第 30 卷　第 2 期
1998 年 3 月
力　学　学　报
ACTA MECHANICA SINICA
Vol. 30 ,No. 2
Mar. , 1998

多点碰撞动力学的规范求解 [1)]

章定国

(南京理工大学应用力学系，南京 210094)

摘要　物体间的碰撞是工程技术中一个重要研究课题. 大多数的研究工作都是集中在多刚体系统碰撞动力学问题的研究. 在多刚体系统中，两个刚体之间是用一个铰连接的. 但是，还存在另一类型的碰撞系统，在这类碰撞系统中，相碰的物体间没有铰存在. 物体可能是自由的，也可能是被其周围环境约束的，但在物体之间没有铰的联系，这种碰撞问题称作为“分离式碰撞问题”，物体间的相互联系和相互作用仅仅在碰撞过程中存在. 本文对这类“分离式碰撞问题”进行了研究，并且给出了一组解决这类问题的通用公式. 这些公式可以方便地编程和计算，从而实现了多物体间的多点碰撞的动力学求解.

关键词　多点碰撞，碰撞动力学

引　言

物体间的碰撞是工程技术中一个重要研究课题，迄今已得到了一些研究. 文献 [1] 研究了多刚体系统碰撞的一般情形，利用 Newton-Euler 方法得到了一组冲量和速度增量相互耦合的撞击动力学方程；文献 [2] 引入碰撞铰概念描述开环和闭环多刚体系统中各刚体间任意碰撞的情况，导出了适用于计算机编程求解的碰撞动力学方程，该方程适用于开环和闭环系统. 然而，在多物体多点碰撞中，还存在着另一类有别于多体系统碰撞的碰撞现象，即所谓的“分离式”多点碰撞，参与碰撞的物体在碰撞前是无固定铰连接，彼此独立运动，只有在碰撞时才发生联系，而在碰撞结束后又各奔东西. 由于各个物体的运动是相互独立，因此，彼此的撞击点位置只能是实时判别求取，其撞击拓扑形式也有赖于干涉判别后才能确定，有关这方面的研究在迄今公开的文献中报道较少. 本文对“分离式”碰撞进行了研究，导得了这类碰撞中具有“分叉树状多点碰撞”这一最具一般形式的撞击动力学方程及其通解，并在软件上实现了干涉的判别 (即撞击点的位置、法方向的求取)、撞击拓扑形状的确定和动力学方程的求解.

1　任意多自由体分叉树状多点碰撞动力学方程

设任意形状、表面光滑的 N 个物体在同一时刻发生等时碰撞，其拓扑形状如图 1 所示. 设 v^c，V 和 ω 分别为碰撞前物体质心、碰撞点速度矢量阵和角速度矢量阵

$$\mathrm{v}^c = (\mathrm{v}_1^c,\ \mathrm{v}_2^c,\ \cdots,\mathrm{v}_N^c)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$\mathrm{V} = (\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2,\ \cdots,\mathrm{V}_N)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\omega}_N)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

而 $\Delta\mathrm{v}^c$，$\Delta\mathrm{V}$ 和 $\Delta\omega$ 分别是 v^c，V 和 ω 矢量阵所对应的碰撞增量矢量阵. 对于由第 k 碰撞点相关联的两个物体 $B_{l^+(k)}$ 和 $B_{l^-(k)}$，有如下方程

[1)] 国家自然科学基金和南京理工大学自然科学基金资助项目.

1995 - 12 - 26 收到第一稿，1997 - 07 - 02 收到修改稿.

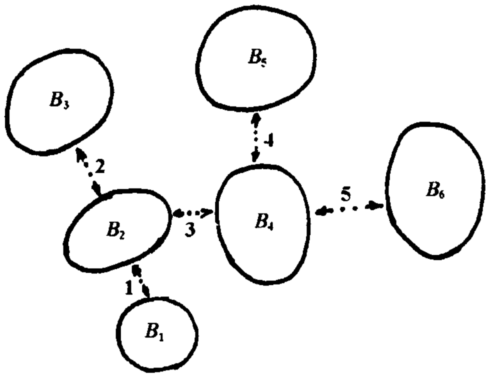

图 1　树形多点碰撞系统

Fig. 1　The tree-structured system of multi-pointed collision

$$\Delta \mathrm{v}_{l^+(k)} = \Delta \mathrm{v}^{c+}_{l^+(k)} + \Delta \boldsymbol{\omega}_{l^+(k)} \times \boldsymbol{\rho}^*_{l^+(k),k} \quad (k = 1,2,\cdots,S) \tag{4}$$

$$\Delta \mathrm{v}_{l^-(k)} = \Delta \mathrm{v}^{c-}_{l^-(k)} + \Delta \boldsymbol{\omega}_{l^-(k)} \times \boldsymbol{\rho}^*_{l^-(k),k} \quad (k = 1,2,\cdots,S) \tag{5}$$

其中的 S **为图 1 中碰撞点的数目，** $B_{l^+(k)}$ **和** $B_{l^-(k)}$ **分别称为第** k **碰撞点的碰撞内侧体和碰撞外侧体，**$\boldsymbol{\rho}^*_{lk}$**为刚体** B_l **的质心引往碰撞点** k **的矢量，且规定当** $l \neq l^+(k)$ **或** $l \neq l^-(k)$ **时，** $\boldsymbol{\rho}^*_{lk} = 0$.

