

海岸碎波拍的计算¹⁾

董国海

邹志利

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 研究了一维碎波拍的计算方法. 波浪控制方程由欧拉方程在短波周期上平均而得到. 为了考虑低频波浪在海岸上的破碎, 采用了 WAF (Weighted Average Flux) 方法求解长波方程. 对由辐射应力和海底摩擦力引起的方程非齐次项采用了时间算子分裂法进行了处理, 并对由此产生的误差进行了修正. 计算了单色波和双色波垂直入射海岸的情况, 并与实验结果进行了对比.

关键词 碎波拍, 破碎波浪, 低频波浪

引言

碎波拍 (surf beat) 是海岸处伴随入射波群而产生的低频波浪 (周期为 30 秒以上达几分钟), 大量研究表明其对海岸泥沙输运, 港口波浪和系泊船运动都有重要作用^[1]. 但关于其产生机理仍不完全清楚. 60 年代 Longuet - Higgins 和 Stewart 提出的“辐射应力”的概念^[2], 可用来解释波群中产生的非线性长波 Set - down. Set - down 在海岸处反射是碎波拍产生的一个重要原因. Symonds 等^[3]提出了碎波拍产生的另一机制, 即波浪破碎点在空间和时间上的周期性变化, 其作用类似于造波板造波, 从而产生低频波浪. Kostense^[4]的模型实验定性地证实了以上现象的存在. Roelvink^[1]求解以流量表达的一维低频波浪方程, 研究了碎波拍对海岸变形的作用. 通过坐标变换将计算域变换为固定域, 处理了海岸处动边界. 本文将用于求解短波方程的 WAF 方法^[5]用来求解一维长波方程. 对方程中与辐射应力和底摩擦力有关的非齐次项, 采用了时间算子分裂法进行处理, 并对由此产生的误差进行了修正. 该方法将破碎波处理为“激波”, 采用了 TVD 差分格式, 对自由表面的陡然变化 (波浪破碎) 有很强的分辨能力, 因而可以考虑低频波浪在海岸处的破碎现象. 计算对单色波和双色波进行, 并与实验结果进行了对比.

1 波浪方程

考虑波群垂直传向海岸的情况, 如图 1 所示. 假定沿海岸方向地形变化是均匀的, 这样方程沿水深平均后所研究的问题是一维的. 对欧拉方程沿水深和短波周期平均, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u dz} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{(u^2 + p) dz} - \overline{p_b \frac{d}{dx} h} + \overline{b} = 0 \quad (1)$$

式中, ρ , h 和 u 分别为流体密度、静水水深和流体速度, η 为自由表面升高. p , p_b 和 b 分别为压力、水底面上压力和海底摩擦力. “ $\overline{\quad}$ ”表示在短波周期上时平均. 将速度 u 分解为

¹⁾国家自然科学基金和国家教委留学回国人员基金资助项目.

1996 - 05 - 21 收到第一稿, 1997 - 06 - 23 收到修改稿.

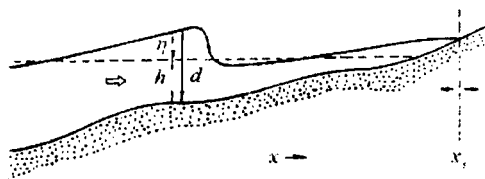


图 1 模型示意图

Fig. 1 Model sketch

低频波浪速度 U 和短波速度 u ，即 $u = U + u$ 。由流体流量为 $Q = \int_{-h}^{\eta} u dz$ 定义质量传输速度

$$V = Q/d = U + Q_w/d \tag{2}$$

其中， $Q_w = \int_{-h}^{\eta} u dz = E/c$ 为短波平均流量。而 E 和 c 分别为波浪能量和短波相速度。将以上表达式代入方程 (1) 及连续方程，得由短波相互作用产生的长波的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial t} d + \frac{\partial}{\partial x} (Vd) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (Vd) + \frac{\partial}{\partial x} \left(V^2 d + \frac{1}{2} g d^2 \right) = g d \frac{dh}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} \left(S_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_w^2}{d} \right) \tag{4}$$

