

文章编号: 1001-0920(2013)09-1361-04

## 文化算法的收敛性分析

郭一楠<sup>a</sup>, 陈美蓉<sup>a,b</sup>, 王春<sup>a</sup>, 刘海媛<sup>a,b</sup>

(中国矿业大学 a. 信息与电气工程学院, b. 理学院, 江苏徐州 221116)

**摘要:** 虽然文化算法已被广泛应用于解决各个领域的优化问题, 但与其收敛能力相关的理论分析还比较缺乏. 为此, 针对传统文化算法, 应用有限状态 Markov 链来分析文化算法的搜索过程, 进一步使用公理化模型深入研究了种群在决策空间上的概率分布情况, 证明了在文化算法信度空间的标准知识、拓扑知识和状况知识引导下, 变异算子和最优保留选择策略保证了文化算法依概率弱收敛到全局最优解.

**关键词:** 文化算法; Markov 链; 满意集; 依概率弱收敛

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

### Analysis on the convergence of cultural algorithm

GUO Yi-nan<sup>a</sup>, CHEN Mei-rong<sup>a,b</sup>, WANG Chun<sup>a</sup>, LIU Hai-yuan<sup>a,b</sup>

(a. College of Information and Electrical Engineering, b. College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China. Correspondent: GUO Yi-nan, E-mail: nanfly@126.com)

**Abstract:** Though cultural algorithms have been applied to many optimization problems in various fields, there lacks the theory analysis related to the convergence performance of these algorithms. Therefore, aiming at traditional cultural algorithms, the search process of cultural algorithm is analyzed by means of finite Markov chains. Furthermore, the probability distribution of population in decision spaces is deeply studied by making use of the axiomatic model. It is proved that cultural algorithms quasi-converge to the optimal solution in probability under the guidance of normative knowledge, topographical knowledge and situational knowledge in belief space.

**Key words:** cultural algorithm; Markov chain; satisfactory set; quasi-convergence in probability

## 0 引言

文化算法是一种模拟人类文化进化过程的仿生智能计算方法<sup>[1]</sup>. 该算法采用由上层信度空间和底层种群空间组成的双层进化机制, 从底层种群的优势进化个体中挖掘反映进化程度和优势区域的隐含知识, 并将信度空间存储的知识反馈到种群进化过程, 从而提高搜索效率, 改善算法进化性能. 因此, 文化算法从提出至今, 在产品设计<sup>[2]</sup>、生产调度<sup>[3]</sup>和工业优化控制<sup>[4]</sup>等众多领域的优化问题中得到了成功应用.

文化算法为进化计算中领域知识提取及利用提供了一个通用框架, 其种群空间可以采用任何基于种群的智能优化算法. 随着智能计算新技术的发展, 遗传算法<sup>[5]</sup>、进化规划<sup>[6]</sup>、粒子群优化算法<sup>[7]</sup>、微分进化算法<sup>[8]</sup>、量子计算<sup>[9]</sup>和蚁群算法<sup>[10]</sup>等诸多智能优化方法被引入种群空间. 这些算法的收敛性已先后得到证

明. 而由于对文化算法搜索机理的深入研究不够, 导致与文化算法收敛性相关的理论分析相对缺乏, 特别是对于算法在应用中的全局优化能力未做出理论证明. 基于此, 本文采用有限状态的 Markov 链来分析文化算法的搜索过程, 进一步使用公理化模型<sup>[11]</sup>深入研究了种群在决策空间上的概率分布情况, 证明了文化算法依概率弱收敛于全局最优解.

## 1 文化算法结构及原理

文化算法模拟人类社会的文化进化过程, 采用双层进化机制, 在传统的基于种群的进化算法基础上, 构造信度空间来提取隐含在进化过程中的各类信息, 并以知识的形式加以存储, 最终用于指导进化过程. 算法基本结构如图 1 所示.

种群空间用于实现任何基于种群的进化算法, 一

收稿日期: 2012-05-16; 修回日期: 2012-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60805025); 江苏省自然科学基金项目(BK2010183); 江苏省中青年骨干教师及校长境外研究项目(2011-2012).

作者简介: 郭一楠(1975-), 女, 教授, 博士, 从事智能优化、网络控制系统等研究; 陈美蓉(1978-), 女, 博士生, 从事智能优化的研究.

