

# 三值噪声及热噪声共同调制下 RC 串联电路的随机共振现象

韩引霞

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

**摘要:** 研究了在三值噪声和高斯白噪声共同调制下 RC 串联电路所表现出来的现象. 利用系综平均法和 Shapiro-Loginov 公式, 推导得到了平均输出幅度增益的精确表达式. 通过模拟及分析图示, 表明平均输出幅度增益在输入信号频率  $\omega$ 、系统参量  $a$  取不同值时, 其呈现为三值噪声参量  $d$ 、 $q$  的非单调函数, 即在适当的噪声参量和系统参量条件下, 平均输出幅度增益呈现出 1 个最大值, 而高斯白噪声对于平均输出幅度增益没有产生任何影响.

**关键词:** 三值噪声; 平均输出幅度增益; RC 串联电路; 随机共振

中图分类号: O211.64

文献标识码: A

文章编号: 1001-5132 (2011) 02-0075-04

自从 Benzi 等人在 1981 年提出随机共振的概念用于解释第四纪全球气象冰川问题以来<sup>[1-2]</sup>, 随机共振的理论和实验研究就引起了人们的极大兴趣. 在理论的发展过程中, 随机共振常常被用来解释自然界中许多特殊的现象, 也说明了其应用的广泛性. 早期认为, 产生随机共振必备的三要素是周期信号、噪声、非线性系统<sup>[1-5]</sup>. 噪声在随机共振出现时, 会对系统的输出性能起促进作用, 这与传统噪声有害的思想相矛盾. 而且随着研究的深入, 人们发现随机共振现象可以出现在具有乘性色噪声或分段噪声驱动的线性系统中<sup>[6-9]</sup>. 在传统的随机共振研究中, 衡量随机共振现象的特征是研究信噪比对噪声参量呈现出非单调依赖关系<sup>[1-6]</sup>, 但现在除了上述特征之外, 还有信噪比对输入信号频率呈现出非单调依赖关系<sup>[7]</sup>、信噪比对系统参量呈现出非单调依赖关系<sup>[8]</sup>; 更广义的特征是一阶矩对噪声参量、系统参量、输入信号频率呈现出非单调依赖关系<sup>[9]</sup>.

随机共振现象已经在物理、化学、生物科学、工程、信号处理等许多领域内被发现. 电子电路系统中也同样被发现. 在电路研究中, 常用平均幅度增益对噪声参量、系统参量、输入信号频率的非单

调依赖关系来描述随机共振特性<sup>[7,9-10]</sup>. 通常描述随机共振的非单调函数关系是有最大值出现, 但也有少数研究者获得的非单调函数关系是有最小值出现<sup>[7,11]</sup>. 文献[11]研究了在非对称双值噪声调制下 RC 串联电路的随机共振特性, 而且发现适当的噪声参数和系统参数可以使平均输出幅度增益取得最小值, 且输出幅度增益关于噪声非对称性和相关速率函数的最小值不随信号频率的变化而变化. 尽管双值噪声<sup>[11-13]</sup>和三值噪声<sup>[14]</sup>在模拟自然涨落时都非常有用, 但三值噪声更复杂, 其包括了双值噪声的所有情形. 更有意义的是, 与高斯色噪声的平坦系数  $\kappa = 3$  和对称性双态噪声的平坦系数  $\kappa = 1$  相比较, 三值噪声的平坦系数可以从  $1 \sim \infty$  中的任何数, 这个优势在模拟真实涨落时更有实际意义. 因此, 受文献[11]和[14]的启发, 笔者采用文献[11]中的 RC 串联电路模型, 研究在三值噪声和高斯白噪声共同调制下 RC 串联电路表现出来的性质.

## 1 系统模型

与文献[11]相同, 采用如图 1 所示的电路. 因此, 系统的输入、输出电压满足下列方程:

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_0(t) + \frac{1}{RC}U_i(t), \quad (1)$$

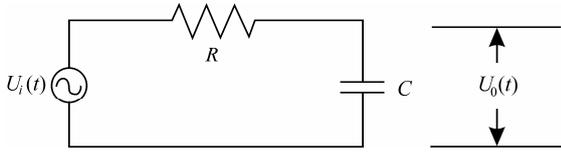


图1 RC串联电路

其中,  $U_i(t) = A_0 \cos \omega t$  为周期激励信号. 时间常数  $1/RC$  受到三值噪声的扰动, 即  $1/RC = a + Z(t)$ , 同时系统受到热涨落的影响, 这时(1)式变为:

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = -(a + z(t))U_0(t) + (a + z(t))A_0 \cos \omega t + \xi(t), \quad (2)$$

其中,  $a$  为未受扰动前的时间常数; 热涨落  $\xi(t)$  为高斯白噪声, 它满足如下的统计特性:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (3)$$