式中， $d = \bar{\eta} + h$ ， $\bar{\eta}$ 为平均自由表面升高， g 为重力加速度， S_{xx} 为辐射应力

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2 + p) dz - \frac{1}{2} g d^2 = \left(2 \frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) E \tag{5}$$

c_g 为群速度。 S_{xx} 和 Q_w 的计算都需用到波能 E 的结果，为此引入波能演化方程

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(U + c_g) E] = - D_b \tag{6}$$

式中， D_b 表示由波浪破碎引起的波能耗散，通常由“水跃”能量耗散确定。本文采用 Roelvink 的方法^[1]计算

$$D_b = \left\{ 1 - \left[\frac{H}{d} \right]^n \right\} \frac{1}{2} f_p E \tag{7}$$

式中，取 $n = 1.0$ 和 $n = 10$ 。 f_p 为特征频率，对双色波取平均频率。 η 为波浪破碎指标，其取值依所研究的波浪形式不同（见后面计算结果）。 H 为波高 $H = \sqrt{8 E / g}$ ， D_b 在短波破碎前为零，波浪破碎点由关系式 $H = d$ 确定。

2 方程求解方法

由于低频波浪方程 (3) 和 (4) 是非齐次的，本文采用时间算子分裂法处理非齐次项，即首先求解以下齐次方程得到中间值 d^* 和 V^* 。

$$\frac{\partial d^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (V^* d^*) = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial t} (V^* d^*) + \frac{\partial}{\partial x} \left(V^{*2} d^* + \frac{1}{2} g d^* \right) = 0 \tag{8}$$

然后，以 d^* 和 V^* 为初值求解以下方程

$$d_t = 0 \quad \text{和} \quad V_t = S^* \tag{9}$$

式中

$$S^* = g \frac{dh}{dx} - \frac{1}{d} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_{xx}}{d} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_w}{d} \right) \right) \right] \tag{10}$$
 速度

将方程 (8) 和 (9) 写为向量式

$$\underline{U}_t + \underline{F}_x = 0 \tag{11}$$

\underline{U} 为守恒量， \underline{F} 为守恒量的通量，用 WAF 方法求解该方程，即将方程用以下有限差分格式表达

$$\underline{U}_i^{n+1} = \underline{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\underline{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \underline{F}_{i-1/2}^{n+1/2} \right) \tag{12}$$

通量 $\underline{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ 和 $\underline{F}_{i-1/2}^{n+1/2}$ 由黎曼初值问题求解，然后将其在单元长度上和半个时间步长处平均，并应用 TVD 迎风差分技术减小自由表面陡变处（破碎波或“激波”）伪数值振荡^[5]。应用以上时间算子分裂法后，原方程 (3) 和 (4) 的解为

$$d(x, (n+1) \Delta t) = d^*(x, (n+1) \Delta t) \tag{13}$$

$$V(x, (n+1) \Delta t) = V^*(x, (n+1) \Delta t) + S^* \Delta t \tag{14}$$

以上时间算子分裂法，虽计算简单，但一般会给解带来一定误差。下面我们从另一途径求解方程 (3) 和 (4)，来分析一下这一误差。在每一时间步长计算中，用如下变换将方程变换到加速度为 S^* 的坐标系中。

$$\left. \begin{aligned}
 &= x - \frac{1}{2} S^* t^2 \\
 &= t \\
 &W = V - S^* t \\
 \text{和} &= d
 \end{aligned} \right\} \text{散确}$$

将以上解的表达式与时间算子分裂法的解 (13) 和 (14) 对比可知, 同时间算子分裂法得到的解相当于原方程的解在 x 轴方向平移 $S^* t^2/2$ 后的结果, 其与原方程解的误差为二阶量 $O(t^2)$. 该误差可由以下方法得到修正. 由泰勒展开将 (19) 和 (20) 表达为

$$d(x, (n+1)t) = d^*(x, (n+1)t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d^*}{\partial x} S^* t^2 + O(t^4) \right] \quad (21)$$

$$V(x, (n+1)t) = V^*(x, (n+1)t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V^*}{\partial x} S^* t^2 + S^* t \right] + O(\Delta x) \quad (22)$$

