关于颗粒悬浮机理和悬浮功的讨论 1),2)

刘大有
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要 从分析气体分子的悬浮和静水中 Brown 微粒的悬浮之机理出发，论述了重力场中粒子 (分子、微粒等) 的悬浮不一定需要其它外力，粒子本身的任何形式的无规则运动，达到一定强度后都能使粒子弥散悬浮. 河流中的泥沙颗粒和气 (水) 力输送管道中的颗粒的悬浮也主要靠颗粒物的无规则运动. 作用于颗粒的升力和其它力可改变颗粒悬浮沿高度的分布，但仅用这些力 (若无任何无规则运动) 无法解释颗粒的弥散悬浮状态. 讨论了颗粒对流动阻力的双重作用：支持颗粒悬浮的湍流脉动因引入颗粒而削弱，这是颗粒的减阻作用；颗粒增阻的一个主要机制是，流体给予颗粒的水平动量在颗粒 - 壁面碰撞中不断地损失. 用悬浮功概念解释颗粒引起的增阻是不正确的.

关键词 悬浮机理，悬浮力，气力输送，水力输送，泥沙运动，风沙运动

引 言

用管道输送颗粒物料可采用气体携带 —— 气力输送，也可用液体携带 —— 水力输送，两者基本原理类似.

与管道输送物料类似的自然现象是戈壁沙漠中的风沙运动和河流中的泥沙运动，在那里，沙粒在气流和水流的携带下从一地迁移到另一地.

颗粒在水平管道中是靠什么力量支撑，使其在重力场中维持悬浮，许多人对它进行过研究，在很多关于气 (水) 力输送和泥沙运动力学的教科书和专著中都有论述，主要观点有 [1]:

1) 气 (水) 流湍流脉动的垂向分速对颗粒产生的作用力，形成悬浮力以平衡重力 (严格地说是重力与浮力之差 —— 水下重力，下同);

2) 由于管底 (或河床) 附近的气 (水) 流水平速度有垂向梯度，流经颗粒时颗粒上部流速大于下部流速，因此颗粒上部压强小于下部压强，颗粒受到向上的作用力 (很多人引用 Bernoulli 方程来解释这一点，这不完全正确，因为 Bernoull 方程仅适用于无粘流. 这里可用 Saffman 力解释之，详见 [2]);

3) 对于旋转的颗粒，受到流体一个与相对运动方向垂直的作用力 ——Magnus 力;

4) 对于不对称的颗粒，有可能受到一个像作用于飞机机翼上的升力;

5) 由于颗粒间相互碰撞或与管壁碰撞而获得的反弹力，此力在垂直方向的分力形成了悬浮力.

很多作者提出了悬浮功的概念，还给出了单位体积的悬浮功 (率) 的计算式，如 [3,4]: $E = (\rho_p - \rho_f) g\omega\alpha(1-\alpha)$. 据认为，挟带颗粒的流体除需克服各种流动阻力作功外，还需付出额外的功率以支持颗粒悬浮.

1998-08-26 收到第一稿， 1999-05-19 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金 (19672065) 及 “煤的清洁燃烧技术国家重点实验室” 资助项目.
2) 谨以本文纪念林同骥院士 80 寿辰.

本文将用力学观点详细论述颗粒在气 (水) 流中悬浮机理，讨论是什么力起的支撑作用，指出“悬浮功”的概念是含糊不清的，“悬浮功”与轴向 (流向) 压降没有直接联系；最后讨论气 (水) 流中加入颗粒后阻力是增加还是减少，何为引起阻力增减的机理等.

1 气体分子悬浮的力学分析

在静止的大气中，在高度 $z=z_0$ 处取一单位底面积、高为 Δz 的柱体，分析该柱体中的气体的力平衡方程，得到

$$\rho g\Delta z = p(z_0) - p(z_0+\Delta z) = -\Delta z\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z\approx z_0} \tag{1}$$

其中 p 和 ρ 为气体的压强和密度，g 为重力加速度. 上式表示柱体内气体的重力是靠作用于柱体上、下端面上的压力差平衡的. 将

$$p = knT, \quad \rho = mn \tag{2}$$

代入式 (1), 假设温度 T 是常数，就得到如下的、关于分子数密度 n 的 Boltzmann 分布

$$n = n_0\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \tag{3}$$

其中，$n_0 = n|_{z=0}$, m 是分子质量，k 是 Boltzmann 常数.

为了下面进一步讨论的需要，考察一下气体压强 p 的微观意义.

