文章编号: 1001-0920 (2013) 01-0001-12

基于粗集的多准则决策分析

安利平[a], 陈增强[b]

(南开大学 a. 商学院，b. 信息技术科学学院，天津 300071)

摘 要: 多准则决策分析 (MCDA) 用于解决分类、分级、选择、排序和描述问题, 随着现实世界正变得由数据所驱动, 传统的 MCDA 方法面临着更多的挑战. 粗集方法是 MCDA 的有用工具, 在多准则决策问题的分类框架下, 从二元关系的角度对粗集方法的研究现状进行了评述, 包括二元关系的建立、定义粗糙近似、导出决策规则和规则应用, 并通过文献研究得出了基于粗集的 MCDA 方法的发展动态.

关键词: 多准则决策分析；粗集；二元关系；决策规则

中图分类号: N94 **文献标志码:** A

Multi-criteria decision analysis based on rough sets

AN Li-ping[a], *CHEN Zeng-qiang*[b]

(a. Business School，b. College of Information Technical Science，Nankai University，Tianjin 300071，China. Correspondent：AN Li-ping，E-mail：anliping@nankai.edu.cn)

Abstract: The objective of multi-criteria decision analysis (MCDA) is to solve one of the following typologies of problems: Classification, sorting, choice, ranking and description. As the world is becoming data-driven, the challenges of traditional MCDA methodologies are rapidly increasing. The rough set approach is a useful tool for MCDA. The objective is to review the rough-set-based research conducted on the framework of the MCDA from the perspective of binary relations, including the construction of binary relations, the definition of rough approximations, the inference of decision rules and the application of the rules. The development trends of MCDA methods based on rough sets are commented through the literature research.

Key words: multi-criteria decision analysis；rough sets；binary relations；decision rules

0 引 言

当决策者面对由多个准则描述的若干对象(方案)并需要作出某种决策时, 多准则决策分析(MCDA)旨在辅助决策者筹备并制订决策. 具体而言, MCDA 的目标是解决下列几类问题[1].

1) 分类或分级. 将一个对象集合指定到预先定义的类集合中, 其中分类问题的决策类别没有优劣顺序, 而分级问题的类别具有优劣顺序[2].

2) 选择. 从对象集合中挑选出最优的对象.

3) 排序. 将对象从最优到最劣按顺序排列.

4) 描述. 识别出对象的主要区分特征, 并根据这些特征描述对象.

在方案和准则的特征方面, 多准则决策问题又可分为多准则离散方案问题和多准则优化问题[3]两类, 本文主要研究多准则离散方案问题. 按解决该问题的方法可以分为两大学派, 多属性效用理论[4]和层次分析法[5]形成了美国学派, 以 ELECTRE[6]和 PROMETHEE[7]方法为代表的级别优先序理论形成了法国学派.

多属性效用理论的目的是建立某种效用函数, 该函数集结了每个准则上的局部偏好, 然后对该函数进行优化. 对于这类 MCDA 方法的研究主要集中在集结条件、集结函数的形式和集结函数的建立过程. 一旦集结函数确定后, 对象便成为可比较的, 从而可以解决前面提到的几类 MCDA 问题. 级别优先序理论的目的是根据对象在每个准则上的成对比较来建立级别优先关系, 进而表示决策者的偏好. 其中有些方法为了对决策者的偏好进行局部建模, 需要在级别优先关系建立之前引入准则层上的无差异阈值、偏好阈值或否决阈值, 然后通过加权平均将这种局部关系进

收稿日期: 2012-02-27；**修回日期:** 2012-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071079).

作者简介: 安利平(1971−), 男, 副教授, 博士, 从事粗集理论、商务智能等研究；陈增强(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、智能预测控制及其应用等研究.

行集结. 利用这种计算过程最终得到的级别优先关系可以用来制订建议方案, 从而解决多种 MCDA 问题.

多属性效用理论和级别优先序理论都需要决策者给出某种偏好信息, 例如准则之间的替代比、重要性权重或无差异、偏好和否决阈值等, 这对不熟悉 MCDA 方法学的决策者而言相当困难[2]. 此外, 这些方法得到的偏好模型对决策者而言并不明白易懂.

一般而言, 决策者更喜欢进行例证决策, 而不是根据某种特殊的函数模型及其参数去解释决策. 因此, 从决策者以前对某些对象的例证决策数据中导出偏好模型是很有吸引力的. 目前已提出多种通过分析决策数据导出偏好模型的方法[8-10]. Slovic[11] 的观点是通过寻找规则来制定决策, 决策规则对选择提供理由, 决策规则的方法一般遵循人工智能和归纳学习的范式, 根据某些决策数据提供的偏好信息导出, 因此, 决策规则包含的偏好信息来自于对决策者决策的观察, 是用决策者的语言表达的[12], 对于决策者而言, 决策规则更易理解. Slowinski 等[13]和 Greco 等[14]证明了由通常的非加性和非传递性效用函数表示的偏好、由级别优先关系表示的偏好以及由决策规则表示的偏好是等价的. 许多著名的多准则集结程序可以表示为决策规则模型, 在这些情况中, 决策规则将程序使用的合成集结公式分解为一套"if⋯then⋯"形式的语句来表示偏好, 因此, 决策规则方法与多属性效用理论以及级别优先序理论是一致的, 均以自然的、可理解的语言表示决策模型.

1 基于粗集理论的 MCDA 研究现状

由 Pawlak[15-16]提出的粗集理论是一种处理含糊性、不一致性和不确定性数据的数学工具, 其主要思想是在保持分类能力不变的前提下, 通过知识约简导出问题的决策规则. Pawlak 提出的经典粗集理论是建立在不可分辨关系基础上的, 许多研究者对经典粗集理论进行了扩展从而用于解决现实世界中的一些问题. Yao[17-18]研究了基于一般二元关系的粗集, 从二元关系的性质出发探讨了由二元关系生成的下近似和上近似的基本性质, 其研究主要集中在近似算子的构造方法和公理化方法. Chen 等[19]利用模糊相似关系代替不可分辨关系, 并将纯粹的粗集泛化为模糊粗集. Pomykala 等[20-23]提出了论域覆盖的概念, 进而构造出任意集合的上近似和下近似. Zhu[24]从拓扑的观点研究了基于覆盖的粗集. 目前, 粗集理论已成功应用于机器学习、知识发现与数据挖掘、模式识别、决策分析、本体近似等领域[25].