由以上结果可知, 在时间算子分裂法的解中加以上两式右端第二项, 就可以克服应用时间算子分裂法所带来的误差, 即将解 (13) 和 (14) 改写为

$$d(x, (n+1)t) = d^*(x, (n+1)t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d^*}{\partial x} S^* t^2 \right] \quad (23)$$

$$V(x, (n+1)t) = V^*(x, (n+1)t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V^*}{\partial x} S^* t^2 + S^* t \right] \quad (24)$$

能量方程 (6) 的求解与波浪方程的求解同步耦合进行, 这可以考虑短波与低频波浪之间的非线性相互作用. 本文采用 Lax - Wendroff 二阶格式求解.

3 边界条件

对本文研究的一维问题, 计算域一端为海岸线动边界, 另一端为入射边界. 实际海岸线处水深为零, 海岸线移动速度与流体速度一致. 本文计算中将水深等于一小量 (如 $0.1 h_x$) 处定义为海岸线, 并在用 WAF 差分方法求解中应用 dry-bed 黎曼问题满足海岸线处动边界条件.

对入射边界需给出适当的边界条件以使得入射波传入计算域, 同时也使得反射波传出计算域. 为此, 将波动方程 (3) 和 (4) 写成特征线形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] R^+ = S \quad \text{和} \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] R^- = S \quad (25a)$$

式中

$$R^+ = V + 2c + gh_x t, \quad R^- = V - 2c + gh_x t \quad (25b)$$

$$S = S^* - gh_x, \quad c = \sqrt{gd} \quad (25c)$$

应用时间算子分裂法将方程 (25a) 的求解分解为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] R^{+*} = 0 \quad \text{和} \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] R^{-*} = 0 \quad (26)$$

以及

$$\frac{\partial R^+}{\partial t} = S \quad \text{和} \quad \frac{\partial R^-}{\partial t} = S \quad (27)$$

式 (25) 的左式表明黎曼不变量 R^{+*} 以速度 $V+c$ 沿 x 正向传播, 即由域外传入计算域内. 因而在入射边界上其值可以由入射波给出 (即施加入射边界条件), 而无需数值求解该式. 式 (31) 的右式表明黎曼不变量 R^{-*} 以速度 $V-c$ 沿 x 负向传播, 即由计算域内向计算域外传

播. 在入射边界上其值可由式 (26) 的右式的显式差分格给出 (即施加开路边界条件). 这样, 通过引入 (26) 式就可把入射边界上的波浪“传入”和“传出”分解开来, 单独进行处理. 由以上方法求出 R^+ 和 R^- 之后, 分别以 R^+ 和 R^- 为初值, 积分方程 (26), 可求得 R^+ 和 R^- . 由 R^+ 和 R^- 可进一步由 (25b) 求得入射边界上速度 V 和波面 d 的数值, 作为数值求解差分方程的边界值.