压强 p 起因于分子的无规则运动 —— 热运动. 由于分子的热运动，每时每刻都有许多分子从下面通过端面 $z=z_0$ 进入柱体，同时将它们具有的 (z 向) 正动量带入柱体，另一方面又有许多分子从柱体经端面 $z=z_0$ 飞出，同时将它们所具有的负动量带出柱体，也使柱体获得正动量. 对每一个通过端面 $z=z_0$ 的分子所输运的动量进行统计，结果得到外界通过单位面积端面 $z=z_0$ 给予柱体的动量传递率 (即压强) 为 [5]

$$p(z_0) = \left(mn\overline{C_z^2}\right)_{z=z_0} \tag{4}$$

其中 C_z 是分子热速度的 z 向分量，$\overline{C_z^2}$ 是 C_z^2 的统计平均值. 同理可求得外界经上端面 $z=z_0+\Delta z$ 给予柱体的负动量传递率为

$$p(z_0+\Delta z) = \left(mn\overline{C_z^2}\right)_{z=z_0+\Delta z} \tag{5}$$

这说明在微观意义上，压强是分子热运动的一种表现形式，柱体中分子重力可依靠分子本身的热运动所输运的动量得以平衡，不需要额外的悬浮力.

对于紧邻固壁的微元柱体 ($z_0=0$), 作用于其下端面的是壁面压强. 经该端面从柱体飞出的分子马上与固壁相碰撞，从柱体带出的 (z 向) 负动量马上就传递给固壁；从固壁反弹出来的分子带着从固壁获得的 (z 向) 正动量进入柱体，壁面压强就是由这些动量交换构成的. 所以，分子的悬浮归根结蒂是靠下面固壁支撑的，固壁施加的压力与整个气柱 (延伸到无限高) 中分子的总重力平衡，而固壁的压力又是靠固壁附近分子的无规则运动实现的.

将式 (4) 和 (5) 代入式 (1), 则得到

$$nm\overline{C_z^2} = \left(nm\overline{C_z^2}\right)_0\exp\left[-\int_0^z\frac{g}{\overline{C_z^2}}\mathrm{d}z\right] \tag{6}$$

当 $\overline{C_z^2}$ 为常数 (这等价于 "温度 T 是常数") 时则有

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{gz}{\overline{C_z^2}}\right) \tag{7}$$

对于气体，由于 $\overline{C_z^2} \approx \overline{C_y^2} \approx \overline{C_x^2} \approx \frac{1}{3}\overline{C^2} = \frac{kT}{m}$, 代入式 (7) 就得到与式 (3) 一致的结果，所以，就更本质地反映事物的角度而言，式 (6) 和 (7) 比式 (3) 更基本、更一般.

综上所述，分子悬浮完全依靠分子无规则运动，悬浮状态完全取决于无规则运动的强度分布；某处的分子运动越强烈 (越微弱), 则当地的分子数密度的负梯度越小 (越大); 整个气柱的重力依靠紧靠下面固壁的各分子的无规则运动支持.

2 静水中作 Brown 运动的微粒的悬浮机理分析

设一盛水的大罐中散布着密度为 ρ_p 、粒径为 d_p 、质量为 m_p 的许多微粒， n_p 为微粒的数密度， ρ_f 为水体的密度. 不论初始状态如何，久置后，在宏观上微粒群和水体都已静下来，水体和微粒已达到热平衡，数密度 n_p 的垂向分布也趋于稳定，呈 Boltzmann 分布.

虽然在宏观上看微粒群的运动已消失，但从细观上看，每个微粒都有较强的无规则运动 —— Brown 运动. 在本质上，这种无规则运动属于热运动. 此外，在重力场中，每个微粒还有一不变的向下运动速度 —— 重力沉降速度 ω, 微粒的实际运动是重力沉降运动与 Brown 运动的组合.

下面先从宏观上分析微粒群和水体的力平衡方程. 微粒群和水体沿铅垂方向 (z 向) 的运动方程分别为 [6]

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \alpha_p \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_p \rho_p g + F_{p,z} = 0 \tag{8}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha_p \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_f \rho_f g - F_{p,z} = 0 \tag{9}$$

其中 α_p 和 α_f 分别为微粒群和水体在混合物中所占的体积分数， $\alpha_p + \alpha_f = 1$, p 是流体静压强， P 是由 Brown 运动引起的微粒相分压， $\pm F_{p,z}$ 为水体作用于微粒群上的阻力及其反作用力， $\pm\left(-\alpha_p \frac{\partial p}{\partial z}\right)$ 是作用于微粒群上的浮力及其反作用力， $(-\alpha_p \rho_p g)$ 和 $(-\alpha_f \rho_f g)$ 分别为作用于微粒群和水体上的重力. 根据定义有

$$1 - \alpha_f = \alpha_p = \frac{n_p m_p}{\rho_p} = \frac{1}{6}\pi d_p^3 n_p \tag{10}$$

$$P = n_p m_p \overline{w_p'^2} = n_p kT \tag{11}$$

其中 $\overline{w_p'^2}$ 是微粒 Brown 运动 z 向分速度 w_p' 的平方平均.

相间阻力依赖于两相之间的相对运动，在本例中，由于微粒群和水体的宏观运动速度均为零，所以有 1)

$$F_{p,z} = 0 \tag{12}$$

1) 在细观 (微粒尺度) 上，每个微粒除受到重力和浮力外，还受到流体的阻力. 在重力场中，当微粒分布达到稳定时，由于下面微粒的浓度比上面高，所以，在一微元中作向上 Brown 运动的微粒比作向下运动的微粒多，结果受到一个向下的净阻力，而微粒的重力沉降分运动则受到一个向上的阻力，这两部分阻力在稳定状态下正好抵消.