粗集理论是分析多种多准则决策问题的有用工具, 它以独特的方式回答了关于决策形势的解释和行动建议的问题. 粗集理论为 MCDA 领域引入了集合近似、约简、核、决策规则等概念, 不仅为决策分析问题提供了解释机制, 可以表示决策者的决策政策, 而且根据特定的决策环境给出了如何进行决策的推荐方案, 提供决策支持. 这些概念与多准则分类、分级、选择、排序和描述融为一体, 形成一种新的理论体系. 相对于经典的多属性效用理论和级别优先序理论, 基于粗集理论的 MCDA 具有以下特点.

1) 具有处理不良信息的能力.

在决策分析问题中, 经常涉及含糊的、不确定、不一致、含有空缺值的信息, 这可能由多种原因造成, 如属性或准则的区分能力有限和决策者的犹豫不决. 这种信息不能简单地视为噪声或误差, 它们可能传递着重要的决策信息, 应当在建立决策者偏好模型的过程中加以考虑. 粗集理论利用含有决策者偏好信息的决策数据建立偏好模型, 利用集合近似等概念处理不确定、不一致、含有空缺值的信息. 该方法导出的决策规则对于决策支持而言更为方便.

2) 具有处理多种数据的能力.

在基于粗集的 MCDA 中, 偏好模型体现为多种形式的决策规则, 决策规则可以同时包含定量属性、名义的或有序的符号型属性, 不必将具有偏好序的信息转化为数字信息, 保留了输入数据的顺序特征.

粗集理论利用信息表或决策表描述论域中的决策对象. 表的行对应对象, 列对应属性或准则. 信息表是一个四元组 $S=\{U,A,V,f\}$. 其中: U 是非空有限对象集合; A 是非空有限属性集合; V_a 是属性 a 的值域, $V=\bigcup\limits_{a\in A}V_a$; $f:U\times A\to V$ 是信息函数, 使得对于每个 $a\in A, x\in U$ 有 $f(x,a)\in V_a$. 决策表是形式为 $S=(U,C\bigcup\{d\},V,f)$ 的信息表. 其中: C 是条件属性集合, d 是决策属性且 $C\bigcap\{d\}=\varnothing$.

粗集理论中的概念与方法均以某种二元关系为基础, 二元关系不同, 对于粗集的解释也不相同[26]. 由 Pawlak 最初提出的粗集理论是基于不可分辨关系的, 这种二元关系满足自反性、传递性和对称性. 在此基础上, 许多研究者提出利用其他二元关系扩展粗集理论, 从而用于解决现实世界中的一些问题, 如相似关系、容错关系、支配关系等. 尽管这些扩展的粗集理论所依据的二元关系不同, 但它们在二元关系的基础上建立了基本思想一致的概念, 如集合的上近似、下近似、边界域、约简、核、属性重要性、近似质量、决策规则等.

下面根据 MCDA 问题的分类对基于粗集理论的 MCDA 研究现状进行分析.

1.1 粗集理论与多准则分类决策

这里需要区分一下描述方案的属性. 通常, 信息

表或决策表利用定性属性和定量属性描述对象: 定性属性可以是名义的或有序的, 名义属性是一种离散属性, 其值没有任何顺序, 有序属性的值具有偏好顺序; 定量属性可以是连续型或整数型. 根据 Greco 等[27]的描述, 利用下列符号表示 C 的互不相交的子集: $C^{=}$ 是名义属性子集, $C^{\succeq}$ 是有序属性子集, $C^{\sim}$ 是定量属性子集. 有

$$C^{=}\bigcup C^{\succeq}\bigcup C^{\sim}=C,\ C^{\succeq}\bigcap C^{=}=\varnothing,$$
$$C^{\succeq}\bigcap C^{\sim}=\varnothing,\ C^{=}\bigcap C^{\sim}=\varnothing.$$

对于任意 $P\subseteq C$, 分别利用 $P^{=}$, $P^{\succeq}$, $P^{\sim}$ 表示 P 的如下子集: 名义属性子集, 即 $P^{=}=P\bigcap C^{=}$; 有序属性子集, 即 $P^{\succeq}=P\bigcap C^{\succeq}$; 定量属性子集, 即 $P^{\sim}=P\bigcap C^{\sim}$. 决策属性 d 将 U 划分为有限个决策类, 令 $\mathrm{CL}=\{\mathrm{Cl}_t:t\in T\}(T=\{1,2,\cdots,n\})$ 为 U 的决策类集合, 使得每个 $x\in U$ 属于且仅属于一个类 $\mathrm{Cl}_t\in\mathrm{CL}$. 当需要考虑决策类的优劣顺序时, 可以规定: 对于所有 $r,s\in T$, 如果 $r>s$, 则 Cl_r 中的每个对象比 Cl_s 中的每个对象更优. 此外, 文献 [28-29] 研究了属性值为区间数的信息表. 文献 [28] 提出了这种信息表中的支配关系和支配原理, 并研究了粗糙近似的定义和性质、获取决策规则的模型.

基于不可分辨关系的经典粗集理论适合于解决由名义属性描述的分类问题[30], 分类问题的决策类别没有优劣顺序. 利用经典粗集理论获取决策规则的最一般方法是构造决策表的决策矩阵, 通过计算决策函数的主蕴涵得到每个对象的约简, 这种约简对应着一条最小条件描述数量的决策规则. 但是, 这种详尽的规则集可能包含噪声, 且容易出现过度匹配训练数据、对新对象的分类质量差等现象. 为了提高规则集的泛化能力, 许多学者提出了基于不同测度的规则获取方法, 如变精度粗集模型[31]、在给定的阈值下保持正域[32]、熵[33]、动态约简规则[34]、模糊不可分辨关系[35]等.

从决策表中导出的规则集可以用于对新对象的分类决策. 在经典粗集理论中, 根据决策规则和新对象的匹配情况采用不同的分类决策技术, 如投票法和对象跟踪法[36]. 在基于粗集的系统LERS[37]中考虑规则前件包含的属性信息来进行分类决策, 并且采用部分匹配法用于没有规则被激活的情况, Slowinski[38]提出了相近规则法用于无匹配规则时的分类决策.

对于群体分类决策问题, 当多个决策者对决策对象进行分类时, 其分类结果可能是不一致的. 利用粗集方法可以对各决策者的决策规则进行对比分析, 测度决策者之间的一致性程度, 发现和解释决策策略之间的协调部分和不协调部分, 评价决策者之间的冲突程度[30]. 安利平等[39]针对该问题, 提出了对不同决策者的经验决策数据进行综合分析、导出决策规则集并对其构成进行分析的方法, 以便解释决策者之间决策策略和决策结果的不一致现象. 毕文杰等[40]提出了一种能够从多个决策表中获取群体分类偏好的可变精度粗集方法, 该方法通过设定一系列粗集精度因子, 分析某种分类模式在单个决策表和多个决策表中得到支持的程度, 进而获得群体分类偏好.

