第 30 卷 第 3 期
1998 年 5 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 30, No. 3
May 1998

新型 Poisson 括号意义下的无穷维 Lie 代数[1)]

张宝善　卢东强　戴世强
(上海大学 上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

摘要　本文首先针对 KdV 方程的 Hamilton 形式,建立一种比较容易验证的新型 Poisson 括号和无穷维 Lie 代数. 其次,研究 KdV 方程的 Hamilton 形式的第一积分与新型 Poisson 括号的关系,得到判定第一积分的充分必要条件. 最后,构造 KdV 方程的第一积分.

关键词　KdV 方程,Hamilton 形式,第一积分,Poisson 括号,无穷维 Lie 代数

1　新型 Poisson 括号

考虑 Gardner 曾经讨论过的 KdV 方程的 Hamilton 形式[1]

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right) \quad \text{in} \quad s \tag{1.1}$$

这里的泛函由

$$H = \int_0^{2\pi} h(u, u_x, \cdots)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

确定,其中函数 $h(p_1, p_2, \cdots)$ 是关于无穷维变量 $p = (p_1, p_2, \cdots)$ 的任意阶可微的函数,函数 $u = u(x, t)$ 是关于空间变量 x,时间变量 t 的无穷次可微函数且关于 x 是具有 2π 周期的函数: $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$. 我们来寻求能够与(1.1)的解通过第一积分联系起来的新型 Poisson 括号. 在泛函空间

$$S = \left\{ F \mid F = \int_0^{2\pi} f(u, u_x, \cdots)\,\mathrm{d}x \right\} \quad na \tag{1.3}$$

上定义映射{ ·, ·}如下

$$\{F, G\} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial u}G - F\frac{\partial G}{\partial u}\right) u_t\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

其中泛函空间 S 定义在无穷维可微函数空间上,即 S 的任意元素 F 所对应的函数 $f(p_1, p_2, \cdots)$ 都是其无穷维变量 $p = (p_1, p_2, \cdots)$ 的任意阶可微的函数. 函数 $u = u(x, t)$ 的假设同前面一样. 对任意 $F, G, K \in S$, $a \in R$,根据定义(1.4)容易证明{ ·, ·}具有性质:

(a) $\{F, G\} = -\{G, F\}$,

(b) $\{aF, G\} = a\{F, G\} = \{F, aG\}$,

(c) $\{F + G, K\} = \{F, K\} + \{G, K\}$,

---

1) 国家自然科学基金资助项目.

1996-12-27 收到第一稿, 1997-11-24 收到修改稿.

我们来证明 Jacobi 恒等式

$$\{\{F, G\}, K\} + \{\{G, K\}, F\} + \{\{K, F\}, G\} \equiv 0 \tag{1.5}$$

同样还是成立的. 为证明这一点,可以用泛函空间 S 的元素性质,得到等价定义如下:

$$\{F, G\} = G\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial u}u_t \mathrm{d}x - F\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial u}u_t \mathrm{d}x = \sigma_1 F\cdot G - F\cdot\sigma_1 G \tag{1.6}$$

其中,σ_1 表示变分积分算子:$\sigma_1 = \int_0^{2\pi}\left(u_t\frac{\delta}{\delta u}\right)\mathrm{d}x$,于是 $\{F, G\}$ 的变分导数为

$$\frac{\delta\{F, G\}}{\delta u} = \frac{\delta\sigma_1 F}{\delta u}G + \sigma_1 F\frac{\delta G}{\delta u} - \frac{\delta F}{\delta u}\sigma_1 G - F\frac{\delta\sigma_1 G}{\delta u} \tag{1.7}$$