将式 (10)~(12) 代入式 (8) 和 (9), 得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln(n_p\overline{w_p'^2}) = -\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\frac{g}{\overline{w_p'^2}} \tag{13}$$

$$\frac{n_p\overline{w_p'^2}}{(n_p\overline{w_p'^2})_{z=0}} = \exp\left[-\int_0^z\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\frac{g\mathrm{d}z}{\overline{w_p'^2}}\right] \tag{14}$$

如果 Brown 运动的强度 (如 $\overline{w_p'^2}$) 沿高度均匀分布, 则式 (14) 简化为 1)

$$\frac{n_p}{n_{p,0}} = \exp\left[-\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\frac{gz}{\overline{w_p'^2}}\right] \tag{14$'$}$$

其中, $n_{p,0}=n_p|_{z=0}$, 式 (14)$'$ 就是微粒浓度沿高度的 Boltzmann 分布律.

由式 (8) 和 (12) 可见, 在宏观上, 微粒群的水下重力是靠微粒相的分压差平衡的.

下面讨论一个具有单位底面积、高为 Δz 的柱体中, $n_p\Delta z$ 个微粒的水下重力 (在细观上) 是靠什么维持平衡的.

与上一节的讨论类似, 由于微粒的无规则运动, 使控制体内的微粒不断地通过下端面与外界发生质量和动量的交换, 使控制体净得的 z 向动量为 $P(z_0)=\left(n_pm_p\overline{w_p'^2}\right)_{z=z_0}$, 同理可得从上端面输出的 z 向动量为 $P(z_0+\Delta z)=\left(n_pm_p\overline{w_p'^2}\right)_{z=z_0+\Delta z}$ (与式 (4) 和 (5) 很相似). 这样, 控制体内微粒群的动量平衡关系为

$$n_pm_pg\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\Delta z = \left(n_pm_p\overline{w_p'^2}\right)_z - \left(n_pm_p\overline{w_p'^2}\right)_{z+\Delta z} \approx -\Delta z\frac{\partial}{\partial z}\left(n_pm_p\overline{w_p'^2}\right)$$

由此同样可推导出式 (13) 和 (14). 因此, 细观分析表明, $n_p\Delta z$ 个微粒的水下重力可以依靠微粒本身的 Brown 运动输运的动量得到平衡, 无需引入任何额外的悬浮力.

以上两例表明, 粒子 (气体分子或微粒) 悬浮完全是靠粒子本身的无规则运动维持的, 只要有无规则运动存在, 粒子就能维持悬浮状态. 如果无规则运动有某种耗散机制, 则为维持原有的悬浮状态只要以某种方法补充微粒的无规则运动的能量即可; 如能量补充不足, 则随着无规则运动的减弱, 粒子的数密度梯度 (绝对值, 下同) 就会增加; 当无规则运动完全消失时, 数密度梯度变为负无穷大, 即完全不能悬浮. 除需补充被耗散的无规则运动能量以外, 不需要任何形式的悬浮功. 在以上两例中的无规则运动都属于热运动, 因此, 无耗散机制.

无规则运动的形式有多种, 如分子热运动, 微粒的 Brown 运动和湍流脉动等, 它们之间在产生与耗散的机理方面, 以及其它性质方面, 可能有很大差异, 但在使粒子克服重力悬浮这一点却是相同的.

此外, 如果只是流场中的粒子有一定强度的无规则运动, 而在邻近固壁的下边界, 粒子没有无规则运动, 那么粒子也不能维持稳定的悬浮. 事实上, 无规则运动引起的粒子的分压强, 必定是从下边界起沿高度一直递减 (这是克服粒子重力的代价).

如果下边界处的粒子的无规则运动强度, 因某种原因从 $t=t_0$ 时起突然下降 (例如, 当作为下边界的固壁的温度突然下降, 紧邻它的气体分子的无规则运动的强度必定马上下降), 则该

1) 采用 "向下的重力沉降的微粒通量等于向上扩散的微粒通量" 的观点, 也能得到与式 (14)$'$ 相同的结果, 因为 $\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\frac{g}{\overline{w_p'^2}}=\frac{\omega}{D}$, 其中 D 和 ω 分别为微粒的扩散系数和重力沉降速度.

处附近的粒子数密度的局部梯度 (绝对值) 就会马上增加，数密度分布就会重新调整，调整过程由下向上逐渐扩展. 如果下边界上粒子的无规则运动变为 0, 并能一直保持，则重新调整数密度分布的结果必定是：在全流场，分子的数密度 $n=0$ 或微粒的数密度 $n_p=0$, 粒子全部沉积在下边界上.

所以，粒子稳定悬浮状态的存在表明：包括下边界在内，粒子一定有某种无规则运动存在.

本文的主要目的是讨论颗粒的悬浮机理，以上关于分子和 Brown 微粒的讨论，都是为下面研究颗粒悬浮作准备.

3 颗粒物悬浮的机理

下面讨论河流中的泥沙颗粒和气 (水) 力输送管道中的颗粒的悬浮机理.