基于不可分辨关系的经典粗集理论限制了某些现实应用问题的解决[41]. 例如, 实数值决策表和不完全决策表就不能直接被经典粗集方法处理. 在实数值决策表中, 对象之间的区别有时不明显, 尤其是当描述对象的数据是不精确的, 或即使是精确的, 但在特定的研究背景下, 微小的差异是没有意义的. 这种情况可以利用定义在论域上的相似关系[42-45]和容错关系[46-50]进行建模. 相似关系仅满足自反性, 容错关系满足自反性和对称性.

Slowinski 等[42-43]针对定量属性提出了一种仅满足自反性的相似关系. 对象 x 和 y 在定量属性上的相似关系为

$$\begin{aligned}S_c=\{&(x,y)\in U\times U:\\&|f(x,c)-f(y,c)|\leqslant\varepsilon_c(f(y,c))\},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 ε_c 是 $f(y,c)$ 的函数. 实际中, ε_c 的下列线性形式[42]足以刻画两个对象在定量属性上的微小差别: $\varepsilon_c(f(y,c))=\alpha_c f(y,c)+\beta_c$. 当 $\alpha_c=\beta_c=0$ 时, S_c 即为不可分辨关系. 根据 S_c 的定义, 除了对应于 $\alpha_c=0$ 的常数阈值, S_c 不满足对称性. 在此基础上可以定义 x 和 y 在属性集合 $P^{\sim}$ 上的相似关系为

$$S_P=\{(x,y)\in U\times U:xS_cy,\ \forall c\in P^{\sim}\}.$$

由于相似关系不满足对称性, 有 $S_P\neq S_P^{-1}$, 其中 S_P^{-1} 表示 S_P 的逆. 这种情况下, 用于定义粗糙近似的"知识颗粒"便有两种, 从而导致下列两种粗糙近似:

$$\begin{aligned}&\underline{P}(\mathrm{Cl}_t)=\{x\in U:S_P(x)\subseteq\mathrm{Cl}_t\},\\&\overline{P}(\mathrm{Cl}_t)=\bigcup_{x\in\mathrm{Cl}_t}S_P(x);\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\underline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t)=\{x\in U:S_P^{-1}(x)\subseteq\mathrm{Cl}_t\},\\&\overline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t)=\bigcup_{x\in\mathrm{Cl}_t}S_P^{-1}(x).\end{aligned}\tag{3}$$

安利平等[45]研究了基于相似关系的粗糙近似和含糊性之间的关系, 并给出了在信息表中建立相似关系的方法. 利用粗糙近似可以获取分类决策规则, 确定性决策规则的形式[44]为

$$\text{IF }\bigwedge_{e_k}(f(x,e_k)\in[\underline{x}(e_k),\overline{x}(e_k)]),\ \text{THEN }x\in\mathrm{Cl}_t,$$

其中 $[\underline{x}(e_k), \overline{x}(e_k)]$ 是利用区间交集运算得到的结果. 对于可能性规则, 其后件中 x 属于多于一个的决策类.

对于定量属性, 还可以考虑建立某种容错关系, 定义对象 x 和 y 在 $c \in P^{\sim}$ 上的距离 $d_c(x,y)$[49]为

$$d_c(x,y) = \frac{|f(c,x) - f(c,y)|}{\max\limits_z(f(c,z)) - \min\limits_z(f(c,z))}. \tag{4}$$

当 $d_c(x,y) \leqslant \varepsilon(c)$ 时, 对象 x 和 y 在属性 c 上被认为是相似的, 其中 $\varepsilon(c) \geqslant 0$ 是一个给定的实数.

利用式 (4) 可以在定量属性 c 上定义对象 x 和 y 之间的二元关系为

$$T_c = \{(x,y) \in U \times U : d_c(x,y) \leqslant \varepsilon(c)\}. \tag{5}$$

根据定义不难得出, T_c 满足自反性和对称性, 因此 T_c 是容错关系.

Kryszkiewicz[51-52]定义了一种不完全信息表的容错关系

$$T_P = \{(x,y) \in U \times U : \forall c \in P^{\sim}, c(x) = c(y) \text{ 或 } c(x) = * \text{ 或 } c(y) = *\}, \tag{6}$$

其中“$*$”表示空值.

在这种容错关系下的粗糙近似为

$$\underline{P}(\mathrm{Cl}_t) = \{x \in U : T_P(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t\},$$
$$\overline{P}(\mathrm{Cl}_t) = \{x \in U : T_P(x) \bigcap \mathrm{Cl}_t \neq \varnothing\}. \tag{7}$$

Kryszkiewicz 在这种二元关系和粗糙近似的基础上提出了一种属性约简方法, 其中被约简的信息对分类或决策而言是不必要的信息, 并且可以利用分辨函数的思想从不完全决策表中直接获取决策规则. 这种扩展的方法保持了经典方法的所有性质, 当决策表没有空缺值时, 该方法等同于经典方法.

对于同时包含定性属性和定量属性的决策表, An 等[50]研究了利用属性集合上的不可分辨关系、容错关系和相似关系集结而成的二元关系, 并定义了如下粗糙近似:

$$\underline{P}^l(\mathrm{Cl}_t) = \{x \in U : R_P^l(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t\},$$
$$\overline{P}^l(\mathrm{Cl}_t) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t} R_P^l(x),$$
$$\underline{P}^r(\mathrm{Cl}_t) = \{x \in U : R_P^r(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t\},$$
$$\overline{P}^r(\mathrm{Cl}_t) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t} R_P^r(x). \tag{8}$$

这种粗糙近似满足的性质包括粗糙包含、互补性、边界域恒等性和单调性等, 由此导出的确定性决策规则具有如下形式:

$$\Big\{\bigwedge_{e_k}[f(x,e_k) \in [\underline{x}(e_k), \bar{x}(e_k)]]\Big\} \bigwedge \Big\{\bigwedge_{a_i}[f(x,a_i) = r_{a_i}]\Big\} \to x \in \mathrm{Cl}_t, \tag{9}$$

其中 $[\underline{x}(e_k), \overline{x}(e_k)]$ 是利用区间交集运算得到的结果.

赵卫东等[53]也对粗集理论在不完全决策表中获取规则进行了拓展并给出了规则的置信度估计方法. Leung 等[29] 利用容错关系提出了一种从区间数决策表中获取分类决策规则的方法.

1.2 粗集理论与多准则分级决策

经典粗集理论不能处理具有优劣顺序的准则值域和决策类包含的顺序信息. 因此, Greco 等[54]提出了基于支配的粗集方法 (DRSA). 该方法在粗糙近似中将不可分辨关系替换为支配关系, 被近似的知识是决策类的上并集和下并集, 知识颗粒是利用支配关系定义的对象集合, 决策规则从决策类并集的粗糙近似中导出.