变分积分算子 σ_1 对 $\{F, G\}$ 的作用为

$$\begin{aligned}\sigma_1\{F, G\} &= \int_0^{2\pi}\frac{\delta\{F, G\}}{\delta u}u_t\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\delta\sigma_1 F}{\delta u}G + \sigma_1 F\frac{\delta G}{\delta u} - \frac{\delta F}{\delta u}\sigma_1 G - F\frac{\delta\sigma_1 G}{\delta u}\right)u_t\mathrm{d}x = \\ &G\int_0^{2\pi}\frac{\delta\sigma_1 F}{\delta u}u_t\mathrm{d}x + \sigma_1 F\int_0^{2\pi}\frac{\delta G}{\delta u}u_t\mathrm{d}x - \sigma_1 G\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta u}u_t\mathrm{d}x - F\int_0^{2\pi}\frac{\delta\sigma_1 G}{\delta u}u_t\mathrm{d}x = \\ &G\cdot\sigma_1(\sigma_1 F) + \sigma_1 F\sigma_1 G - \sigma_1 G\sigma_1 F - F\cdot\sigma_1(\sigma_1 G) = \\ &G\cdot\sigma_1^2 F - F\cdot\sigma_1^2 G\end{aligned} \tag{1.8}$$

这里,$\sigma_1^2(\cdot) = \sigma_1(\sigma_1(\cdot))$. 由定义和(1.8)的结果得到 $\{\{F, G\}, H\}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\{\{F, G\}, K\} &= \{F, G\}\sigma_1 K - K\sigma_1\{F, G\} = \\ &\sigma_1 F\cdot G\cdot\sigma_1 K - F\cdot\sigma_1 G\cdot\sigma_1 K - K\left(G\cdot\sigma_1^2 F - F\cdot\sigma_1^2 G\right)\end{aligned} \tag{1.9}$$

利用轮换性质分别得到 $\{\{G, K\}, F\}$ 和 $\{K, F, G\}$ 为

$$\{\{G, K\}, F\} = \sigma_1 G\cdot K\cdot\sigma_1 F - G\cdot\sigma_1 K\cdot\sigma_1 F - F\left(K\cdot\sigma_1^2 G - G\cdot\sigma_1^2 K\right) \tag{1.10}$$

$$\{\{K, F\}, G\} = \sigma_1 K\cdot F\cdot\sigma_1 G - K\cdot\sigma_1 F\cdot\sigma_1 G - G\left(F\cdot\sigma_1^2 K - K\cdot\sigma_1^2 F\right) \tag{1.11}$$

由(1.9)～(1.11)式相加得到

$$\begin{aligned}A = \{\{F, G\}, K\} + \{\{G, K\}, F\} + \{\{K, F\}, G\} = \\ \sigma_1 F\cdot G\cdot\sigma_1 K - F\cdot\sigma_1 G\cdot\sigma_1 K - K\left(G\cdot\sigma_1^2 F - F\cdot\sigma_1^2 G\right) + \\ \sigma_1 G\cdot K\cdot\sigma_1 F - G\cdot\sigma_1 K\cdot\sigma_1 F - F\left(K\cdot\sigma_1^2 G - G\cdot\sigma_1^2 K\right) + \\ \sigma_1 K\cdot F\cdot\sigma_1 G - K\cdot\sigma_1 F\cdot\sigma_1 G - G\left(F\cdot\sigma_1^2 K - K\cdot\sigma_1^2 F\right) \equiv 0\end{aligned} \tag{1.12}$$

这就是所要证明的 Jacobi 恒等式. 综合上述讨论,我们得到结论:

定理 1.1 泛函空间 S 关于 Poisson 括号 $\{\cdot, \cdot\}$ 构成无穷维 Lie 代数.

值得指出,尽管 $\{\cdot, \cdot\}$ 可以构成 Poisson 括号,即满足反对称性、双线性以及 Jacobi 恒等式三条重要性质,可是它却不满足通常 Poisson 括号所具有的 Leibnitz 公式性质. 事实上,容易证明 $\{\cdot, \cdot\}$ 满足性质:

(d) $\{FG, K\} = F\{G, K\} + G\{F, K\} + FG\sigma_1 K$

2　Hamilton 形式的第一积分与无穷维 Lie 子代数

现在讨论 Hamilton 形式(1.1)与 Poisson 括号(1.4)间的结构关系. 首先叙述(1.1)的第一积分概念如下[2]:

定义 2.1　泛函空间 S 中的泛函 $T = T(u)$ 称为 Hamilton 形式(1.1)的第一积分,如果沿 Hamilton 形式(1.1)的任意解 $u = u(x, t)$,总有 $\frac{\mathrm{d}T(u)}{t} \doteq 0$. 这里“$\doteq$”表示沿 Hamilton 形式(1.1)的任意解曲线 $u = u(x, t)$ 的取值. 容易知道

$$\frac{\mathrm{d}T(u)}{t} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta T}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x \doteq \int_0^{2\pi} \frac{\delta T}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