4 计算结果

为了验证本文模型, 计算结果与两组实验结果进行了对比. 对入射波为规则波情况, 计算与 Stive 的实验结果^[6]进行了对比. 实验中水槽底面由 40 m 长平底和 1/40 斜坡构成. 平底处水深为 0.7 m. 入射波波高和周期分别为 0.145 m 和 1.79 s. 图 2 给出了平均自由表面升高 $\bar{\zeta}$ 的计算结果和实验结果. 为了考察计算中波浪破碎点位置的选取对计算结果的影响, 破碎指标取了两个值: $\gamma = 0.88$ 和 0.75 . 由图可见, 当 $\gamma = 0.88$ 时, 除在靠近海岸线处, 计算结果和实验结果是吻合的; 当 $\gamma = 0.75$ 时, 与 $\gamma = 0.88$ 时相比, 在靠近海岸处与实验结果差别变小, 但在波浪破碎点与实验结果出现较大误差. 如所预料那样, 这时破碎点向离岸偏移. 由以上结果可见, 不论 γ 取何值, 在靠近海岸线处, $\bar{\zeta}$ 的数值都比实验大了很多, 其原因需做进一步分析. 注意到对规则波情况, 平均波面升高是静止的, 因而它不会受底摩擦的影响. 另一个重要原因就是计算中对辐射应力采用了线性理论在接近海岸线处, 非线性作用应是重要的. 为对此进行分析, 在接近海岸线处, 本文用 James^[7]的在波长很长时椭圆余弦波的渐近表达式和相应辐射应力取代原来模型中的正弦波辐射应力. 相应计算结果在图 3 中给出. 与图 2 中结果对比可见, 采用非线性理论修正后, 靠近海岸线处计算结果误差大大减小. 说明以上非线性理论的修正是有效的, 图 3 中 $\gamma = 0.88$ 和 0.75 时结果的差异与图 2 中类似, 但不如图 2 中明显.

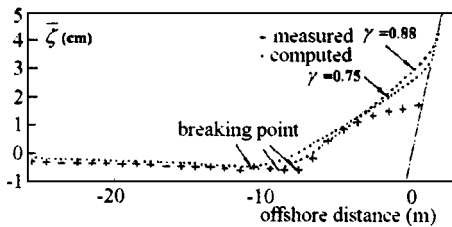


图 2 规则波平均自由表面升高 (线性波浪理论)

Fig. 2 Mean free surface elevation of regular waves (by linear wave theory)

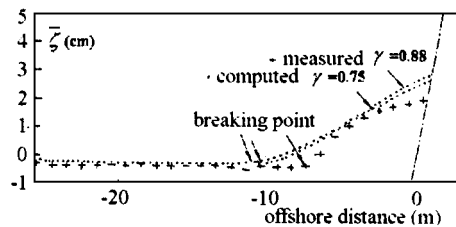


图 3 规则波平均自由表面升高 (非线性波浪理论)

Fig. 3 Mean free surface elevation of regular waves (by non - linear wave theory)

入射波为双色波时, 计算结果与 Kostense^[4]的实验结果进行对比. 实验模型由 0.5 m 水深平底和 1: 20 斜坡构成. 实验共分五组, 下面仅给出与其中典型三组 (见下表) 的对比.

	A_1 (m)	A_2/A_1	ω_1 (rad/ s)	ω_2 (rad/ s)
A	0.055	0.2	3.062 ~ 3.077	0.308 ~ 0.917
C	0.010 ~ 0.100	0.2	4.065 ~ 4.295	0.772
E	0.035	0.8	4.294 ~ 4.296	0.308 ~ 0.923

表中, A_1, A_2 分别为入射波群二组成波的振幅, ω_1, ω_2 为其频率, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ 则为长波的频率. 在 A 和 E 两组中, 振幅各自固定不变, 主要研究差频 ω 变化的影响; 而在 C 组中, 差频固定而研究波幅变化的影响. A 组和 C 组的波幅比值 A_2/A_1 为 0.2, 是弱调谐波群, 而 E

组波幅比为 0.8，是强调谐波群，实验结果见图 4 至图 6。图中左面为约束长波幅值变化曲线（传向海岸），右面则为反射自由长波幅值变化曲线（离开海岸）。如前面对规则波情况的计算一样，在对双色波波群进行计算时，仍需对计算模型中的破碎指标 β 和底摩擦力系数 f_w 进行标定，本文计算表明取 $\beta = 0.75$ 和 $f_w = 0.05$ 时，计算结果与实验结果吻合。这与文 [1] 中对 β 和 f_w 取值的选取是一致的。由图 4 至图 6 结果可知，本文模型的数值结果与实验结果是符合的，这证明了本文模型的合理性和有效性。计算中辐射应力的计算仍采用线性波浪理论。由前面规则波的结果可知，采用线性或非线性模型只对靠近海岸处平均自由表面升高有影响，而对远离海岸处波浪影响小。图中的双色波波群的约束波和自由波都是在斜坡以下的平底处测