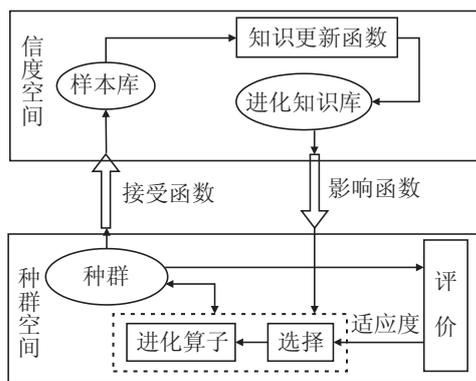


图 1 文化算法基本结构

方面对个体实现评价,并面向种群实施选择、交叉、变异等进化操作,另一方面将优良个体作为样本提供给信度空间。

信度空间通过接受函数从种群空间各代已评价种群中选取样本个体,并在知识更新函数的作用下,提取样本个体所携带的隐含信息,以知识的形式加以概括、描述和储存。最终各类知识通过影响函数作用于种群空间,从而实现进化操作的引导,以加速进化收敛,并提高算法随环境变化的适应性。

接受函数和影响函数为上层知识模型和下层进化过程提供了作用通道,称为接口函数。

综上所述,文化算法是由种群空间、信度空间和接口函数构成的一种双层进化结构,算法具体步骤如下。

**Step 1:** 在决策空间  $\Omega$  中随机选取  $m$  个点构成初始种群  $X(0) = \{x_1(0), x_2(0), \dots, x_m(0)\}$ ; 初始化信度空间中的标准知识、拓扑知识和状况知识。

**Step 2:** 计算种群中每个个体的适应度值  $f(x_i(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 并依据  $f(x_i(t))$  降序排列种群中所有个体。

**Step 3:** 按一定接受比例从种群中选取样本个体,并依据这些样本个体更新信度空间各类知识:

**Step 3.1:** 标准知识

$$K_{\text{Nom}}(t) = \{L_{\text{Nom}}(t), U_{\text{Nom}}(t)\},$$

其中  $L_{\text{Nom}}(t)$  和  $U_{\text{Nom}}(t)$  分别表示决策空间中可行解区域的下限和上限,当种群中全部个体都位于新的可行解区域时标准知识才发生更新。

**Step 3.2:** 拓扑知识记录了进化过程中个体的适应度分布状况,记为  $K_{\text{Top}}(t) = \{K_{T1}(t), \dots, K_{Tj}(t), \dots\}$ . 其中  $K_{Tj}(t) = \{x_j^{\text{best}}(t), L_{Tj}(t), U_{Tj}(t)\}$  分别表示划分后子区域的当前最优个体,以及该子区域的下限和上限。

拓扑知识在两种情况下发生更新:一是当标准知识更新时会引发拓扑知识的重新划分;二是当标准知识没有发生改变时,判断拓扑知识记录的子区域中是

否有新的优势个体出现,若出现优势个体,则拓扑知识沿着具有最大信息增益<sup>[12]</sup>的变量维进行二分,构成二叉树结构。其中信息增益定义为

$$\Delta I_l = \frac{f(x_l^{\text{best}}(t)) - f(x_l^{\text{best}}(t-1))}{x_l^{\text{best}}(t) - x_l^{\text{best}}(t-1)}. \quad (1)$$

设根节点为  $R_{K_{\text{Nom}}}$ , 当二分条件满足时,在相应知识空间进行细化,有

$$R_{\text{split}}(t) = R_{K_{Tj,l}}, I = \arg \max_{l=1,2,\dots,m} \Delta I_l; \\ \text{s.t. } x_l^{\text{best}}(t) \in R_{K_{Tj}}, x_l^{\text{best}}(t-1) \in R_{K_{Tj}}. \quad (2)$$

相应变量维的二叉树分割点取值为

$$x_{\text{split},l}(t) = 0.5(x_l^{\text{best}}(t) - x_l^{\text{best}}(t-1)). \quad (3)$$

**Step 3.3:** 状况知识  $K_{\text{Sit}}(t) = \{E_1, E_2, \dots, E_s\}$  用于记录进化过程中每一代的最优个体。其中  $s$  为状况知识容量,  $E_i$  为第  $i$  个较优个体。状况知识中记录的所有最优个体按个体适应值降序排列。