对于有序属性子集 $b \in P^{\succeq}$, 对象 x 和 y 在 b 上的级别优先关系[55]为

$$D_b^{\succeq} = \{(x,y) \in U \times U : f(x,b) \succeq f(y,b)\},$$

其中 $f(x,b) \succeq f(y,b)$ 表示关于有序属性 b, x 至少与 y 一样优. 支配关系是定义在属性集合上的级别优先关系, 属性子集 $P^{\succeq}$ 在 U 上的支配关系定义为

$$D_P^{\succeq} = \{(x,y) \in U \times U : x D_b^{\succeq} y, \forall b \in P^{\succeq}\}.$$

属性子集 $P^{\succeq}$ 在 U 上的被支配关系定义为

$$D_P^{\preceq} = \{(x,y) \in U \times U : y D_b^{\succeq} x, \forall b \in P\}.$$

在 DRSA 中, 被近似的集合分别称为决策类的上并集和下并集[12], 有

$$\mathrm{Cl}_t^{\succeq} = \bigcup_{s \geqslant t} \mathrm{Cl}_s,\ \mathrm{Cl}_t^{\preceq} = \bigcup_{s \leqslant t} \mathrm{Cl}_s.$$

其中: $t = 1, 2, \cdots, n$; $x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq}$ 表示“x 至少属于类 Cl_t”, $x \in \mathrm{Cl}_t^{\preceq}$ 表示“x 至多属于类 Cl_t”.

$\mathrm{Cl}_t^{\succeq}$ 关于 $P^{\succeq}$ 的 P-下近似和 P-上近似分别定义为

$$\underline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \{x \in U : D_P^{\succeq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\succeq}\},$$
$$\overline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq}} D_P^{\succeq}(x). \tag{10}$$

$\mathrm{Cl}_t^{\preceq}$ 关于 $P^{\succeq}$ 的 P-下近似和 P-上近似分别定义为

$$\underline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \{x \in U : D_P^{\preceq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\preceq}\},$$
$$\overline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\preceq}} D_P^{\preceq}(x). \tag{11}$$

基于支配关系的粗糙近似可以用于导出多准则分级决策规则[56-57], 规则的形式有以下 3 种.

1) 确定性 $D_{\succeq}$- 分级决策规则. 由决策类并集 $\mathrm{Cl}_t^{\succeq}$ 的 P- 下近似支持, 有

$$\text{IF } \bigwedge_j (f(x,b_j) \succeq r_{b_j}) \text{ THEN } x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq},$$

其中 $b_j \in P^{\succeq}$.

2) 确定性 $D_{\preceq}$- 分级决策规则. 由决策类并集 $\mathrm{Cl}_t^{\preceq}$

的 P- 下近似支持, 有

$$\text{IF} \bigwedge_j (f(x,b_j) \preceq r_{b_j}) \text{ THEN } x \in \text{Cl}_t^{\preceq},$$

其中 $b_j \in P^{\succeq}$.

3) 近似 $D_{\succeq\preceq}$- 分级决策规则. 由决策类并集的 P- 边界域支持, 有

$$\text{IF} \bigwedge_j (f(x,b_j) \succeq r_{b_j}) \text{ THEN } x \in \text{Cl}_{t-1} \bigcup \text{Cl}_t,$$

$$\text{IF} \bigwedge_j (f(x,b_j) \preceq r_{b_j}) \text{ THEN } x \in \text{Cl}_{t-1} \bigcup \text{Cl}_t,$$

其中 $b_j \in P^{\succeq}$.

当利用分级决策规则对新对象进行决策时, 文献 [58] 提出了一种分级决策方法, 可利用分级决策规则对一个对象进行分级. 令 $R(z)$ 为覆盖对象 z 的决策规则集, Cond_{ρ_i} 为满足规则 ρ_i 条件部分的对象集合. 根据对象 z 和覆盖 z 的决策规则集合 $R(z)$, 对来自 CL 的每个决策类 Cl_t 计算分值 $\text{Score}_R(\text{Cl}_t, z)$, 有

$$\text{Score}_R(\text{Cl}_t, z) = \text{Score}_R^{+}(\text{Cl}_t, z) - \text{Score}_R^{-}(\text{Cl}_t, z).$$

对象 z 被分配到 $\text{Score}_R(\text{Cl}_t, z)$ 取值最大的类 Cl_t 中. $\text{Score}_R^{+}(\text{Cl}_t, z)$ 定义为

$$\text{Score}_R^{+}(\text{Cl}_t, z) = \frac{|(\text{Cond}_{\rho 1} \bigcap \text{Cl}_t) \bigcup \cdots \bigcup (\text{Cond}_{\rho_k} \bigcap \text{Cl}_t)|^2}{|\text{Cond}_{\rho 1} \bigcup \cdots \bigcup \text{Cond}_{\rho_k}||\text{Cl}_t|},$$

其中 $\text{Cond}_{\rho 1}, \text{Cond}_{\rho 2}, \cdots, \text{Cond}_{\rho_k}$ 是满足规则 $\rho_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的条件部分的对象集合. $\text{Score}_R^{-}(\text{Cl}_t, z)$ 定义为

$$\text{Score}_R^{-}(\text{Cl}_t, z) = \frac{|(\text{Cond}_{\rho_{k+1}} \bigcap \text{Cl}_{\rho_{k+1}}^{\succeq}) \bigcup \cdots \bigcup (\text{Cond}_{\rho_l} \bigcap \text{Cl}_{\rho_l}^{\succeq}) \bigcup}{|\text{Cond}_{\rho_{k+1}} \bigcup \cdots \bigcup \text{Cond}_{\rho_l} \bigcup \text{Cond}_{\rho_{l+1}} \bigcup \cdots \bigcup} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{(\text{Cond}_{\rho_{l+1}} \bigcap \text{Cl}_{\rho_{l+1}}^{\preceq}) \bigcup \cdots \bigcup (\text{Cond}_{\rho_h} \bigcap \text{Cl}_{\rho_h}^{\preceq})|^2}{\text{Cond}_{\rho_h}||\text{Cl}_{\rho_{k+1}}^{\succeq} \bigcup \cdots \bigcup \text{Cl}_{\rho_l}^{\succeq} \bigcup \text{Cl}_{\rho_{l+1}}^{\preceq} \bigcup \cdots \bigcup \text{Cl}_{\rho_h}^{\preceq}|}.$$

其中: $\text{Cl}_{\rho_{k+1}}^{\succeq}, \text{Cl}_{\rho_{k+2}}^{\succeq}, \cdots, \text{Cl}_{\rho_l}^{\succeq}$ 是利用规则 $\rho_i (i = k+1, k+2, \cdots, l)$ 建议将对象 z 分配到的决策类的所有上并集; $\text{Cl}_{\rho_{l+1}}^{\preceq}, \text{Cl}_{\rho_{l+2}}^{\preceq}, \cdots, \text{Cl}_{\rho_h}^{\preceq}$ 是利用规则 $\rho_i (i = l+1, l+2, \cdots, h)$ 建议将对象 z 分配到的决策类的所有下并集.

