解是一个无穷级数的求和形式, 实际中使用很不方便, 本节将用伽辽金方法导出它的两种近似解.

在图 1 所示的坐标系中, 已知管内的压力梯度 dp/dx 、管截面的尺寸 $2a \times 2b$ 和流体的动力粘性系数 μ . 在流动定常的条件下, 描述该问题的 N-S 方程可简化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1996-09-09 收到第一稿, 1997-08-29 收到修改稿.

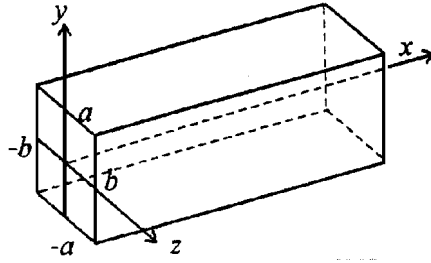


图1 坐标系

Fig. 1 Coordinate system

固壁的粘附边界条件为

$$u|_{y=\pm a} = 0, \quad u|_{z=\pm b} = 0 \quad (2)$$

用分离变量法可得到精确解^[4]

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_p}{dx} \frac{\text{秒量}}{(2n+1)^3} \cos\left(\frac{2n+1}{2a} y\right) \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2n+1}{2a} z\right)}{\cosh\left(\frac{2n+1}{2a} b\right)} \right] \quad (3)$$

它表现为一个三角函数和双曲函数的无穷级数的求和,在包括本项研究在内的许多问题中,常需要形式简单而又具有一定精度的近似解,这可以通过伽辽金方法来得到.

令二阶近似解的形式为

$$u = A(a^2 - y^2)(b^2 - z^2) + B(a^2 - y^2)^2(b^2 - z^2)^2 \quad (4)$$

它自动满足固壁边界条件.伽辽金法本质上属于加权剩余法,其基本思想是使得近似解代入方程后产生的误差(称为剩余)与权函数的内积为零,权函数取为近似解中的基本函数 $(a^2 - y^2)(b^2 - z^2)$ 和 $(a^2 - y^2)^2(b^2 - z^2)^2$.由此可得到确定(4)式中待定系数A和B的两个积分方程

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ A(a^2 + b^2 - y^2 - z^2) - 2B[(a^2 - y^2)^2(3z^2 - b^2) + (b^2 - z^2)^2(3y^2 - a^2)] + \frac{1}{2} \frac{d_p}{dx} (a^2 - y^2)(b^2 - z^2) \right\} dydz = 0$$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ A(a^2 + b^2 - y^2 - z^2) - 2B[(a^2 - y^2)^2(3z^2 - b^2) + (b^2 - z^2)^2(3y^2 - a^2)] + \frac{1}{2} \frac{d_p}{dx} (a^2 - y^2)^2(b^2 - z^2)^2 \right\} dydz = 0$$

积分并整理后得到

$$\left. \begin{aligned} -280(a^2 + b^2)A - 192Ba^2b^2 - 175 \frac{1}{2} \frac{d_p}{dx} \\ p \text{ hes} \\ -252(a^2 + b^2)A - 256Ba^2b^2 - 147 \frac{1}{2} \frac{d_p}{dx} \end{aligned} \right\} = 0$$

]

这是一个多项式函数,远比精确解(3)式简单得多.最大速度 U_2 在 x 轴上出现

$$U_2 = - \frac{3409}{5824} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{d} \frac{dp}{dx} \quad (7)$$

进而(6)式可以写成另一种有用的形式

$$u = [c_1 + c_2(1 - Y^2)(1 - Z^2)](1 - Y^2)(1 - Z^2) U_2 \quad (8)$$

其中 $Y = y/a$, $Z = z/b$ 为无量纲坐标,而

$$c_1 = \frac{259 \times 16}{3409}, \quad c_2 = - \frac{735}{3409} \quad (9)$$

在一阶近似的情况下,可令解的形式为

$$u = C(a^2 - y^2)(b^2 - z^2) \quad (10)$$

同样用伽辽金方法,我们得到

$$u = (1 - Y^2)(1 - Z^2) U_1 \quad (11)$$

其中最大速度为

$$U_1 = - \frac{5}{8} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{d} \frac{dp}{dx} \quad (12)$$

一阶近似解(11)的形式比二阶近似解(8)式更加简单,但精度有所降低.