其中,  $D$  为噪声强度. 时间常数所遭受到的扰动  $z(t)$  属于马尔可夫的三值噪声, 它在 3 个值  $z_1 = d, z_2 = 0, z_3 = -d (d > 0)$  之间发生跃迁, 假设跃迁时的转移概率为  $\nu$ , 且处于 3 个值的定态概率满足  $P_s(d) = P_s(-d) = q, P_s(0) = 1 - 2q, 0 < q < 1/2$ . 因此, 在定态时, 三值噪声  $z(t)$  的统计特性满足:

$$\langle z(t) \rangle = 0, \langle z(t)z(t') \rangle = 2qd \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (4)$$

其中,  $\tau$  为噪声的关联时间. 转移概率  $\nu$  为噪声关联时间的倒数, 即  $\nu = 1/\tau$ ;  $z(t)$  是一个对称性的均值为零的指数关联噪声, 它的平坦系数为:

$$\kappa = \langle z^4(t) \rangle / \langle z^2(t) \rangle^2. \quad (5)$$

## 2 输出信号的平均幅度增益

对(2)式取系综平均, 得到:

$$\frac{d\langle U_0(t) \rangle}{dt} = -\langle aU_0(t) \rangle - \langle z(t)U_0(t) \rangle + aA_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

(6)式中出现新的关联因子  $\langle z(t)U_0(t) \rangle$ , 利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[11]</sup>, 它可以写为:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle z(t)U_0(t) \rangle}{dt} &= \langle z(t) \frac{dU_0(t)}{dt} \rangle - \\ &\nu \langle z(t)U_0(t) \rangle = -(a + \nu) \langle z(t)U_0(t) \rangle + \\ &\langle z^2(t)U_0(t) \rangle + 2qd^2 A_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

再次利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[11]</sup>, (7)式中出现的高阶关联因子  $\langle z^2(t)U_0(t) \rangle$  可写为:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle z^2(t)U_0(t) \rangle}{dt} &= \langle z^2(t) \frac{dU_0(t)}{dt} \rangle - \\ &2\nu \langle z^2(t)U_0(t) \rangle + 4\nu qd^2 \langle U_0(t) \rangle = \\ &-(a + 2\nu) \langle z^2(t)U_0(t) \rangle - d^2 \langle z(t)U_0(t) \rangle + \\ &4\nu qd^2 \langle U_0(t) \rangle + 2qd^2 a A_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (8)$$

(6)~(8)式构成了 1 组关于 3 个变量  $\langle U_0(t) \rangle$ ,  $\langle z(t)U_0(t) \rangle$  和  $\langle z^2(t)U_0(t) \rangle$  的封闭方程组. 根据这些方程组, 我们得到关于变量  $\langle U_0(t) \rangle$  的三阶微分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \langle U_0(t) \rangle}{dt^3} + 3(a + \nu) \frac{d^2 \langle U_0(t) \rangle}{dt^2} + \\ [(a + 2\nu)(2a + \nu) + a(a + \nu) - d^2] \frac{d \langle U_0(t) \rangle}{dt} + \\ [a(a + \nu)(a + 2\nu) - (a + 4q\nu)d^2] \langle U_0(t) \rangle = \\ (2qd^2 - 2a^2 - 3a\nu)\omega A_0 \sin \omega t + \\ [2qd^2 - a(d^2 + \omega^2) - (a + 2\nu)(2qd^2 - \\ a^2 - a\nu)] A_0 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式的通解可写成:

$$\langle U_0(t) \rangle = N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t + \sum_{j=1}^3 C_j \exp(\rho_j t), \quad (10)$$

其中,  $C_j$  为由初始条件决定的积分常数;  $\rho_j$  为下式代数方程的根:

$$\begin{aligned} \rho^3 + 3(a + \nu)\rho^2 + [(a + 2\nu)(2a + \nu) + \\ a(a + \nu) - d^2]\rho + [a(a + \nu)(a + 2\nu) - \\ (a + 4q\nu)d^2] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

为保证(10)式解的稳定性,  $\rho_j$  必须满足负实根的条件. 根据 Routh-Hurwitz 定理<sup>[15]</sup>可得到:

$$\begin{aligned} 3(a + \nu)[(a + 2\nu)(2a + \nu) + a(a + \nu) - d^2] > \\ [a(a + \nu)(a + 2\nu) - (a + 4q\nu)d^2], \\ a > 0, \nu > 0, q > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

在  $t \rightarrow \infty$  情况下, 由于  $\rho_j < 0$ , 系统将趋于稳定态. 此时, 系统的平均输出稳态响应写为:

$$\langle U_0(t) \rangle = N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t, \quad (13)$$