**Step 4:** 标准知识和拓扑知识按照一定知识影响比例来引导种群中个体的进化操作。其中知识影响比例依据知识影响成功率动态确定,记为

$$\lambda + \beta \frac{m_{K_i}(t-1)}{m}. \quad (4)$$

其中:  $m_{K_i}(t-1)$ ,  $i = \text{Nom or Top}$  分别表示在  $t-1$  代受标准知识和拓扑知识影响所生成的个体数目,其占种群规模的比例即为知识影响成功率;  $\lambda, \beta$  为给定参数,满足  $2\lambda + \beta = 1$ 。根据这两类知识的影响比例,对种群中进化个体进行变异操作,形成子群体  $X^{\text{Sub}}(t)$ 。

**Step 5:** 状况知识中的最优个体  $E_1(t)$  采用最优保留选择策略被保留在下一代种群中。其余个体采用轮盘赌选择,从  $X^{\text{Sub}}(t)$  中选出  $m$  个较优个体,替代原个体构成第  $t+1$  代种群。

**Step 6:** 判断算法是否满足停止准则。若满足则算法停止,输出优化结果,否则,返回 Step 2。

## 2 文化算法的 Markov 过程分析

**定义 1** (有限 Markov 链)<sup>[13]</sup> 设  $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  是定义在某概率空间上的离散参数的随机过程,其状态空间  $\Omega$  为有限集,如果  $X$  具有由下式定义的 Markov 性,即对任意非负整数以及任意的状态  $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$ , 只要  $P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} > 0$ , 总有

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \\ P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \quad (5)$$

成立,则称  $X$  为离散参数的有限 Markov 链。

针对第 1 节给出的文化算法结构,考虑有限个体空间  $\Omega$ , 其基数记为  $|\Omega| = N$ 。假设每一代种群由  $m$  个个体构成,则所有可能的种群构成一个状态空间  $\Omega^N = \{X_1, X_2, \dots, X_V\}$ 。其中  $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$ ,

基数为  $V = |\Omega^N| = N^m$ .

文化算法中,知识引导的变异操作和选择操作均可被认为是从状态  $X_i$  到状态  $X_j$  的随机变换.在状态迁移过程中,由于状态  $X(t+1)$  仅与状态  $X(t)$  有关,表明上述进化操作具有 Markov 性,是一个有限 Markov 链.

记受知识引导的变异操作的状态转移矩阵为  $P_M$ ,知识引导的选择操作的状态转移矩阵为  $P_S$ .由于每一代中引导变异操作和选择过程的知识包含了不同的信息,导致其各代状态转移矩阵  $P = P_M P_S$  不同,即  $P$  与进化代数  $t$  有关.因此,文化算法的进化过程是一个非时齐 Markov 链(过程).

到目前为止,大部分文献只考虑了时齐 Markov 理论在进化算法中的应用,显然所用方法不适用于分析文化算法的进化过程.因此,本文借鉴文献[11]提出的公理化模型来分析文化算法的随机搜索过程.

### 3 文化算法的收敛性分析

**定义 2** 称随机变量序列  $\{X(t)\}$  依概率弱收敛到全局最优解集<sup>[14]</sup>,若

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \cap Q \neq \emptyset\} = 1, \quad (6)$$

其中  $Q = \{X | \forall Y \in S, \text{有 } f(X) \geq f(Y)\}$  为关于适应值函数  $f$  的全局最优解集.

**定义 3** 称  $B \subset S$  为满意解集<sup>[14]</sup>,若对于任意  $X \in B, Y \notin B$ ,均有  $f(X) > f(Y)$ .

一个满意解集是这样一个个子集,它的每一个个体的适应值均大于满意解集之外的个体适应值.显然,最优解集  $Q$  为满意解集,并且为最小满意解集.

**定理 1** 若对于任意满意解集  $B$ ,有<sup>[14]</sup>

$$P\{X(t+1) \cap B = \emptyset | X(t) = X\} \leq a(t), X \cap B \neq \emptyset, \quad (7)$$

$$P\{X(t+1) \cap B = \emptyset | X(t) = X\} \leq b(t), X \cap B = \emptyset, \quad (8)$$

且满足条件: 1)  $\sum_{t=1}^{\infty} (1 - b(t)) = \infty$ ; 2)  $\frac{a(t)}{1 - b(t)} \rightarrow 0$ .

则  $\{X(t)\}$  依概率弱收敛到全局最优解集  $Q$ .