为简明起见，我们以一最简单的流动，即：定常 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}=0\right)$ 、二维 $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}=0\right)$ 、充分发展 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}=0\right)$ 的流动为例，论述颗粒悬浮问题；此外，本文还假设颗粒群的体积分数 α_p 远小于 1, 即稀悬浮体流动. 事实上，本文讨论的悬浮机理同样存在于更一般的流动中.

这类颗粒一般都不太小，它们的 Brown 运动速度几乎可忽略不计. 一般认为，管道中颗粒的悬浮靠的是湍流脉动. 由于流体湍流的带动，颗粒也会产生一定强度的脉动；若 $\rho_p>\rho_f$(下标 f 指气相或液相), 则颗粒的湍流脉动一般说将小于流体的.

在上一节已论述了，只要有某种形式的无规则运动存在，颗粒就能悬浮，不论它是何种类的无规则运动；脉动越强，颗粒的数密度梯度 (绝对值) 越小.

但是管道中颗粒的悬浮机理比气体分子和 Brown 微粒更复杂：(1) 除了重力和浮力外，水平管道中的颗粒还可能受到其它的升力作用，在下面讨论中设 a 为这些升力的合力产生的加速度，合力为 m_pa; (2) 颗粒脉动的强度沿垂向不一定是常数. 对于这种更一般的情况，类似于式 (8) 和 (9), 在定常、充分发展状态下，固相的和混合物的力平衡方程分别为 [6]

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W_p'^2}\right)-\alpha_p\frac{\partial p}{\partial z}-\alpha_p\rho_p g+\alpha_p\rho_p a+F_{p,z}=0 \tag{15}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\alpha_p\rho_p g+\alpha_f\rho_f g+\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W_p'^2}\right)\approx\rho_f g \tag{16}$$

其中 $\overline{W_p'^2}$ 是颗粒无规则运动 z 向分速度的平方平均，包括 Brown 运动、湍流脉动和其它各种形式的无规则运动. 式 (16) 的最后一个近似式适用于 $\alpha_p\ll 1$ 、并且 $\alpha_p|\rho_p/\rho_f-1|\ll 1$ 的情况. 如果 $F_{p,z}=0$(暂时作此假设，下面将进一步讨论), 则由以上两式可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln\overline{n}_p+\frac{\partial}{\partial z}\ln\overline{W_p'^2}\approx-\left(\overline{W_p'^2}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)g-a\right] \tag{17}$$

$$\frac{\left(\overline{n}_p\overline{W_p'^2}\right)_z}{\left(\overline{n}_p\overline{W_p'^2}\right)_{z_0}}\approx\exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{\left[\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\right)g-a\right]}{\overline{W_p'^2}}\mathrm{d}z\right\} \tag{18}$$

对于湍流二相流，即使在宏观上两相没有相对运动，相间阻力 $F_{p,z}$ 也不一定为 0, 解释如下 1)：在浓度不均匀的湍流流场中，旋涡运动把高浓度带的混合介质带到低浓度带，把低浓度带的混合介质带到高浓度带，通过这种方式，固相质量沿着浓度梯度的反方向迅速迁移；在这过程中，虽然旋涡运动很快，但是，由于颗粒与其周围流体处于同一旋涡中，它们之间的相对运动速度并不大，因此，颗粒以这种方式扩散时，受到的来自流体的阻力较小．假如流场中没有湍流脉动，而有某种非湍流型的脉动 (与湍流脉动不同，它们都没有拟序结构)，这时，固相质量也会从高浓度带向低浓度带迁移，但是，这种迁移受到的阻力要比上述通过旋涡运动方式迁移时受到的阻力大得多，因为在非湍流型扩散中，各颗粒的迁移是各自独立进行的，各颗粒之间、颗粒与周围流体之间，在运动上几乎没有什么关联．因此，固相质量相对于流体迁移时会受到较大的 (流体) 阻力．所以，在湍流中，对于一定的相间质量迁移率，即给定两相的质量速度差 $(\hat{w}_f - \hat{w}_p)$ 以后，相间阻力并不确定，还要看这些质量迁移中，非湍流方式和湍流方式各占多少分额．同理，宏观上没有相对运动 (即 $\hat{w}_f - \hat{w}_p = 0$), 不说明 $F_{p,z}$ 一定为 0.

因此，在湍流二相流中，流体对颗粒群的阻力应按湍流的和非湍流的分开处理

$$F_{p,z} = F_{p,z}^{\mathrm{T}} + F_{p,z}^{\mathrm{L}} \tag{19}$$

$$F_{p,z}^{\mathrm{T}} = C\frac{W_f^{\mathrm{T}} - W_p^{\mathrm{T}}}{\beta\tau^{\mathrm{T}}}, \qquad F_{p,z}^{\mathrm{L}} = C\frac{\overline{w}_f - \overline{w}_p}{\tau^{\mathrm{L}}} \tag{20}$$

其中， $C = \dfrac{\alpha_f\rho_f\alpha_p\rho_p}{\alpha_f\rho_f + \alpha_p\rho_p}$. 目前，关于湍流阻力 $F_{p,z}^{\mathrm{T}}$ 的知识还很少，这种不确定性都反映在式 (20) 的函数 β 中．一般说， β 是关于 τ^{T}(湍流运动的特征时间) 、 τ^{L} (粗略地说，是颗粒弛豫时间) 、 W_f^{T} 和 W_p^{T} 的复杂函数，作为定性的讨论，下面假设 β 是常数．当速度差较小时，可假设非湍流部分的阻力 $F_{p,z}^{\mathrm{L}}$ 正比于时均速度差 $(\overline{w}_f - \overline{w}_p)$.