此时,

$$N_1 = \frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_1^2 + f_2^2}, \quad N_2 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1^2 + f_2^2}, \quad (14)$$

$$f_1 = [(a + 2\nu)(2a + \nu) + a(a + \nu) - d^2]\omega - \omega^3,$$

$$f_2 = [a(a + 2\nu)(a + \nu) - d^2 a - 4q\nu d^2] -$$

$$3(a + \nu)\omega^2,$$

$$f_3 = [2qd^2 - a(d^2 + \omega^2) - (a + 2\nu)(2qd^2 -$$

$$a^2 - av)A_0, \quad f_4 = [2qd^2 - 2a^2 - 3av]\omega. \quad (15)$$

为了简化, 系统的平均输出稳态响应也可以写为:

$$\langle U_0(t) \rangle = H \cos(\omega t + \phi), \quad (16)$$

此时,

$$H = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}, \quad \phi = \arctan(N_1 / N_2), \quad (17)$$

其中,  $H$  为输出信号振幅;  $\phi$  为输出信号的相位.

根据输出信号的平均幅度增益的定义<sup>[11]</sup>, 该系统的平均输出幅度增益的表达式为:

$$G = H / A_0, \quad (18)$$

其中,  $A_0$  为输入信号的幅度.

### 3 结果与讨论

由(18)式可得出系统的平均输出幅度增益与噪声参量及系统参量之间的变化关系. 图 2~图 5 分别绘出了输入信号频率  $\omega$  和时间常数  $a$  取不同值时, 平均输出幅度增益  $G$  与噪声参量  $d, q$  的关系曲线. 图中电阻单位为欧姆; 电容单位为法拉, 电压单位为伏特, 其余物理量的单位为导出单位.

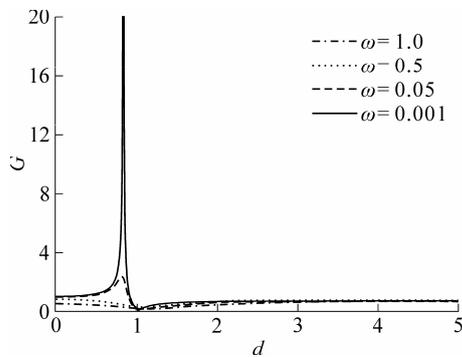


图 2  $a = 0.5, v = 0.5, q = 0.35, A_0 = 3.0$  条件下, 输出幅度增益  $G$  与三值噪声参量  $d$  的关系曲线

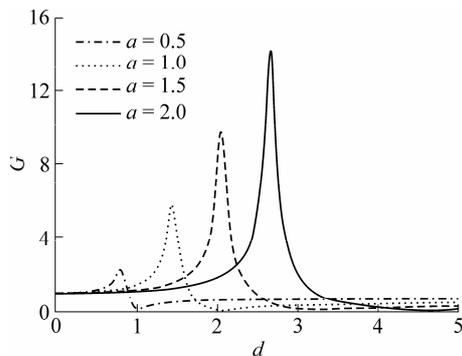


图 4  $v = 0.5, \omega = 0.5, q = 0.35, A_0 = 3.0$  条件下, 输出幅度增益  $G$  与三值噪声参量  $d$  的关系曲线

图 2 和图 3 可看出随输入信号频率  $\omega$  的逐渐减弱, 平均输出幅度增益  $G$  随着三值噪声参量  $d, q$  的增大而逐渐增大, 随后出现 1 个波峰, 说明系统出现了共振现象; 但当  $\omega = 0.001$  时,  $G$  表现出 1 个巨大的最大值, 即表现出随机巨大的共振现象<sup>[16]</sup>; 然后随着三值噪声参量  $d, q$  的增大, 平均输出幅度增益  $G$  逐渐的减少.

从图 4 和图 5 可看出, 在系统参量  $a$  取不同值时, 输出幅度增益  $G$  随着三值噪声参量  $d, q$  的增大出现了 1 个最大值, 即系统表现出随机共振现象, 也就是随着三值噪声参量  $d, q$  的逐渐增大, 输出幅度增益从 1 个非零值开始增加, 在某个  $d, q$  处, 输出幅度增益达到最大值, 然后随着噪声参量  $d, q$  增大而单调减小. 此外, 还发现随着系统参量  $a$  的增大, 共振峰升高, 且  $G-d$  和  $G-q$  曲线的最大值向右移动.