当面对不完全决策表获取决策规则时, Greco 等[59]提出了一种满足传递性的扩展支配关系用于分析该不完全决策表. 对于有序属性子集 $b \in P^{\succeq}$, 主对象 x 支配参考对象 y 的关系定义为

$$D_b^{\succeq} = \{(x,y) \in U \times U : f(y,b) \neq *, \\ f(x,b) \succeq f(y,b) \text{或} f(x,b) = *\}. \quad (12)$$

主对象 x 关于 b 被参考对象 y 支配的关系定义为

$$D_b^{\preceq} = \{(x,y) \in U \times U : f(x,b) \neq *, \\ f(y,b) \succeq f(x,b) \text{或} f(y,b) = *\}. \quad (13)$$

这种支配关系具有方向性, 将主对象与参考对象进行比较, 要求参考对象没有空缺值. 利用这种支配关系定义的粗糙近似可以获取决策规则, 该方法对于完整决策表而言, 可还原为初始的 DRSA.

对于大型数据集的多准则分级问题, 决策类并集的下近似导出的决策规则一般仅被少数对象所支持. 针对这种情况, Greco 等[60]提出一种可变一致性 DRSA(VC-DRSA), 该方法放松了对象分级到下近似的条件, 在下近似中允许某种程度的不一致性. 在 VC-DRSA 中, 允许的不一致性水平是通过一致性水平参数控制的. 对于属性子集 $P^{\succeq}$, 如果

$$\text{card}(D_P^{\succeq}(x) \bigcap \text{Cl}_t^{\succeq}) / \text{card}(D_P^{\succeq}(x)) \geqslant l,$$

则 x 以一致性水平 l 属于 $\text{Cl}_t^{\succeq}$, $l \in (0, 1]$. 同理, 如果

$$\text{card}(D_P^{\preceq}(x) \bigcap \text{Cl}_t^{\preceq}) / \text{card}(D_P^{\preceq}(x)) \geqslant l,$$

则 x 以一致性水平 l 属于 $\text{Cl}_t^{\preceq}$. $\text{Cl}_t^{\succeq}$ 关于 $P^{\succeq}$ 的 P- 下近似和 P- 上近似分别为

$$\underline{P}^l(\text{Cl}_t^{\succeq}) = \left\{x \in \text{Cl}_t^{\succeq} : \frac{\text{card}(D_P^{\succeq}(x) \bigcap \text{Cl}_t^{\succeq})}{\text{card}(D_P^{\succeq}(x))} \geqslant l\right\},$$

$$\overline{P}^l(\text{Cl}_t^{\succeq}) = U - \underline{P}^l(\text{Cl}_{t-1}^{\preceq}).$$

$\text{Cl}_t^{\preceq}$ 关于 $P^{\succeq}$ 的 P- 下近似和 P- 上近似分别为

$$\underline{P}^l(\text{Cl}_t^{\preceq}) = \left\{x \in \text{Cl}_t^{\preceq} : \frac{\text{card}(D_P^{\preceq}(x) \bigcap \text{Cl}_t^{\preceq})}{\text{card}(D_P^{\preceq}(x))} \geqslant l\right\},$$

$$\bar{P}^l(\text{Cl}_t^{\preceq}) = U - \underline{P}^l(\text{Cl}_{t+1}^{\succeq}).$$

许多分级决策问题同时涉及定性属性和定量属性, 从而构成异类准则决策表. 对于这类决策问题, Greco 等[27]提出了不可分辨-相似-支配关系, 定义了集合近似和近似精度等概念, 并描述了在这种关系下决策规则的形式. An 等[55]进一步提出, 对于名义属性, 可以定义不可分辨关系和容错关系; 对于有序属性, 可以定义容错关系和级别优先关系; 而对于定量属性, 则可以定义相似关系、级别优先关系和容错关系. 将属性子集上建立的这些二元关系集结即可得到能够定义粗糙近似的“知识颗粒”. 令 $S = (U, C \bigcup \{d\}, V, f)$ 为一决策表, $C^{=} \subseteq C$, $C^{\succeq} \subseteq C$, $C^{\sim} \subseteq C$, $P \subseteq C$, $P^{=} = P \bigcap C^{=}$, $P^{\succeq} = P \bigcap C^{\succeq}$, $P^{\sim} = P \bigcap C^{\sim}$. 其中: I_P 为定义在名义属性子集 $P^{=}$ 上的不可分辨关系, T_P 为定义在名义属性、有序属性和定量属性上的容错关系的集结, $D_P^{\succeq}$ 和 $D_P^{\preceq}$ 分别为定义在有序属性和定量属性上的级别优先关系集结形成的支配关系和被支配关系, S_P 为定义在定量属性上的相似关系, S_P^{-1} 为 S_P 的逆. 利用二元关系的集结, 可以得到如下的 P 在 U 上的全局二元关系:

$$R_P^{-1\succeq} = I_P \bigcap T_P \bigcap D_P^{\succeq} \bigcap S_P^{-1},$$

$$R_P^{\succeq} = I_P \bigcap T_P \bigcap D_P^{\succeq} \bigcap S_P,$$
$$R_P^{-1\preceq} = I_P \bigcap T_P \bigcap D_P^{\preceq} \bigcap S_P^{-1},$$
$$R_P^{\preceq} = I_P \bigcap T_P \bigcap D_P^{\preceq} \bigcap S_P.$$

上并集 $\mathrm{Cl}_t^{\succeq}$ 的 P^{-1}- 下近似和 P^{-1}- 上近似分别为

$$\underline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \{x \in U : R_P^{-1\succeq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\succeq}\},$$
$$\overline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq}} R_P^{-1\succeq}(x).$$

$\mathrm{Cl}_t^{\succeq}$ 的 P- 下近似和 P- 上近似分别为

$$\underline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \{x \in U : R_P^{\succeq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\succeq}\},$$
$$\overline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\succeq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq}} R_P^{\succeq}(x).$$

类似地, 利用 $R_P^{-1\preceq}$ 和 $R_P^{\preceq}$, 可以定义下并集 $\mathrm{Cl}_t^{\preceq}$ 的 P^{-1}- 下近似、P^{-1}- 上近似、P- 下近似和 P- 上近似分别为

$$\underline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \{x \in U : R_P^{-1\preceq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\preceq}\},$$
$$\overline{P}^{-1}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\preceq}} R_P^{-1\preceq}(x),$$
$$\underline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \{x \in U : R_P^{\preceq}(x) \subseteq \mathrm{Cl}_t^{\preceq}\},$$
$$\overline{P}(\mathrm{Cl}_t^{\preceq}) = \bigcup_{x \in \mathrm{Cl}_t^{\preceq}} R_P^{\preceq}(x).$$

利用这种粗糙近似, 可以得到如下形式的决策规则[61].