颗粒群 (或流体) 的质量加权的 z 向平均速度 (也就是该相的宏观的质量迁移速度) $\hat{w}_p$(或 $\hat{w}_f$) 等于颗粒群 (或流体) 的 z 向时平均速度 $\overline{w}_p$(或 $\overline{w}_f$) 和湍流扩散速度 W_p^{T}(或 W_f^{T}) 之和

$$\hat{w}_p = \overline{w}_p + W_p^{\mathrm{T}}, \qquad \hat{w}_f = \overline{w}_f + W_f^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

如果把颗粒的脉动速度 W_p' 表示为颗粒湍流脉动速度 $W_{T,p}'$ 与非湍流的脉动速度 $W_{L,p}'$ 之和，又假设两类脉动速度之间基本上没有关联 ($\overline{W_{T,p}'W_{L,p}'} \approx 0$)，那么，

$$W_p' = W_{T,p}' + W_{L,p}', \qquad \overline{W_p'^2} \approx \overline{W_{T,p}'^2} + \overline{W_{L,p}'^2} \tag{22}$$

湍流扩散速度 W_p^{T} 与湍流脉动速度 $W_{T,p}'$ 的关系为

$$W_p^{\mathrm{T}} = \overline{n_p W_{T,p}'} \ / \ \overline{n}_p \tag{23}$$

如果 $\beta\tau^{\mathrm{T}} = \tau^{\mathrm{L}}$, 那么由式 (19), (20) 和 (21) 可得

$$F_{p,z} = C\frac{(W_f^{\mathrm{T}} + \overline{w}_f) - (W_p^{\mathrm{T}} + \overline{w}_p)}{\tau^{\mathrm{L}}} = C\frac{\hat{w}_f - \hat{w}_p}{\tau^{\mathrm{L}}} \tag{24}$$

1) 请注意区分湍流中的扩散 (或湍流流场中的扩散) 与湍流扩散 (又称涡扩散) 两个概念之间的差异．在湍流流场中，除湍流脉动以外，还可能有非湍流型脉动 (如：分子热运动，微粒的 Brown 运动，以及由颗粒 - 颗粒碰撞和颗粒 - 壁面碰撞引起的无规则运动等，风沙流中的沙粒跃移运动就属于颗粒 - 壁面 (床面) 碰撞引起的无规则运动)，湍流扩散是由湍流脉动引起的，非湍流扩散是由非湍流脉动引起的，湍流中的扩散是这两种扩散的总和.

相间阻力 $F_{p,z}$ 又正比于两相的质量速度之差了，式 (18) 就是利用上式 (24) 导出的．下面的例子将说明，在湍流中将阻力按式 (19) 那样分解是必要的，而且 $\beta\tau^{\mathrm{T}} \neq \tau^{\mathrm{L}}$; 如果采用式 (24), 那么不论 τ^{L} 和 C 为何值、也不论 C 是 $(\hat{w}_f - \hat{w}_p)$ 的什么函数，都会导出与已知实事相矛盾的结果．

设河流中有直径分别为 $d_1 = 0.1\,\mathrm{mm}$ 和 $d_2 = 0.2\,\mathrm{mm}$ 的两种泥沙颗粒，它们基本上都有很好的跟随水流脉动的特性，也就是说，在同一水流中，这两种颗粒的湍流脉动速度 $(\overline{W'^2_{T,p}})_1$ 和 $(\overline{W'^2_{T,p}})_2$ 几乎相等，几乎都等于水流的湍流脉动速度 $\overline{W'^2_{T,f}}$. 按照式 (18), 这两种颗粒的相对浓度分布 $\dfrac{(\overline{n}_p)_z}{(\overline{n}_p)_{z_0}}$ 将几乎相同．但实际上，$d = d_2$ 的较粗颗粒的浓度随高度的衰减，远大于较细的颗粒 1)．

如果 $\beta\tau^{\mathrm{T}} \neq \tau^{\mathrm{L}}$, 那么利用式 (20), (21) 和 (19) 可得到 (由于 $\hat{w}_f - \hat{w}_p = 0$)

$$F^{\mathrm{L}}_{p,z} = -C\frac{W^{\mathrm{T}}_f - W^{\mathrm{T}}_p}{\tau^{\mathrm{L}}} = -\frac{\beta\tau^{\mathrm{T}}}{\tau^{\mathrm{L}}}F^{\mathrm{T}}_{p,z}, \quad F_{p,z} = \left(\frac{\tau^{\mathrm{L}}}{\beta\tau^{\mathrm{T}}} - 1\right)C\frac{W^{\mathrm{T}}_f - W^{\mathrm{T}}_p}{\tau^{\mathrm{L}}} \tag{25}$$