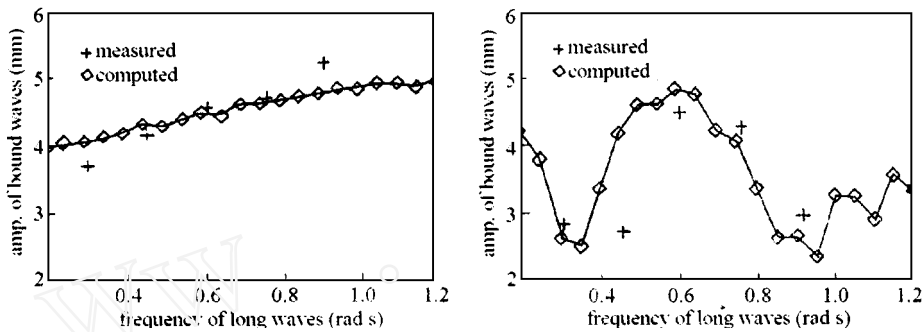


图 4 (A 组) 约束长波幅值和自由长波幅值随长波频率的变化

Fig. 4 Bound and free wave amplitudes for series A as a function of frequency of long waves

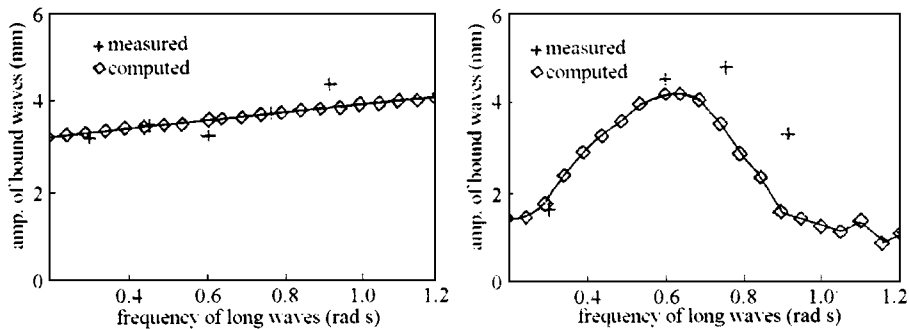


图 5 (C 组) 约束长波幅值和自由长波幅值随入射波幅值的变化

Fig. 5 Bound and free wave amplitudes for series C as a function of primary wave amplitude

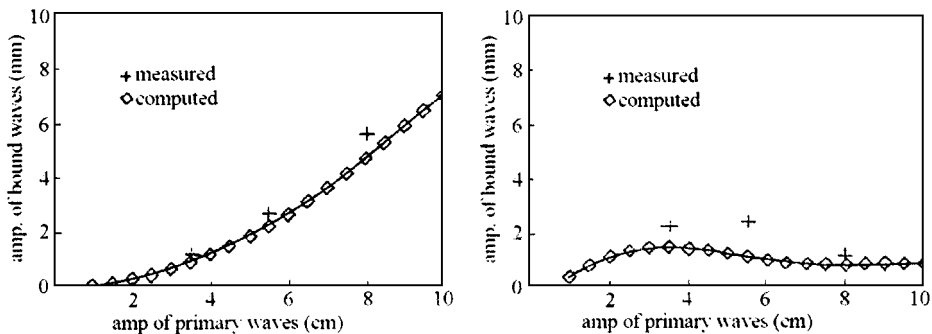


图 6 (E 组) 约束长波幅值和自由长波幅值随长波频率的变化

Fig. 6 Bound and free wave amplitudes for series E as a function of frequency of long waves