1) 确定性 $D_{\succeq}$- 分级决策规则:

$$\text{IF } \Big(\bigwedge_i (f(x,a_i) = r_{a_i})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_j (f(x,b_j) \succeq r_{b_j})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_k (f(x,c_k) \in [\underline{x}(c_k), \overline{x}(c_k)])\Big),$$
$$\text{THEN } x \in \mathrm{Cl}_t^{\succeq}.$$

其中: $a_i \in P^{=}$, $b_j \in P^{\succeq}$, $c_k \in P^{\sim}$.

2) 确定性 $D_{\preceq}$- 分级决策规则:

$$\text{IF } \Big(\bigwedge_i (f(x,a_i) = r_{a_i})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_j (f(x,b_j) \preceq r_{b_j})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_k (f(x,c_k) \in [\underline{x}(c_k), \overline{x}(c_k)])\Big),$$
$$\text{THEN } x \in \mathrm{Cl}_t^{\preceq}. \tag{14}$$

其中: $a_i \in P^{=}$, $b_j \in P^{\succeq}$, $c_k \in P^{\sim}$.

3) 近似 $D_{\succeq\preceq}$- 分级决策规则 ($D_{\succeq\preceq}$- 分级决策规则有以下 2 种形式):

$$\text{IF } \Big(\bigwedge_i (f(x,a_i) = r_{a_i})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_j (f(x,b_j) \succeq r_{b_j})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_k (f(x,c_k) \in [\underline{x}(c_k), \overline{x}(c_k)])\Big),$$
$$\text{THEN } x \in \mathrm{Cl}_{t-1} \bigcup \mathrm{Cl}_t;$$
$$\text{IF} \Big(\bigwedge_i (f(x,a_i) = r_{a_i})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_j (f(x,b_j) \preceq r_{b_j})\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_k (f(x,c_k) \in [\underline{x}(c_k), \overline{x}(c_k)])\Big),$$
$$\text{THEN } x \in \mathrm{Cl}_{t-1} \bigcup \mathrm{Cl}_t.$$

其中: $a_i \in P^{=}$, $b_j \in P^{\succeq}$, $c_k \in P^{\sim}$.

Greco 等对 DRSA 也进行了其他一些扩展研究, 包括模糊支配关系和相似关系[12, 62]、随机支配关系[63]等. 目前, DRSA 已经成为利用粗集解决 MCDA 问题的主流方法之一, 许多学者围绕该方法进行了多方面的研究.

Susmaga 等[64]提出了一种约简生成算法, 该算法同时适用于 DRSA 和经典粗集理论. Dembczynski 等[65]将布尔推理和 DRSA 相结合, 用于搜索每个对象的约简, 从而可以获取所有最小决策规则集合, 该方法可以用于生成确定性和可能性的规则. 贾修一等[66]针对DRSA的规则生成算法存在运行效率低的问题, 提出了一种基于多个优势差别矩阵的规则生成算法, 在得到精简规则集的同时, 能够提高规则生成效率. Dembczynski 等[67]还利用 DRSA 解决层次分级问题.

Shao 等[68]提出一种利用 DRSA 在不完全决策表中直接获取分级决策规则和约简的方法, 该方法主要通过构建决策表的分辨矩阵和分辨函数来实现. 国内一些学者[69-70]针对不完全决策表提出了广义扩展优势 (支配) 关系的概念, 然后在这种关系下得到知识的粗糙近似并给出分级决策规则. 骆公志等[71]针对不完全决策表和扩展优势关系的局限性, 提出了限制优势关系的概念, 并在限制优势关系下得到知识的粗糙近似并给出分级决策规则.

毕文杰等[72]针对多个决策者偏好集结的群体分级决策问题对 DRSA 进行了扩展, 提出了多个决策者最小偏好组合的概念. 在给定一致性标准的情况下, 通过求解最小偏好组合的下近似, 得到群体的偏好.

Blaszczynski 等[58]提出了如何利用决策规则对一个对象进行分级, 他们将被分级对象分为没有规则适用、仅有一条规则适用、多条规则适用 3 种情况, 针对不同的情况, 通过定义一个分值来实现分级的目的. Dembczynski 等[73]也提出了一种分级算法, 特点是不需要利用导出的规则.

1.3 粗集理论与多准则选择与排序

对于多准则选择与排序问题, 研究者主要在两方面对经典粗集理论进行了扩展[74-76]: 将不可分辨关系替换为支配关系; 将决策表替换为成对比较表. 设用于评价方案集合 A 中方案的准则集合为 C, 对于任意准则 $q \in C$, 根据 q 对 A 中方案的评价, T_q 为定义在 A 上的二元关系集合, 使得对每个 $(x, y) \in A \times A$, 均有一个二元关系 $t \in T_q$ 适用.

成对比较表定义为信息表 $S_{\rm PCT}=(\boldsymbol{B},C\bigcup\{d\},T_C\bigcup T_d,g)$. 其中: $\boldsymbol{B}\subseteq A\times A$ 是参考方案成对比较的例证集合; $T_C=\bigcup\limits_{q\in C}T_q$; d 是与综合成对比较相应的决策; $g:\boldsymbol{B}\times(C\bigcup\{d\})\to T_C\bigcup T_d$ 是全函数, 使得对于每个 $(x,y)\in A\times A$ 和 $q\in C$ 有 $g[(x,y),q]\in T_q$, 且对于每个 $(x,y)\in\boldsymbol{B}$ 有 $g[(x,y),d]\in T_d$.

在成对比较表中, 集合 T_d 由定义在 A 上的两类二元关系组成: 1) x 级别优于 y, 记为 xSy 或 $(x,y)\in S$; 2) x 级别不优于 y, 记为 xS^cy 或 $(x,y)\in S^c$, 且 $S\bigcup S^c=\boldsymbol{B}$.