与相间阻力的分解相应，动量方程也要按湍流的和非湍流的来分解．湍流阻力部分与固相的湍流分压梯度平衡，非湍流阻力则与其它非湍流性的外力平衡 2)，因此，式 (15) 可改写为

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W'^2_{T,p}}\right) + F^{\mathrm{T}}_{p,z} = 0 \tag{26}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W'^2_{L,p}}\right) - \alpha_p\frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_p\rho_p g + \alpha_p\rho_p a + F^{\mathrm{L}}_{p,z} = 0 \tag{27}$$

将式 (16), (25) 和 (26) 代入式 (27) 则得到

$$\frac{\beta\tau^{\mathrm{T}}}{\tau^{\mathrm{L}}}\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W'^2_{T,p}}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(m_p\overline{n}_p\overline{W'^2_{L,p}}\right) + \alpha_p\rho_p\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right)g - \alpha_p\rho_p a\right] = 0 \tag{28}$$

下面按三种情况分别讨论式 (28).

1) $\overline{W'^2_{L,p}} \approx 0$. 稀相输送时，这条件适用于管流中的大部分区域；对于挟沙水流，它适用于除床面附近的薄层以外的大部分流场．这时，利用式 (10) 可将式 (28) 简化为

$$\frac{\left(\overline{n}_p\overline{W'^2_{T,p}}\right)_z}{\left(\overline{n}_p\overline{W'^2_{T,p}}\right)_{z_0}} \approx \exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{\tau^{\mathrm{L}}}{\beta\tau^{\mathrm{T}}}\frac{\left[(1-\rho_f/\rho_p)\,g - a\right]}{\overline{W'^2_{T,p}}}\mathrm{d}z\right\} \tag{29}$$

由于颗粒群的湍流扩散系数 $D^{\mathrm{T}}_p = \beta\tau^{\mathrm{T}}\overline{W'^2_{T,p}}$, 颗粒的沉降速度 $\omega \approx (1-\rho_f/\rho_p)g\tau^{\mathrm{L}}$, 假设 $\overline{W'^2_{T,p}} =$ 常数，$a = 0$, 则由式 (29) 可得到与泥沙扩散理论 [4] 一致的结果

$$\overline{n}_p(z) = \overline{n}_{p,0}\exp\left[-\int_0^z\frac{\omega}{D^{\mathrm{T}}_p}\mathrm{d}z\right]$$

1) 在二相流研究中，一般说双流体模型优于扩散模型，因而得到广泛应用，然而在泥沙运动研究中，普遍采用扩散模型．下面分析其原因．采用双流体模型首先要给定相间力本构式，由于人们一直未认识到相间阻力须像式 (19) 和 (20) 那样，按湍流的和非湍流的两部分分开计算，一直采用式 (24) 那样的 (其中的 C 可能是 $(\hat{w}_f - \hat{w}_p)$ 的复杂函数) 阻力公式，结果，导出的颗粒浓度垂向分布严重偏离观察值，还不如扩散模型好．其实，不是双流体模型不适用于泥沙运动，而是不正确的相间阻力公式所致．关于双流体模型与扩散模型、相间力与相间扩散系数之间的关系，将另文详述．同时，还将给出其它一些例子，说明阻力按式 (19) 那样分解的必要性．

2) 可按这种方式分解是一种假设，其依据将另文论述．目前可从由它导出的一些结论 (如式 (28), 以及有关的讨论), 看这假设的合理性．

2) $\overline{W'^2_{T,p}} \approx 0$. 在管壁附近，或在河床的床面附近，湍流脉动速度 $\overline{W'^2_{L,p}}$ 近似为 0, 在那里，颗粒的悬浮是靠颗粒的非湍流脉动，从式 (28) 得到那里的颗粒浓度分布为

$$\frac{\left(\overline{n}_p\overline{W'^2_{L,p}}\right)_z}{\left(\overline{n}_p\overline{W'^2_{L,p}}\right)_{z_0}} \approx \exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{\left[\left(1-\rho_f/\rho_p\right)g-a\right]}{\overline{W'^2_{L,p}}}\mathrm{d}z\right\} \tag{30}$$

3) $\tau^{\mathrm{L}} \approx$ 常量， $\beta\tau^{\mathrm{T}} \approx$ 常量. 在主流区与近壁区 (或近床区) 之间，湍流脉动与非湍流脉动有相同的重要性，但一般说这个区域不大，可忽略 $\beta\tau^{\mathrm{T}}$ 和 τ^{L} 沿高度的变化，这时式 (28) 可简化为

$$\frac{\left[\overline{n}_p\left(\beta\tau^{\mathrm{T}}\overline{W'^2_{T,p}}+\tau^{\mathrm{L}}\overline{W'^2_{L,p}}\right)\right]_z}{\left[\overline{n}_p\left(\beta\tau^{\mathrm{T}}\overline{W'^2_{T,p}}+\tau^{\mathrm{L}}\overline{W'^2_{L,p}}\right)\right]_{z_0}} \approx \exp\left\{-\int_{z_0}^{z}\frac{\tau^{\mathrm{L}}\left[\left(1-\rho_f/\rho_p\right)g-a\right]}{\left(\beta\tau^{\mathrm{T}}\overline{W'^2_{T,p}}+\tau^{\mathrm{L}}\overline{W'^2_{L,p}}\right)}\mathrm{d}z\right\} \tag{31}$$