为了解两种伽辽金解的精度,与精确解(3)式进行了比较.计算中取 $a = b$ 的正方形截面管,令 $\frac{1}{d} \frac{dp}{dx} = 1$,表 1 给出了 $Z = 0$ 截面上各点用三种方法计算的速度值的比较.在 $Y = 0$ 处,速度达最大值,一阶精度伽辽金解的相对误差是 6%,二阶精度伽辽金解则有了较大的改善,相对误差下降到 0.3%.在近固壁的 $Y = 0.8$ 处,一、二阶伽辽金解的相对误差均为 3.2%.一系列计算结果表明:与精确解相比,尽管伽辽金解的形式有了很大的简化,但仍保持有较好的精度,对二阶伽辽金解尤其如此.

表 1

Table 1

Y coordinate	first order Galerkin solution (11)	second order Galerkin solution	accurate solution (3)
0.0	0.312 5	0.292 1	0.294 7
0.2	0.300 0	0.283 4	0.284 6
0.4	0.262 5	0.254 3	0.253 5
0.6	0.200 0	0.201 8	0.198 8
0.8	0.112 5	0.119 9	0.116 2
1.0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

2 电流变链的变形

现研究边长 $2a \times 2a$ 的正方形等截面直管,上下平行的壁面为两块电极极板,而另外两块

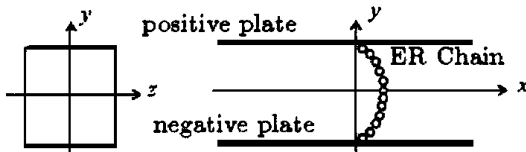


图 2 电流变单链的变形

Fig. 2 Deformation of an ER chain

平行的侧面板为绝缘板. y 轴与电场方向平行. 在基液静止的情况下, 介电粒子在电场中形成沿 y 轴排列的直链. 当管内液体开始流动时, 电流变链会在流体作用下离开原平衡位置而发生变形, 并在新的位置上达到平衡(图 2).

在长度为 ds 的链元上, 力的平衡关系为^[3]

$$df + Fds = 0 \tag{13}$$

f 代表链元两侧横截面上的张力; F 是基液运动时对单位长的链所产生的粘性力, 它沿着 x 轴方向; 重力和浮力相当, 可忽略不计. 在小雷诺数问题中, 流体绕单位长圆柱的粘性阻力由斯托克斯公式给出^[4]

$$F_x = ku \frac{\partial y}{\partial s}, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \tag{14}$$

其中 $k=3$. 在 $Z=0$ 截面上, 基液的速度分布由二阶精度的伽辽金解(8)式给定为

$$u = (1 - c_2 Y^2)(1 - Y^2) U_2 \tag{15}$$

把(14)和(15)两式代入(13)式后, 得到

$$\frac{df_x}{ds} = -k(1 - c_2 Y^2)(1 - Y^2) U_2 \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{df_y}{ds} = 0, \quad \frac{df_z}{ds} = 0 \tag{16}$$

积分后, 成为

$$f_x = -kU_2 a \left[Y - \frac{1+c_2}{3} Y^3 + \frac{c_2}{5} Y^5 + C_1 \right], \quad f_y = C_2, \quad f_z = C_3 \tag{17}$$

根据问题的对称性, 张力在 z 轴方向上的投影为零, 而在中点 $Y=0$ 处, 张力在 x 轴方向上的投影也是零, 从而可以判断上式中的两个积分常数 $C_1=0$ 和 $C_3=0$ 均为零. 这样就得到了

$$f_x = -kU_2 a \left[Y - \frac{1+c_2}{3} Y^3 + \frac{c_2}{5} Y^5 \right], \quad f_y = C_2 = K, \quad f_z = 0 \tag{18}$$