成对比较表的每行表示一个对象二元组, 由准则上的二元关系描述, 从而可以在多准则选择与排序问题中对综合偏好关系进行近似. 利用 DRSA 分析成对比较表, 可以定义基于支配关系的粗糙近似. 设 $P\subseteq C$, $(x,y)\in A\times A$, $\boldsymbol{P}$- 支配集合和 $\boldsymbol{P}$- 被支配集合分别定义如下: 支配 (x,y) 的方案对集合为

$$D_P^+(x,y)=\{(w,z)\in A\times A:(w,z)D_P(x,y)\};$$

被 (x,y) 支配的方案对集合为

$$D_P^-(x,y)=\{(w,z)\in A\times A:(x,y)D_P(w,z)\}.$$

P- 支配集合和 P- 被支配集合是定义粗糙近似的"知识颗粒", 分别用于表达综合级别优先关系 S 和 S^c 的 P- 下近似和 P- 上近似, 即

$$\underline{P}(S)=\{(x,y)\in\boldsymbol{B}:D_P^+(x,y)\subseteq S\},$$
$$\overline{P}(S)=\bigcup_{(x,y)\in S}D_P^+(x,y),$$
$$\underline{P}(S^c)=\{(x,y)\in\boldsymbol{B}:D_P^-(x,y)\subseteq S^c\},$$
$$\overline{P}(S^c)=\bigcup_{(x,y)\in S^c}D_P^-(x,y).$$

利用 S 和 S^c 的近似便可导出以决策规则为形式的偏好信息的泛化描述. 决策规则具有下述形式.

1) $D_{\succeq}$- 决策规则, 由 S 的 $\boldsymbol{P}$- 下近似支持.

IF $xP_{q_1}^{\succeq h(q_1)}y$ 且 $xP_{q_2}^{\succeq h(q_2)}y$ 且 $\cdots$ 且 $xP_{q_e}^{\succeq h(q_e)}y$ 且 $f(x,q_{e+1})\succeq r_{q_{e+1}}$ 且 $f(y,q_{e+1})\preceq s_{q_{e+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $f(x,q_p)\succeq r_{q_p}$ 且 $f(y,q_p)\preceq S_{q_p}$,

THEN xSy.

其中: $q_1,q_2,\cdots,q_e$ 是定量属性; $q_{e+1},q_{e+2},\cdots,q_p$ 是有序属性; $xP_q^{\succeq h(q)}y$ 表示"关于属性 q, x 至少以程度 h 优于 y".

2) $D_{\preceq}$- 决策规则, 由 S^c 的 $\boldsymbol{P}$- 下近似支持.

IF $xP_{q_1}^{\preceq h(q_1)}y$ 且 $xP_{q_2}^{\preceq h(q_2)}y$ 且 $\cdots$ 且 $xP_{q_e}^{\preceq h(q_e)}y$ 且 $f(x,q_{e+1})\preceq r_{q_{e+1}}$ 且 $f(y,q_{e+1})\succeq s_{q_{e+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $f(x,q_p)\preceq r_{q_p}$ 且 $f(y,q_p)\succeq s_{q_p}$,

THEN xS^cy.

其中: $q_1,q_2,\cdots,q_e$ 是定量属性; $q_{e+1},q_{e+2},\cdots,q_p$ 是有序属性; $xP_q^{\preceq h(q)}$ 表示"关于 q, x 至多以程度 h 优于 y".

3) $D_{\succeq\preceq}$- 决策规则, 由 S 和 S^c 的 $\boldsymbol{P}$- 边界域支持.

IF $xP_{q_1}^{\succeq h(q_1)}y$ 且 $xP_{q_2}^{\succeq h(q_2)}y$ 且 $\cdots$ 且 $xP_{q_e}^{\succeq h(q_e)}y$ 且 $xP_{q_{e+1}}^{\preceq h(q_{e+1})}y$ 且 $xP_{q_{e+2}}^{\preceq h(q_{e+2})}y$ 且 $\cdots$ 且 $xP_{q_f}^{\preceq h(q_f)}y$ 且 $f(x,q_{f+1})\succeq r_{q_{f+1}}$ 且 $f(y,q_{f+1})\preceq s_{q_{f+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $f(x,q_g)\succeq r_{q_g}$ 且 $f(x,q_g)\preceq s_{q_g}$ 且 $f(x,q_{g+1})\preceq r_{q_{g+1}}$ 且 $f(y,q_{g+1})\succeq s_{q_{g+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $f(x,q_p)\preceq r_{q_p}$ 且 $f(x,q_g)\succeq s_{q_g}$,

THEN xSy 或 xS^cy.

其中: $q_1,q_2,\cdots,q_e,q_{e+1},\cdots,q_f$ 是定量属性; $q_{f+1},q_{f+2},\cdots,q_g,q_{g+1},\cdots,q_p$ 是有序属性.

An 等[77]提出了决策矩阵和决策函数的概念来生成最小决策规则. 在利用决策规则对新对象进行选择或排序时, 根据对象匹配规则的情况, 可以得到一种 4- 值级别优先关系, 在此基础上定义净流量分值用于最终的选择或排序决策[74]. 对于每个对象 $x\in U$, 定义净流量分值为

$$S_{\rm nf}(x)=S^{++}(x)-S^{+-}(x)+S^{-+}(x)-S^{--}(x).$$

其中

$S^{++}(x)=$
card($\{y\in M$: 至少有一条决策规则确认 $xSy\}$),

$S^{+-}(x)=$
card($\{y\in M$: 至少有一条决策规则确认 $ySx\}$),

$S^{-+}(x)=$
card($\{y\in M$: 至少有一条决策规则确认 $yS^Cx\}$),

$S^{--}(x)=$
card($\{y\in M$: 至少有一条决策规则确认 $xS^Cy\}$).

对于排序问题, 可以根据 $S_{\rm nf}(x)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 上的拟序确定. 对于选择问题, 选择的对象 x^* 满足条件 $S_{\rm nf}(x^*)=\max\limits_{x\in M}\{S_{\rm nf}(x)\}$.

Fortemps 等[78]进一步考虑了一种分等级的综合偏好关系, 并利用 VC-DRSA 模型获取具有概率特征的决策规则, 利用可信度描述对象二元组匹配决策规则时的一致性水平. 在进行选择和排序时, 提出了一种加权模糊的净流量分值.

Sai 等[79]利用粗集和布尔模型导出确定性或可能性的规则进行排序, 同时得到准则重要性和冗余度的信息. 该方法的特点是将问题转化为现有的数据挖掘问题, 从而可以直接应用现有的数据挖掘算法来挖掘排序规则. 但这种方法只提取了决策表中的部分信

息, 信息的流失将会带来新的不一致性, 最终影响排序规则的正确性[80]. 因此, 江洋溢等[80]提出了一种新的定量转换法, 将决策表转换为成对比较表, 在此基础上利用粗集方法进行规则获取并得到了满意的结果.