特别,对决定 Hamilton 形式(1.1)的泛函 $H = H(u)$ 本身有

$$\frac{\mathrm{d}H(u)}{\mathrm{d}t} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta H}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x \doteq \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)\mathrm{d}x \doteq 0 \tag{2.1$'$}$$

即

$$\{H, H\} \doteq 0,\quad H(u) \doteq \mathrm{const} \tag{2.2}$$

因而 $H = H(u)$ 本身就是 Hamilton 形式(1.1)的一个第一积分. 令

$$S_H = \{T \mid T \in S,\ T \text{ 为 Hamilton 形式(1.1) 的第一积分}\} \tag{2.3}$$

则 S_H 是泛函空间 S 的非空子集,容易验证 S_H 关于 S 的线性运算是封闭的,且 $\forall T \in S_H$,由

$$\begin{aligned}\{T, H\} &= H\int_0^{2\pi} \frac{\delta T}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x - T\int_0^{2\pi} \frac{\delta H}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x \doteq \\ &H(u)\int_0^{2\pi} \frac{\delta T}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x - T(u)\int_0^{2\pi} \frac{\delta H}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)\mathrm{d}x \doteq \quad 1 \\ &H(u)\frac{\mathrm{d}T(u)}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\{T, H\} \doteq 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}T(u)}{\mathrm{d}t} \doteq 0 \Leftrightarrow T(u) \doteq \mathrm{const} \tag{2.4$'$}$$

立刻得到

定理 2.1　$T = T(u) \in S$ 为(1.1)的第一积分当且仅当 $\{T, H\} \doteq 0$. 借助这个结果可以得到常常称为 Poisson 定理的如下重要结论:

定理 2.2　如果 $F = F(u)$, $G = G(u) \in S$ 为(1.1)的两个第一积分,那么 $\{F, G\}$ 也为(1.1)的第一积分.

证明　由于 $F = F(u)$, $G = G(u) \in S$ 为(1.1)的两个第一积分,即 $F, G \in S_H$,故有

$$\{F, H\} \doteq 0, \{G, H\} \doteq 0 \tag{2.5}$$

利用上式和 Jacobi 恒等式便可以得到

$$\{\{F, G\}, H\} = -\{\{G, H\}, F\} - \{\{H, F\}, G\} \doteq -\{0, F\} - \{0, G\} \doteq 0 \tag{2.6}$$

这样,由定理 1.1 知道$\{F, G\}$也为(1.1)的第一积分,即$\{F, G\} \in S_H$.

综合上述结果,我们得到结论:

定理 2.3　Hamilton 形式(1.1)的第一积分的全体 S_H 关于 Poisson 括号$\{\cdot, \cdot\}$构成无穷维 Lie 代数 S 的无穷维 Lie 子代数.

接下来,我们研究(1.4)定义的 Poisson 括号$\{\cdot, \cdot\}$与 Gardner 等[1,3]定义的“Poisson 括号$(\cdot, \cdot)$”

$$(F, G) = \int_0^{2\pi} \frac{\delta F}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta G}{\delta u}\right) \mathrm{d}x \tag{2.7}$$

间的关系.

定理 2.4 (1.4)定义的 Poisson 括号$\{\cdot, \cdot\}$与 Gardner 定义的“Poisson 括号$(\cdot, \cdot)$”(2.7)间具有关系式

$$\{F, G\} \doteq G(F, H) - F(G, H) \doteq G\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}t} - F\frac{\mathrm{d}G(u)}{\mathrm{d}t} \tag{2.8}$$

证明　第二个等式可以由(2.1)得到,我们只需证明第一个等式即可.