**推论 1** 若  $\{X(t)\}$  的转移概率满足<sup>[14]</sup>

$$P\{X(t+1) \cap B \neq \emptyset | X(t) = X\} = \begin{cases} 1, & X \cap B \neq \emptyset; \\ \geq \delta > 0, & X \cap B = \emptyset. \end{cases} \quad (9)$$

则  $\{X(t)\}$  依概率弱收敛到全局最优解集  $Q$ .

**定理 2** 文化算法依概率弱收敛于全局最优解集  $Q$ .

**证明** 假设当前状态  $X(t) = X_i$ , 经过文化算法中的变异操作和选择操作后,下一代的状态为  $X(t+1) = X_j$ .

1) 当  $X_i \cap B \neq \emptyset$  时,当前最优个体一定包含在满意集  $B$  中.由最优保留策略可知,无论进化过程处于哪一进化代数  $t$ ,都有

$$P\{X(t+1) \cap B \neq \emptyset | X(t) = X_i\} = 1, \quad \forall X_i, X_i \cap B \neq \emptyset. \quad (10)$$

2) 当  $X_i \cap B = \emptyset$  时,说明当前种群  $X(t) = X_i$  中不包含满意集  $B$  中的个体,则进一步讨论下一代种群  $X(t+1) \cap B \neq \emptyset$  的可能性.

文化算法的本质在于:基于从种群中获得的优势个体,提取获得并更新各类知识;利用上述知识来影响种群的进化过程,如变异操作和选择操作.因此,为深入分析在知识影响下获得满意解的可能性,分别针对文化算法中基于标准知识和拓扑知识引导的变异算子和基于状况知识引导的选择算子展开分析讨论.

设第  $t+1$  代的状态  $X(t+1) = X_j$ , 满足  $X_j \cap B \neq \emptyset$ , 即  $X_j$  包含满意集  $B$  中的较优个体.记在标准知识和拓扑知识引导作用下变异操作所形成的转移概率为

$$p_{ij}^M = P_M\{X(t+1) = X_j | X(t) = X_i\} = \prod_{k=1}^m P_M\{X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}\}. \quad (11)$$

由文化算法中的知识引导变异操作可知,该转移概率应该是由标准知识和拓扑知识两类知识共同影响的,记为

$$p_{ij}^M = \prod_{k=1}^m \{P_M[(X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}) | (\text{Nom}_k)]P[\text{Nom}_k] + P_M[(X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}) | (\text{Top}_k)]P[\text{Top}_k]\}. \quad (12)$$

其中  $\text{Nom}_k$  和  $\text{Top}_k$  分别表示第  $k$  个个体由标准知识和拓扑知识影响;  $P[\text{Nom}_k]$  和  $P[\text{Top}_k]$  分别表示第  $k$  个个体由标准知识和拓扑知识影响变异的概率,且满足  $P[\text{Nom}_k] + P[\text{Top}_k] = 1$ . 将式(4)代入(12),有

$$p_{ij}^M = \prod_{k=1}^m \left\{ P_M[(X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}) | (\text{Nom}_k)] \left( \lambda + \beta \frac{m K_{\text{Nom}}}{m} \right) + P_M[(X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}) | (\text{Top}_k)] \left( \lambda + \beta \frac{m K_{\text{Top}}}{m} \right) \right\}. \quad (13)$$

其中  $2\lambda + \beta = 1$ . 为保证两类知识的作用比例至少

为 20%, 选取  $\lambda = 0.2, \beta = 0.6$ .

标准知识  $K_{\text{Nom}}$  的关键作用在于保证变异操作后的个体可行, 即变异后个体的各变量维不超出标准知识记录的各变量维可行区域. 因此, 标准知识引导下的变异概率为

$$P_M[(X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}) | (\text{Nom}_k)] > 0. \quad (14)$$

拓扑知识对标准知识所记录的可行解区域采用二叉树结构划分. 每一代针对每个个体  $x_i(t)$ , 根据拓扑知识所记录的各个子区域  $\text{cell}_q(t)$  ( $q \in |\text{Top}|$ ) 中所包含的当前最优个体  $x_q^{\text{best}}(t)$  的适应值  $f(x_q^{\text{best}}(t))$ , 采取轮盘赌选择一个子区域  $\text{cell}_q(t)$  进行如下操作, 其中各个子区域被选择的概率均大于 0.