式 (29) 可作为式 (31) 在 $\overline{W'^2_{L,p}}=0$ 时的特例，式 (30) 可作为式 (31) 在 $\overline{W'^2_{T,p}}=0$ 时的特例，但式 (29) 和 (30) 没有 "$\tau^{\mathrm{L}} \approx$ 常量" 和 "$\tau^{\mathrm{T}} \approx$ 常量" 的要求.

4 讨论和结论

为简明起见，先讨论从式 (18) 得出的结论 (事实上，它可视为一般式 (28) 在 $\beta\tau^{\mathrm{T}}=\tau^{\mathrm{L}}$ 时的特例), 然后讨论因子 $\beta\tau^{\mathrm{T}}/\tau^{\mathrm{L}}$ 的重要性.

1) 若 $a=0$, $\overline{W'^2_p}=$ 常数，则式 (18) 就与式 (14) 很相似，颗粒浓度呈负指数分布.

2) 根据式 (18), 虽然 a 的大小会影响悬浮颗粒的浓度分布，但不论 a 值多大，只要 $\overline{W'^2_p}\neq 0$, 就能支持一定程度的悬浮， $\overline{W'^2_p}$ 越大，颗粒的浓度梯度 (绝对值，下同) 就越小. 若某局部区域的 $\overline{W'^2_p}$ 为无穷大，则该处的数密度梯度为零，即局部的均匀悬浮；若某处的 $\overline{W'^2_p}$ 为零，在 $a<\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\right)g$ 的情况下，则该处的数密度梯度为负无穷大，该点以上完全没有颗粒悬浮；在 $a>\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\right)g$ 的情况下，则该处的数密度梯度为正无穷大，该点以下完全没有颗粒悬浮.

3) 如果颗粒没有任何形式的无规则运动， $\overline{W'^2_p}$ 处处为零，那么，颗粒就会全部沉积在床面和管底 ($a<\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\right)g$ 的情况), 或者全部上升到明渠水面上和管道顶部 ($a>\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\right)g$ 的情况). 所以，仅有升力、没有任何无规则运动是无法解释稳定的弥散悬浮的.

4) 把 $\overline{W'^2_p}$ 仅理解为颗粒的湍流脉动，也会引起逻辑上的矛盾，因为颗粒的湍流脉动是由流体的湍流带动的，而在固壁附近或床面上，流体的湍流脉动强度为零，因此颗粒的湍流脉动强度也是零. 但是，正如前述，若在底面上 $\overline{W'^2_p}=0$, 则意味着颗粒全部沉在底面，完全不能悬浮，这不符合事实. 这说明在底面附近，必定有某种非湍流的无规则运动存在.

5) 在风沙流中和气力输送的管道中，颗粒的跃移运动 (颗粒在床面上或管道下壁面上跳跃式地前进) 就是一种非湍流型的颗粒无规则运动 1).

引言中的第 5 种观点与本文的观点有些类似.

6) 在床面上滚动的颗粒，滚动受阻时会从床面跃起；在呈波状起伏的床面上以较大速度运动的颗粒，当床面斜率急剧变化时可能飞离床面 —— 斜面飞升；它们与 "重力沉降" 合在一起，也构成一种床面上的无规则运动.

1) 这种无规则运动与湍流脉动有许多本质的差异，其中之一是：与跃移运动相关的无规则运动是颗粒带动流体，而不是相反，详见 [7].

气 (水) 流在波状床面上运动时，可能发生流动分离，在背风 (水) 面出现局部旋涡，它也可诱使颗粒飞离床面. 但是，这不是一种独立于上述机理的新机理，事实上，在那里，颗粒脱离床面还是通过碰撞或“斜面飞升”实现的.

7) 气 (水) 流湍流脉动是造成颗粒湍流脉动的动力，颗粒湍流脉动与颗粒的悬浮有密切联系，但把气 (水) 流施于颗粒的脉动作用力直接解释为悬浮力是不合逻辑的. 事实上，当 $\beta\tau^{\mathrm{T}}=\tau^{\mathrm{L}}$ 时，脉动作用力的平均值是零，但颗粒仍能悬浮.

8) 颗粒的悬浮可以依靠它自身的任何形式的无规则运动维持，不一定需要升力 (悬浮力) 和作功 (悬浮功); 无规则运动越强烈，则当地的浓度梯度 (绝对值) 越小. 有些无规则运动 (如分子热运动和微粒的 Brown 运动) 可以长期维持，无需外界补充能量而不耗散，而另一些无规则运动 (如湍流脉动和颗粒的跃移运动等) 若无能量补充就会衰竭. 颗粒的湍流脉动是从流体的湍流脉动中得到能量补充，所以颗粒的存在必定削弱流体的脉动强度. 若单从这一点考虑，则颗粒的存在将减小流动阻力.