由方程 (5) **减去方程** (4) **得**

$$\Delta \mathrm{v}_{l^-(k)} - \Delta \mathrm{v}_{l^+(k)} = (\Delta \mathrm{v}^{c-}_{l^-(k)} - \Delta \mathrm{v}^{c+}_{l^+(k)}) + (\Delta \boldsymbol{\omega}_{l^-(k)} \times \boldsymbol{\rho}^*_{l^-(k),k} - \Delta \boldsymbol{\omega}_{l^+(k)} \times \boldsymbol{\rho}^*_{l^+(k),k}) \quad (k = 1,2,\cdots,S) \tag{6}$$

令

$$\mathrm{u} = (\Delta \mathrm{v}_{l^-(1)} - \Delta \mathrm{v}_{l^+(1)}, \Delta \mathrm{v}_{l^-(2)} - \Delta \mathrm{v}_{l^+(2)}, \cdots, \Delta \mathrm{v}_{l^-(S)} - \Delta \mathrm{v}_{l^+(S)})^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

则方程组 (6) **写为**

$$\mathrm{u} = \mathrm{W}^{\mathrm{T}} \Delta \mathrm{v}^c + \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \times \Delta \boldsymbol{\omega} \tag{8}$$

其中的 W **称为碰撞关联矩阵**[2]，**是** $N \times S$ **阶矩阵，定义为**

$$W_{lk} = \begin{cases} -1, & \text{当 } l = l^+(k) \\ +1, & \text{当 } l = l^-(k) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Ma

定义碰撞法线矢量阵

$$\mathbf{n} = \mathrm{diag}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_s) \tag{12}$$

其中 $\mathbf{n}_k$ 是第 k 碰撞点的碰撞法方向, 以内侧体 $B_{l^+(k)}$ 的外法线为基准.
碰撞点冲量矢量列阵为

$$\mathbf{I}^* = \mathbf{n} I^* \tag{13}$$

物体 B_l ($l = 1, 2, \cdots, N$) 受到多点碰撞, 将各碰撞点的冲量向该物体的质心简化为冲量主矢 $\mathbf{I}_l$ 和冲量主矩 $\mathbf{T}_l$, 则系统的 $N \times 1$ 阶冲量列阵和冲量主矩列阵分别为

$$\mathbf{I} = W \mathbf{I}^*, \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\rho} \times I^* \tag{14}$$

由碰撞冲量定理和冲量矩定理得

$$M \Delta \mathbf{v}^c = \mathbf{I} \quad 或 \quad M \Delta \mathbf{v}^c = W \mathbf{n} I^* \tag{15}$$

$$M = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \cdots, m_N) \tag{16}$$

$$J \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \quad 或 \quad J \Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n} I^* \tag{17}$$

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_N) \tag{18}$$

其中的 m_l 和 J_l 分别为第 l 物体的质量和惯量阵.

假设在多点碰撞中牛顿碰撞定律仍然成立或近似成立, 则有如下碰撞恢复系数方程

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -(\boldsymbol{\sigma} + E)\, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DV} \tag{19}$$

其中

$$\overrightarrow{DV} = (\overrightarrow{DV}_1, \overrightarrow{DV}_2, \cdots, \overrightarrow{DV}_S)^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

$$\overrightarrow{DV}_k = \mathbf{V}_{l^-(k)} - \mathbf{V}_{l^+(k)} \tag{21}$$

$$E = \mathrm{diag}(e_1, e_2, \cdots, e_S) \tag{22}$$

其中 e_k 为第 k 碰撞点碰撞恢复系数, $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $S \times S$ 阶单位阵. 上述方程 (15), (17), (19) 即是所求的自由体分叉树状碰撞动力学方程.

下面求解这组碰撞动力学方程

由方程 (15) 和方程 (17) 得

$$\Delta \mathbf{v}^c = M^{-1} W \mathbf{n} I^* \tag{23}$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = J^{-1} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n} I^* \tag{24}$$

将方程 (23) 和 (24) 代入方程 (8) 得

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} I^* \tag{25}$$

其中

$$\mathbf{H} = W^{\mathrm{T}} M^{-1} W \mathbf{n} + \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} J^{-1} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n} \tag{26}$$

把方程（25）代入（19）得

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}I^{*} = -(\sigma + E)\,\mathbf{n}\cdot DV \tag{27}$$

因为方程（27）中只有 I^{*} 是未知量，所以由该方程即可求出 I^{*}. 在求得 I^{*} 后，把 I^{*} 代入（23）和（24）即可求出 $\Delta\mathbf{v}^{c}$ 和 $\Delta\omega$. 而碰撞后的质心速度和角速度即为 $\mathbf{v}^{c}+\Delta\mathbf{v}^{c}$ 和 $\omega+\Delta\omega$，这样就完成了碰撞动力学方程的求解.