### 4 结论

在周期信号激励下, 当电路的时间常数遭受到扰动时, 平均输出幅度增益表现出随机共振现

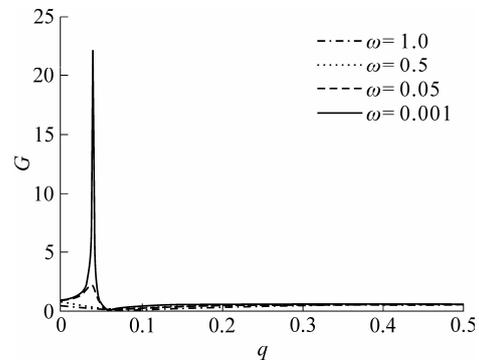


图 3  $a = 0.5, v = 0.5, d = 2.5, A_0 = 3.0$  条件下, 输出幅度增益  $G$  与三值噪声参量  $q$  的关系曲线

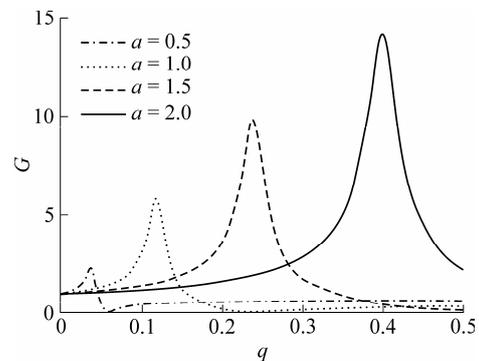


图 5  $d = 2.5, v = 0.5, \omega = 0.5, A_0 = 3.0$  条件下, 输出幅度增益  $G$  与三值噪声参量  $q$  的关系曲线

象. 从讨论中可以发现, 调整噪声参量在其他量取适当值的情况下, 系统能够得到 1 个最大的平均输出幅度增益. 这样, 为了提高平均输出幅度增益, 就应避免让系统工作在输出幅度增益较小的噪声条件下, 而应尽量保持系统工作在输出幅度增益最大的噪声条件下. 此外, 还发现热噪声对平均输出幅度增益没有影响, 此结论对噪声环境中信号调理电路的设计、调试, 微弱信号检测的方法等将是有益的.

#### 参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. *J Phys A*, 1981, 14:453-457.
- [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, et al. Stochastic resonance in climatic change[J]. *Tellus*, 1982, 34:10-16.
- [3] Mcnamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance[J]. *Phys Rev A*, 1989, 39:4854-4869.
- [4] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance[J]. *Rev Mod Phys*, 1998, 70:223-287.
- [5] Luchinsky D G, Mannella R, McClintock P V E, et al. Stochastic resonance in electrical circuits I: conventional stochastic resonance[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1999, 46:1205-1214.
- [6] Fuliski A. Relaxation noise induced transitions and stochastic resonance driven by non-Markovian dichotomic noise[J]. *Phys Rev E*, 1995, 52:4523-4526.
- [7] Berdichevsky V, Gittermann. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise[J]. *Phys Rev E*, 1999, 60:1494-1499.
- [8] Jiang shiqi, Feng guo, Zhou Yurong, et al. Parameter-induced stochastic resonance in an over-damped linear system[J]. *Physica A*, 2007, 375:483-491.
- [9] Gitterman M. Harmonic oscillator with fluctuating damping parameter[J]. *Phys Rev E*, 2004, 69:41101-41104.
- [10] 程庆华, 曹力, 吴大进, 等. 单模激光系统中信噪比对净增益的随机共振[J]. *光子学报*, 2004, 33(8):901-904.
- [11] 蒋世奇, 郭锋, 周玉荣, 等. RC 串联电路的随机共振[J]. *电子科技大学学报*, 2007, 36(5):942-944.
- [12] Shapiro V E, Loginov V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations[J]. *Physica A*, 1978, 91:563-574.
- [13] Fuliski A. Non-Markovian noise[J]. *Phys Rev E*, 1994, 50:2668-2681.
- [14] Mankin R, Laas K, Laas T. Stochastic multiresonance and correlation-time-controlled stability for a harmonic oscillator with fluctuating frequency[J]. *Phys Rev E*, 2008, 78:31120-31131.
- [15] Roul S. Programming for mathematicians[M]. Berlin: Springer Verlag Press, 2000:280-286.
- [16] Li Jinghui. Stochastic giant resonance[J]. *Phys Rev E*, 2007, 76:21113-21117.

## Phenomena of Stochastic Resonance in RC Series Circuit Induced by Trichotomous Noise and Gaussian White Noise

HAN Yin-xia

( College of Science & Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China )

**Abstract:** This paper studies the phenomena of stochastic resonance in RC series circuit induced by trichotomous noise and Gaussian white noise. Using the random average method and Shapiro-Loginov formula, an explicit expression of the output amplitude gain (OAG) is obtained. The simulation results show that the OAG is a non-monotonic function of parameters of trichotomous noise when the frequency of the input signal and parameter of the system take different values, i.e., the maximum of OAG can be obtained by choosing appropriate values of frequency of the input signal and parameter of the system. It is also found that Gaussian white noise is not relevant to the OAG.

**Key words:** trichotomous noise; output amplitude gain; RC series circuit; stochastic resonance

( 责任编辑 章践立 )