受拓扑知识影响的变异操作为: 若当前个体优于所选子区域的最优个体, 即对于最小化问题满足  $f(x_i(t)) < f(x_q^{\text{best}}(t))$ , 则变异操作是基于当前个体  $x_i(t)$  进行的; 否则, 基于所选子区域中的当前最优个体  $x_q^{\text{best}}(t)$  进行变异操作. 因此, 拓扑知识引导下的变异概率为

$$P_M\{[X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}] | (\text{Top}_k)\} = \sum_{q \in |\text{Top}|} P_M\{[X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}] | (\text{Top}_k)\} P\{\text{选取} \text{cell}_q(t)\}.$$

$$\text{选取} \text{cell}_q(t) \} P\{\text{选取} \text{cell}_q(t)\}. \quad (15)$$

其中对于  $\forall q$ , 都有  $P\{\text{选取} \text{cell}_q(t)\} > 0$ . 当  $x_{jk} \in (X_j \cap B)$  时, 满足  $\exists q$ , 使得

$$P_M\{[X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}] | \text{选取} \text{cell}_q(t)\} > 0. \quad (16)$$

由此可知

$$P_M\{[X_k(t+1) = x_{jk} | X_k(t) = x_{ik}] | (\text{Top}_k)\} > 0. \quad (17)$$

将式 (14) 和 (17) 代入 (13), 可得  $p_{ij}^M > 0$ .

考虑到文化算法中采用轮盘赌选择获得下一代个体, 因此选择算子引起的转移概率  $p_{ij}^S > 0$ , 有

$$P\{X(t+1) \cap B \neq \emptyset | X(t) = X_i\} > 0, X_i \cap B = \emptyset. \quad (18)$$

综上所述, 由式 (10) 和 (18) 可知, 文化算法中种群进化过程的转移概率满足推论 1 的条件. 由此可得, 文化算法进化过程的状态向量  $\{X(t)\}$  依概率弱收敛到全局最优解集  $Q$ .  $\square$

## 4 结 论

本文采用有限状态的 Markov 链和公理化模型, 证明了文化算法依概率弱收敛于全局最优解. 以上结果的证明主要依据文化算法中标准知识和拓扑知识对种群空间变异操作和选择操作的影响, 保证了个体

迁入满意集的概率大于 0. 状况知识的作用相当于最优保留策略, 保证了个体迁入满意集后不会迁出的概率为 1.

文化算法中的各类知识尤其是拓扑知识作用的本质在于在保证算法收敛的条件下能够提高种群的收敛速度. 因此, 文化算法的收敛速度分析将是下一步深入开展的工作.

## 参考文献(References)

- [1] Reynolds R G, Sverdluk W. Problem solving using cultural algorithms[C]. Proc of the 1st IEEE Conf on Evolutionary Computation. Orlando, 1994, 2: 645-650.
- [2] 郭一楠, 巩敦卫. 双层进化交互式遗传算法的知识提取与利用[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1329-1335. (Guo Y N, Gong D W. Extraction and utilization about knowledge in hierarchical interactive genetic algorithms[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1329-1335.)
- [3] Ho N B, Tay J C. GENACE: An effective cultural algorithm for solving the flexible job-shop problem[C]. Proc of 2004 Congress on Evolutionary Computation. Portland, 2004: 1759-1766.
- [4] 黄海燕, 顾幸生, 刘漫单. 求解约束优化问题的文化算法研究[J]. 自动化学报, 2007, 33(10): 1115-1120. (Huang H Y, Gu X S, Liu M D. Research on cultural algorithm for solving nonlinear constrained optimization[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(10): 1115-1120.)
- [5] Yi-nan G, Dun-wei G, Zhen-gui X. Hybrid optimization method based on genetic algorithm and cultural algorithm[C]. The 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, 2006: 3471-3475.
- [6] Xidong J, Reynolds R G. Using knowledge-based evolutionary computation to solve nonlinear constraint optimization problems: A cultural algorithm approach[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Washington DC, 1999: 1672-1678.
- [7] Coelho C L S, Mariani V C. An efficient particle swarm optimization approach based on cultural algorithm applied to mechanical design[C]. IEEE Conf on Evolutionary Computation. Vancouver, 2006: 1099-1104.
- [8] Ricardo L Becerra, Carlos A Coello Coello. Cultured differential evolution for constrained optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(33/34/35/36): 4303-4322.
- [9] Cruz A V, Pacheco M C, Marley Vellasco, et al. Cultural operators for a quantum-inspired evolutionary algorithm applied to numerical optimization problems[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3562: 1-10.