另一方面, 利用理论力学中的软索平衡定理, 将图 3 中虚线所示的链段从系统中隔离. 它的一端点 B 与固壁相邻, 无量纲坐标为 $(0, 1)$, 另一端点的坐标为 (X, Y) . 该链段对点 B 的力矩平衡方程为

$$KX = -f_x(1 - Y) + \int_Y^1 k(1 - c_2 Y^2) \cdot (1 - Y^2) U_2(1 - Y) ad Y \tag{19}$$

积分后整理成为

$$f_x = \frac{K}{Y-1} \left[X - \frac{akU_2}{K} \left[\frac{25-80-3c_2}{60} - Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{1+c_2}{3} Y^3 - \frac{1+c_2}{4} Y^4 - \frac{c_2}{5} Y^5 + \frac{c_2}{6} Y^6 \right] \right] \tag{20}$$

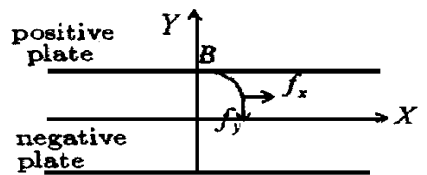


图 3 电流变链段

Fig. 3 The element of ER chain

上式与 (18) 式联立得到

$$X = \frac{a U_2}{2 K} \left[\frac{25 - 3 c_2}{10} - 3 Y^2 + \frac{1 + c_2}{2} Y^4 - \frac{c_2}{5} Y^6 \right] \quad (21)$$

或写成更简明的形式

$$X = X_0 \left[1 - \frac{10}{25 - 3 c_2} \left(3 Y^2 - \frac{1 + c_2}{2} Y^4 + \frac{c_2}{5} Y^6 \right) \right] \quad (22)$$

它描述了电流变链在泊肃叶流中的变形,其中

$$X_0 = \frac{a U_2}{20 K} \quad (23)$$

是链变形的横向最大位移,它与链内力的 y 方向分量 K 成反比,与最大速度 U 和基液的粘性系数成正比,它可通过实验测定来提供. 同样可以得到 (22) 式和 (23) 式相应于一阶伽辽金近似解的结果

$$X = X_0 \left(1 - \frac{6}{5} Y^2 + \frac{1}{5} Y^4 \right) \quad (24)$$

其中

$$X_0 = \frac{5 a U_1}{4 K} \quad (25)$$

这样我们得到了方管泊肃叶流中电流变单链形状的在一阶和二阶近似伽辽金解精度下的数学描述. 在一阶精度下,它可表示为一个四次多项式函数;在二阶精度下,它表示为一个六次多项式函数. 表 2 给出了两种近似下数值解的比较,所用参数与表 1 的相同. 计算表明两种近似的结果相差不大,尽管原则上可以进一步得到更高阶近似的表达式,但从结果改善的角度来看,二阶近似解已经足够了. 图 4 给出了理论结果与实验结果的比较,可以看出,除了在极板附近,两者是一致的. 极板附近的差别是由于实验中出现粒子的堆积所致.

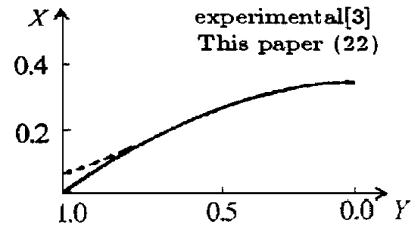


图 4 理论和实验结果的比较
Fig. 4 Comparison of analytic and experimental results

表 2
Table 2

Y coordinate	first order Galerkin solution (24)	second order Galerkin solution (22)
0.0	0.325 1	0.325 1
0.2	0.309 6	0.310 0
0.4	0.264 3	0.265 5
0.6	0.193 1	0.194 9
0.8	0.102 0	0.103 5
1.0	0.000 0	0.000 0

在文献 [3] 中,Chen 等人基于电场中介电粒子极化的点偶极子近似,导出的描述正方形截面直管内泊肃叶流中电流变单链形状的数学模型是

$$\frac{4 - (X)^2}{2 - 3(X)^2} X = - \frac{3 a U}{K} \left[Y - \frac{Y^3}{3} \right] \quad (26)$$