2　任意多约束体分叉树状多点碰撞动力学方程

设任意形状的表面光滑的 N 个物体在发生如图 1 形式的多点碰撞时物体本身受有 $\mathbf{p}_{l}$ 方程的线位移约束和 $\mathbf{r}_{l}$ 方向的角位移约束，则受撞时产生 $\mathbf{p}_{l}$ 和 $\mathbf{r}_{l}$ 方向的约束冲量 $\mathbf{p}_{l}I_{l}^{c}$ 及约束冲量矩 $\mathbf{r}_{l}T_{l}^{c}$，其中 $l=1,2,\cdots,N$；I_{l}^{c} 和 T_{l}^{c} 为标量. 记约束冲量阵为

$$I^{c} = (I_{1}^{c},\ I_{2}^{c},\ \cdots,\ I_{N}^{c})^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

$$\mathbf{I}^{c} = (\mathbf{I}_{1}^{c},\ \mathbf{I}_{2}^{c},\ \cdots,\ \mathbf{I}_{N}^{c})^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

则 $\mathbf{I}^{c}=\mathbf{p}I^{c}$，其中

$$\mathbf{p} = \mathrm{diag}(\mathbf{p}_{1},\mathbf{p}_{2},\cdots,\mathbf{p}_{N}) \tag{30}$$

同理记约束冲量矩阵为

$$\mathbf{T}^{c} = \mathbf{r}T^{c},\qquad \mathbf{r} = \mathrm{diag}(\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},\cdots,\mathbf{r}_{N}) \tag{31}$$

$\mathbf{T}^{c}$ 和 T^{c} 是约束冲量矩矢量列阵和标量列阵.

仿上节得碰撞动力学方程为

$$M\Delta\mathbf{v}^{c} = \mathbf{I} + \mathbf{I}^{c} \tag{32}$$

$$J\Delta\omega = \mathbf{T} + \mathbf{T}^{c} \tag{33}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = -(\sigma + E)\,\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DV} \tag{34}$$

及其碰撞过程中的约束方程为

$$\mathbf{p}\cdot\Delta\mathbf{v}^{c} = 0 \tag{35}$$

$$\mathbf{r}\cdot\Delta\omega = 0 \tag{36}$$

将方程（32）两边同时左标乘 $\mathbf{p}$，并考虑式（35），得

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{I}^{c} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{I} \tag{37}$$

把（30）式代入（37）式得

$$I^{c} = \alpha I^{*} \tag{38}$$

其中

$$\alpha = -\mathbf{p}\cdot W\cdot\mathbf{n} \tag{39}$$

是 $N\times S$ 阶矩阵.

把 I^{c} 代回方程（32）得

$$M\Delta\mathbf{v}^{c} = (W\mathbf{n} + \mathbf{p}\alpha)\,I^{*} \tag{40}$$

同理可得

$$J\Delta\omega = (\rho \times n + r\beta) I^*$$ (41)

其中

$$\beta = - r \cdot (\rho \times n)$$ (42)

是 $N \times S$ 阶矩阵.

这样一来，就回到了上节的求解内容，容易求出 Δv^c，$\Delta\omega$，I^*，I^c 和 T^c，从而完成约束体多点碰撞动力学方程的求解.

碰撞动力学的仿真求解要配以干涉判别和非碰撞动力学模块方能进行，作者针对某航炮弹带动力学的全局仿真，在上述理论基础上开发了计算机数值和三维图形动画软件，鉴于文章篇幅有限，这里就不再叙述.

致谢 感谢李德昌教授对本文的指导.

参 考 文 献

1 Wittenburg J. Dynamics of system of rigid bodies. Teubner, 1977

2 梁敏，洪嘉振，刘延柱. 多刚体系统碰撞动力学方程及可解性判别准则. 应用力学学报，1991，8 (1) (Liang M, Hong JZ, Liu YZ. Impact dynamic equations of multi-rigidbody systems and criterion of solvability, *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1991, 8 (1) (in Chinese))

A STANDARD SOLUTION FOR THE DYNAMICS OF MULTI-POINT COLLISION[1)]

Zhang Dingguo

(*Department of Applied Mechanics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*)

Abstract The impact problem between bodies is an important research task in the domain of modern engineering. Most previous researching work has focused on the impact problem of multi-rigid body systems. In this kind of multi-rigid body systems, two rigid bodies are connected by a hinge. But there is another kind of impact systems. In this kind of impact systems, there is no hinge among the colliding bodies. All of bodies may be free or constrained by their surroundings but for the hinges among them. This collision problem is called "Scattered type collision problem". Just during the course of collision they are interrelated and inteact on each other. This paper studies the "Scattered type collision problem" and presents a set of universal equations which can be applied in it. These equations are convenient to code and calculate. Therefore, it realizes the solution to the multipoint collision dynamics problem.

Key words multi-point collision, collision dynamics

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and the NUST Natural Science Foundation.
Received 26 December 1995, revised 2 July 1997.