底面或床面附近的颗粒跃移运动是通过同底面或床面的不断碰撞实现的，在这些碰撞中颗粒把从气 (水) 流中获得的流向动量部分地传递给了底面或床面 [7], 使流动的阻力增加. 沉积在底面或床面上的颗粒造成的床面不平整，使气 (水) 流发生分离，也会使流动的阻力增加.

所以，颗粒的存在既有使流动阻力减小的一面，又有使阻力增加的一面，而综合效果则视上述两种效应的相对大小而定. 但是，无论如何不能把流动阻力增加归因于悬浮颗粒需作功. 事实上，支持颗粒悬浮需要的是沿重力方向的力或动量交换，而流动阻力是沿流动方向的，这两者之间没有直接联系.

9) 仅就以上各点而言，用式 (18) 都能解释. 但是，按照式 (18)(设 $a=0$, 下同), 对于粒径相差不太大、因而它们的湍流脉动速度相近的两种颗粒 (例如，$d_1=0.1\,\mathrm{mm}$ 和 $d_2=0.2\,\mathrm{mm}$ 的两种颗粒), 就会有几乎一样的相对浓度沿高度分布，这不符合事实. 这一点可用式 (29) 解释：虽然这两种颗粒的湍流扩散系数 $D_p^{\mathrm{T}}(\approx\beta\tau^{\mathrm{T}}\overline{W_{T,p}'^2})$ 相近，但由于小颗粒的沉降速度 ($\omega_1\approx(1-\rho_f/\rho_p)g\tau_1^{\mathrm{L}}\approx0.7\,\mathrm{cm/s}$)) 显著小于大颗粒 ($\omega_2\approx(1-\rho_f/\rho_p)g\tau_2^{\mathrm{L}}\approx2.2\,\mathrm{cm/s}$)), 所以，它的浓度分布相对地较均匀，这与观察结果基本符合，这说明，将颗粒群的阻力按湍流的和非湍流的分开是必要的.

参考文献

1 李诗久，周晓君. 气力输送理论与应用. 北京：机械工业出版社，1992, 48 (Li Shijiu, Zhou Xiaojun. The Theory of Peumatic Transport and Its Application. Beijing: Machine Press, 1992, 48 (in Chinese))

2 刘大有. 伯努利方程应用中的若干问题. 力学与实践，1991, 13(4): 62~63 (Liu Dayou. Remarks on the application of Bernoulli equation. *Mechanics and Practice,* 1991, 13(4): 62~63 (in Chinese))

3 Великанов, MA, Русловьй процесс, Государственное издателвство физикоматематической литературь. *Москва*, 1958, стр. 241~245.

4 钱宁，万兆惠. 泥沙运动力学. 北京：科学出版社，1986: 322 (Qian Ning, Wan Zhaohui. Mechanics of Sediment Movement. Beijing: Science Press, 1986: 322 (in Chinese))

5 Chapman S, Cowling T G. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press, 1973, 34 (中译本：查普曼 S, 考林 TG. 非均匀气体的数学理论. 刘大有，王柏懿译. 北京：科学出版社，1985: 46)

6 刘大有. 二相流体动力学. 北京：高等教育出版社，1993, 553, 573 (Liu Dayou. Fluid Dynamics of Two-Phase Systems. Beijing: Higher Education Press, 1993, 553, 573 (in Chinese))

7 刘大有，董飞，贺大良. 风沙二相流运动特点的分析. 地理学报，1996, 51(5): 434~444 (Liu Dayou, Dong Fei, He Daliang. An analysis of characters of blown sands. *Acta Geographica Sinica,* 1996, 51(5), 434~444 (in Chinese))

DISCUSSION ON PARTICLE SUSPENSION MECHANISM AND SUSPENSION WORK [1),2)]

Liu Dayou

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

Abstract Any kinds of random motion of particulates (gas molecules, Brownian particles, etc.) can make them suspended in gravity field in spite of there are external forces or not. Suspension of the solid particles in rivers and in pipes of pneumatic (or hydraulic) transport is also supported by the random motion of themselves. The lift and other forces acting on particles can really change the vertical distribution of the particles, but they can not make the particles dispersedly suspended if there are no random motion.

The dual effects of particles on the flow drag are also discussed. The turbulent fluctuations, which support the particle suspension, will be weakened due to the existence of particles and, as a result, the drag of flow will decrease. One of the main mechanisms of particles increasing flow drag is that the horizontal momentum of particles gained from the fluid will continuously lose during the particle-wall collisions. It is not correct that the increase of flow drag is due to the suspension work done by fluid on the particles.

Key words suspension mechanism, suspension force, pneumatic transport, hydraulic transport, sediment movement, blown sands

Received 26 August 1998, revised 19 May 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and the State Key Laboratory of Clean Combastion of Coal.

2) In memory of academician Lin Tongji's 80 anniversary.