由 Poisson 括号$\{\cdot, \cdot\}$的定义(1.4),对(1.1)的任意解 $u = u(x, t)$,有

$$\begin{aligned}\{F, G\} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\delta F}{\delta u}G - F\frac{\delta G}{\delta u}\right)u_t \mathrm{d}x \doteq \\ &\int_0^{2\pi}\left(\frac{\delta F}{\delta u}G - F\frac{\delta G}{\delta u}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)\mathrm{d}x \doteq \\ &G\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}\mathrm{d}x - F\int_0^{2\pi}\frac{\delta G}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}\mathrm{d}x \doteq \\ &G(F, H) - F(G, H)\end{aligned} \tag{2.9}$$

关系式(2.8)的第一个等式由此得证.

根据定理 2.4 的结论,我们可以进一步看到由(1.4)定义的 Poisson 括号$\{\cdot, \cdot\}$具有性质:

推论 2.5 如果 $F = F(u)$, $G = G(u) \in S$,则当 $G \in S_H$ 时有关系式

$$\{F, G\} \doteq G(F, H) \doteq G\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}t} \tag{2.10}$$

当 $F, G \in S_H$ 时有关系式

$$\{F, G\} \doteq 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{F, G\} \doteq 0 \tag{2.11}$$

上述推论表明,如果 $F = F(u)$, $G = G(u) \in S$ 同为(1.1)的第一积分,那么 F, G 沿(1.1)的任意解 $u = u(x, t)$是相互内旋的[2]: $\{F, G\} \doteq 0$. 并且如果泛函 $F = F(u) \in S$ 为(1.1)的第一积分,那么 $G = G(u) \in S$ 也为(1.1)的第一积分的充分必要条件是$\{F, G\} \doteq 0$. 因此,上述推论不仅是定理 1.1 的推广,而且使得定理 2.1～2.3 成为更加明显的事实. 这些结果较 Gardner 等定义的“Poisson 括号$(\cdot, \cdot)$”(2.7)具有一定的优越性.

3　KdV 方程第一积分的确定方法研究

作为例子,我们来具体讨论 KdV 方程[1]

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right) \tag{3.1}$$

第一积分的确定问题,这里

$$H = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right)\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

考虑泛函 $F \in S$,由(1.3)及变分导数的概念得到

$$\frac{\delta F}{\delta u} = f_u - (f_{u_x})_x + (f_{u_{xx}})_{xx} + \cdots \tag{3.3}$$

首先,由定理 2.4 得到

$$\{F, H\} \doteq H\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta u}(uu_x + u_{xxx})\mathrm{d}x \doteq H\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) \tag{3.4}$$

这时,由(3.4)可以看出泛函 $F \in S$ 成为 KdV 方程(3.1)第一积分的一个充分条件是

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \tilde{f}\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) \tag{3.5}$$

于是,由(3.3)和(3.5)两式可以得到泛函微分方程簇

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) = f_u - (f_{u_x})_x + (f_{u_{xx}})_{xx} + \cdots \tag{3.6}$$

对于给定的可微函数 $\tilde{f}$,满足泛函微分方程(3.6)的 $f(u, u_x, u_{xx}, \cdots)$ 便可确定 KdV 方程(3.1)第一积分 $F = \int_0^{2\pi} f(u, u_x, u_{xx}, \cdots)\mathrm{d}x$. 例如:选取 $\tilde{f} \equiv 1$ 可以得到

$$f_1 = u, F_1 = \int_0^{2\pi} u\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

选取 $\tilde{f} \equiv \frac{1}{2}u^2 + u_{xx}$ 可以得到

$$f_2 = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2, \quad F_2 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right)\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

事实上,可以直接验证(3.7)满足(3.6),(3.8)与(3.2)一致因而亦满足(3.6).

其次,可以通过待定泛函的方法得到类似(3.8)的结果. 考虑待定泛函

$$f = f^{(0)}(u, u_x) + f^{(1)}(u, u_x)u_{xx} \tag{3.9}$$

此时,(3.6)右端变为 $f_u^{(0)} + \left(f^{(1)}_{uu}u_x + f^{(1)}_{uu_x}u_{xx} - f^{(0)}_{uu_x}\right)u_x + \left(2f^{(1)}_u - f^{(0)}_{u_xu_x}\right)u_{xx}$ 若令

$$f_u^{(0)} = \frac{1}{2}u^2, f^{(1)}_{uu}u_x + f^{(1)}_{uu_x}u_{xx} - f^{(0)}_{uu_x} = 0, 2f^{(1)}u - f^{(0)}_{u_xu_x} = 1$$