定的结果，所以，采用线性波模型仍能得到合理结果是可以理解的。图中结果表明：约束长波随波速二次方而变化，这与理论结果是一致的。对比 A 组和 E 组实验的结果可知，强调谐波（E 组）的约束长波和自由长波都比弱调谐波（A 组）的幅值要大。观察 A 组和 E 组实验中自由长波实验和计算结果可见，其在差频为 0.6 rad/s 时都出现了峰值。对自由长波随差频或入射波波幅的变化规律作进一步分析是困难的，因自由长波的计算结果包含了入射长波在海岸处的反射，波浪破碎点的运动和海岸处波浪爬高等诸因素的综合非线性作用，本文计算模型难以对其中一种因素的影响进行单独分析。

4 结 论

本文分析和计算表明：WAF 方法和时间算子分裂法相结合求解一维长波方程可以有效处理波浪破碎，海岸处动边界和入射边界。时间算子分裂法所产生的误差是二阶的，其可由本文给出的方法进行修正。数值计算表明用非线性波浪模型计算辐射应力有助于改善海岸处增水的计算结果。计算结果和实验结果的比较表明本文模型可给出合理的海岸破波拍计算结果。

致谢 本文工作得到了英国水力研究公司（Hydraulics Research Wallingford）的 Dr. Nick Dodd 和大连理工大学土木工程系李玉成教授的指导和帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

- 1 Roelvink JA. Surf beat and its effect on cross - shore profiles. Ph. D. Thesis, Delft Hydraulics. 1993
- 2 Longuet - Higgins MS, Stewart RT. Radiation stress in water waves: a physical discussion, with applications. Deep Sea Res., 1964. 11: 529 ~ 562
- 3 Symonds G, Huntley DA, Bowen AJ. Two - dimensional surf beat: long wave generation by a time - Varying breakpoint, J. Geophys. Res., 1982, 87 (VI): 492 ~ 498
- 4 Kostense JK. Measurements of surf beat and set - down beneath wave groups. Proc. 19th Int. Conf. on Coastal Eng., Proc. 19th ICCE, ASCE, New York. 1984. 724 ~ 740
- 5 Watson G, Peregrine DH, Toro EF. Numerical solution of the shallow water equations on a beach using the weighted average flux method. Computational Fluid Dynamics '92. Ch. Hirsch et al (eds.), Elsevier, 1992. 495 ~ 502
- 6 Stive MJE. Two - dimensional breaking of waves on a beach. Delft Hydraulics Report, M1585, Part 1. 1983
- 7 James ID. Non - linear waves in the nearshore region: shoaling and set - up. Estuarial Coastal Mar. Sci., 1974. 2: 207 ~ 234

A NONLINEAR MODEL OF SURF BEAT¹⁾

Dong Guohai Zou Zhili

(*The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

Abstract A nonlinear, short-wave-averaged model of surf beat, which describes essentially long-period motions associated with the mean free surface, is presented. The numerical techniques used in the solution are based on so-called Weighted-Average Flux (WAF) method, with Time-Operator-Splitting (TOS) used for the treatment of the source terms. This method allows a small number of computational points to be used, and is particularly efficient in modelling breaking long waves. The short wave (or primary-wave) energy equation is solved using a more traditional Lax-Wendroff technique.

Although Linear Wave Theory has been used to describe the transformation of short waves in many areas, it seems desirable to make use of a nonlinear theory at least when waves get closer to the shore where nonlinear effects will become important. However, due to the simplicity of the linear theory, a "simplified" nonlinear theory which would combine the advantages of both appears to be most desirable. And the hyperbolic theory of James (1974) is useful in this regard.

A set of validity tests is undertaken in this paper, which is based on the monochromatic wave flume data conducted by Stive (1983) (in which the wave flume is of about 55 m total length, with a beach slope at one end of 1:40) and the bichromatic wave flume data compiled by Kostense (1984) (in which a wave flume was 55 m long, with a 1:20 slope at one end on which to absorb the short waves).

The model described in this paper is found to be satisfactory in most respects when compared with the measurements except in modelling the mean free surface very close to the mean shoreline.

Key words short-wave-averaged model, surfbeat, Weighted-Average Flux method

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China and by The Fund of the State Education Commission of China for Oversea Returnees.