其中 $X = dX/dY$ 是电流变链的斜率. 这是一个非线性的常微分方程, 在进行数值积分时, 还要给出链内力在 y 轴方向的分量 K . Chen 等人在实验中发现: 在链倾角约为 ± 0.35 处, 介电粒子之间的距离最接近, 因而它们的中心距可以用粒子的直径来加以近似, 由此可确定 K 的大小. 在他们的实验中, 无量纲参数为 $3a U/K = 8.6$, 代入 (26) 式后, 计算得到的链的形状与实验相差甚远. 为了与实验结果保持一致, 需要人为地将无量纲参数值减少为 $3a U/K = 2.0$. 这表明, 文献 [3] 中关于参数 K 确定的方法需进一步改进. 本文的结果不但简单, 而且将参数 K 的确定转化为链横向最大位移 X_0 的确定, 使情况有了很大改善.

3 结 论

本文用伽辽金方法导出了矩形截面直管内泊肃叶流动的一阶和二阶精度解. 与精确解相比, 伽辽金解的形式要简单得多, 并保持了较好的精度. 在此基础上, 从单链的力矩平衡出发, 导出了电流变单链在泊肃叶流中变形的一种新的数学表达式. 与 Chen 等人的有关工作相比, 本文结果的主要特点是: 1) 泊肃叶流中电流变单链形状的数学描述由原来的非线性常微分方程简化为简单的多项式函数; 2) 方程的推导避开了在介电粒子相距较近的情况下有争议的点偶极子近似, 使问题的数学描述更准确地符合原物理模型; 3) 本数学模型中需要由实验提供的唯一参数是链在流向位移的最大值 X_0 , 这比 Chen 等人数学模型中需要提供链内力在 y 轴方向的分量 K 要容易得多. 事实上, 通过功能守恒原理 X_0 也可以从理论上加以确定, 这一工作以及链断裂点的理论分析正在进行之中.

参 考 文 献

- 1 朱克勤, Tao R. 电流变液和电流变效应. 力学进展, 1993, 24(3): 154 ~ 162 (Zhu Keqin, Tao Rongjia. Electrorheological fluids and electrorheological effects. *Advances in Mechanics*, 1994, 24(2): 154 ~ 162 (in Chinese))
- 2 Atten P et al. Variation with distance of the attraction force between spheres and estimation of static yield stress of ER fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1996, 7(5): 573 ~ 578
- 3 Chen T-J et al. Deformation of an electrorheological chain under flow. *Journal of Applied Physics*, 1993, 74(2): 942 ~ 944
- 4 White FM. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill Book Company, 1974

THE FLOW OF ER FLUIDS IN A TUBE OF RECTANGULAR CROSS¹⁾

Zhu Keqin Peng Jie Xi Baoshu

(Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The main feature of flows of electrorheological (ER) fluids is the deformation of chain-like structures of particles. The simplest of all structures in ER fluids is a single ER chain. There are two kinds of deformation of chains in ER devices: those produced by moving electrodes such as in ER clutches, and those produced by flow such as in ER valves. Due to the relative movement between basic fluids and ER chains, the analysis of ER chains under flow is more challenging.

In this paper an analytical study on the deformation of an ER single chain in a tube with rectangular cross is presented. Firstly, a second-order approximate solution of the Poiseuille flow in the tube is derived from Galerkin approach. The numerical results show that the Galerkin approximate solution is much simpler than the exact solution, but maintains enough accuracy. Secondly, a balance equation of moment for the ER chain is established to avoid using of point-dipole model, which is not accurate enough in the case that dielectric particles are adjacent to each other. Finally we find that the shape of an ER chain deformed by the flow in a square tube is described by a sextic polynomial. This mathematical expression is not only much simpler than an earlier result, but also is in good agreement with the experimental result.

Key words electrorheological fluids, Poiseuille flow, Galerkin method, electrorheological chain

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 9 September 1996, revised 29 August 1997.