可以有 $f(0)(u, u_x) = 16\ u^3$, $f^{(1)}(u, u_x) = \frac{1}{2}u$ 满足要求. 于是(3.1)有第一积分

$$F = \int_0^{2\pi} f\mathrm{d}x, \quad f = \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}uu_{xx} \tag{3.10}$$

又若令

$$f_u^{(0)} = \frac{1}{2}u^2 + u_x^2, f^{(1)}_{uu}u_x + f^{(1)}_{uu_x}u_{xx} - f^{(0)}_{uu_x} = -u_x, 2f^{(1)}_u - f^{(0)}_{u_xu_x} = 1$$

可以有 $f^{(0)}(u, u_x) = \frac{1}{6}u^3 + uu_x^2$, $f^{(1)}(u, u_x) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u$ 满足要求. 于是(3.1)有第一积分

$$F = \int_0^{2\pi} f\,\mathrm{d}x, f = \frac{1}{6}u^3 + uu_x^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right)u_{xx} \tag{3.11}$$

最后, 应当指出确定 KdV 方程(3.1)的第一积分的方法远不止上述所讨论的. 事实上,可以证明

$$F = \int_0^{2\pi} f\,\mathrm{d}x, f = \frac{5}{72}u^4 + \frac{5}{9}u^2u_{xx} + \frac{5}{18}uu_x^2 + \frac{1}{2}uu_{xxxx} \tag{3.12}$$

满足$\{F, H\} \doteq 0$, 因而同样是 KdV 方程(3.1)的第一积分.

4 结 论

我们将本文得到的结论综述如下:

1) 我们构造出了不同于(2.7)的新型 Poisson 括号,这种新型 Poisson 括号不仅容易验证 Poisson 括号所具有的三条性质,而且与 Poisson 括号(2.7)有着紧密联系.

2) 在新型 Poisson 括号下, KdV 方程的 Hamilton 形式的第一积分的全体构成无穷维 Lie 代数,并且任意两个第一积分总是相互内旋的.

3) 对 KdV 方程(3.1), 探讨了第一积分的确定方法.

值得注意的是,泛函微分方程(3.6)仅仅是确定泛函 $F \in S$ 成为 KdV 方程(3.1)第一积分的一个充分性方程, 其它确定第一积分的方法也是初步探讨性的. 如何确定所有的第一积分以及更一般的泛函微分方程是有待我们进一步探讨和研究的新课题.

参 考 文 献

1 Gardner C S. Korteweg-de Vries Equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries Equation as a Hamiltonian System. *J MathPhysics*, 1971, 11(8): 1548～1551

2 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社出版, 1991. 419～422 (Mei Fengxiang, Liu Duan, Luo Yong. Advanced Analytical Mechanics, Beijing: The Press of Beijing Institute of Technology, 1991. 419～422 (in Chinese))

3 Huang Mingyou. A Hamiltonian approximation to simulate solitary waves of the Korteweg-de Vries Equation. *Math of Computations*, 1991, 56(194): 607～620

INFINITE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA WITH A NEW POISSON BRACKET[1)]

Zhang Baoshan　Lu Dongqiang　Dai Shiqiang

(Shanghai Institute of Applied Math. & Mech., Shanghai University, Shanghai 200072, *China)*

Abstract For the Hamiltonian formulation of the Korteweg-de Vires equation (KdVequation), C. S. Gardner defined a Poisson bracket. In this paper a brand-new bracket is defined. It is easily verified that the new bracket possesses three properties of the Poisson bracket, bilinearity, skew symmetry, Jacobi identity. The new Poisson bracket has a close connection with C. S. Gardner's definition. In the framework of the new Poisson bracket, all the first integrals of the KdV equation constitute an infinite-dimensional Lie algebra. Then the necessary and sufficient conditions for identifying the first integrals are obtained. Finally, the method for finding first integrals of KdV equation is investigated.

Key words KdV equation, Hamilton formulation, first integral, Poisson bracket, infinite-dimensional Lie algebra

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 27 December 1996, revised 24 November 1997.