任剑等[81]针对有偏好信息且准则权重信息不确定的随机多准则决策问题, 提出了一种基于粗集的随机多准则排序方法. 该方法首先对准则集合进行约简, 然后计算各方案的净流量分值并按照其大小确定方案的最终排序. 刘学生等[82] 针对多准则决策中准则值为区间数情况下的区间数排序问题, 给出了区间数的粗集表示、区间数的粗集排序方法及其性质.

1.4 粗集理论与多准则描述、冲突分析

粗集理论利用决策表描述多准则决策问题(分类、分级、选择与排序), 在此基础上可以评价特定准则的重要性; 发现准则之间的依赖性; 在不改变决策质量的前提下, 建立准则的最小子集——约简, 并计算核; 从决策表中去除冗余准则.

粗集理论中的约简计算在多准则描述和决策规则获取方面都起着重要的作用. 然而, 寻找所有约简或者最小约简都已被证明是NP难题. 许多学者提出了计算约简的启发式算法, 如Johnson贪婪算法[83]、属性重要性的启发式算法[84]、互信息约简算法[85]、遗传算法[86-87]、动态约简[34]、二维约简算法[88]等. 对于DRSA中的约简计算问题, 徐伟华等[89]引入了优势矩阵和目标分配矩阵的概念, 建立了优势关系下信息表分配约简的矩阵算法, 优点是易于求解数据复杂的信息表的所有分配约简. 骆公志等[90]借鉴变精度粗集理论提出了一种新的条件信息熵, 基于新的条件信息熵设计了一种变精度优势粗集属性约简的择优算法. 总之, 约简计算问题在基于不可分辨关系的经典粗集理论中研究得较为深入, 而目前对基于其他二元关系的同类问题研究中, 多数研究集中在根据定义提出计算约简和决策规则的基本方法, 因此有待于进一步研究.

冲突分析与解决在许多领域中扮演着重要角色. 解决冲突问题的数学工具有多种, 但是不存在一种通用的冲突分析理论, 描述冲突局势的数学模型均有较强的领域依赖性[91]. Pawlak[91-92]提出一种基于粗集理论的冲突分析方法, 在这种方法中, 冲突局势利用信息表$S = \{U, A, V, f\}$来表示, U中的元素为所有局中人, A的元素为各争端问题, $V_a = \{-1, 0, +1\}$, $-1, 0$和$+1$分别代表某局中人对争端$a \in A$的反对、中立和赞成. Pawlak定义了局中人在特定争端和争端集合上的关系. 安利平等[93-94]提出了冲突矩阵的概念用于联盟确定, 并进行了实力- 策略分析和谈判分析.

因为Pawlak的模型不能确定冲突的原因, 所以没有一种方式来定义可以避免冲突的局势. 此外, 该模型也不能确信局中人投票的议题是否代表了每个局中人关心的议题. 由此, Deja[95]提出了一种冲突分析模型来研究冲突的原因、如何达成一致以及是否存在有可能使所有局中人都满意的解. 高俊山等[96-97]利用Deja的思想, 对Pawlak冲突模型进行了改进. 在新模型中, 每个局中人给出相应的信息表, 领域专家为冲突系统提供可行方案, 然后定义局中人的局部可行方案, 进而定义全局可行方案. 此外, 说明了各争端之间可能存在相互制约的关系, 提出了冲突系统的约束条件, 给出了冲突系统的可行方案及其求解算法.

Skowron等[98]提出了一种基于粗集的需求确定模型, 该模型利用冲突关系表示需求协定, 并利用冲突图分析冲突局势、冲突的程度和联盟. Ramanna等[99]在此基础上对模型进行了扩展, 扩展的模型利用条件属性集合表示一个复杂局势的不同维度, 利用决策属性表示复杂的决策. 对复杂局势的深入分析是通过以下两点完成的: 1) 利用近似空间中的粗糙覆盖函数来测度对于谈判指标的相似需求集合的一致性程度; 2) 利用风险模式可以测度两种观点冲突程度的偏差, 这是通过布尔推理从冲突数据中计算距离约简而实现的.

2 发展动态分析

自从经典粗集理论应用于MCDA领域后就促进了二者的不断发展. 一方面, 粗集理论本身的扩展研究使得该理论可以解决的MCDA问题不断增多; 另一方面, MCDA领域的问题也对粗集理论提出了进一步扩展的要求.

从文献研究中提取的有代表性的MCDA领域问题及其相应的有代表性的粗集解决方法如下.

1) 分类. 基本方法有基于不可分辨关系的经典粗集方法[15-16,30]; 扩展问题及其代表性方法有针对不完全决策表的基于容错关系的粗集方法[51-52]、针对实数值决策表的基于相似关系的粗集方法[42-45]和基于容错关系的粗集方法[46-50]、针对区间数决策表的基于容错关系的粗集方法[29]、针对群体分类决策的基于不可分辨关系的粗集方法[30,39]和变精度粗集模型[40].

2) 分级. 基本方法有基于支配的粗集方法(DRSA)[12,54,56-57]; 扩展问题及其代表性方法有针对不完全决策表的基于扩展支配关系的粗集方法[59,68-71]、针对异类准则决策表的基于不可分辨-相似-支配关系的粗集方法[27,55]、针对群体分级决策的基于扩展支配关系的粗集方法[72]、针对大型数据集

的可变一致性 DRSA(VC-DRSA)[60].

3) 选择与排序. 基本方法有基于支配关系的粗集方法[74-77]和可变一致性 DRSA[78]; 扩展问题及其代表性方法有针对准则值为随机变量的基于粗集的随机支配方法[81]、针对准则值为区间数的基于不可分辨关系的粗集方法[82].

4) 冲突分析. 基本方法有基于不可分辨关系的粗集方法[91-99].

5) 描述. 方法有取决于分类、分级、排序与选择的方法及其扩展研究[34,83-90].

需要说明的一点是, 这里几乎没有涉及粗集理论和其他一些不确定性理论相互融合的内容, 如概率论、D-S 证据决策理论、模糊集理论、判别分析理论、神经网络、遗传算法、Petri 网等. 这主要是因为本文首先注重将粗集的基础理论与 MCDA 的基本问题相融合, 在此基础上可进一步考虑与其他智能计算方法相结合.

从时间顺序来看, 20 世纪 90 年代中期以前的文献集中于研究经典粗集理论与分类问题, 后来出现了利用容错关系、相似关系等扩展的粗集方法研究分类问题. 90 年代中后期出现了利用 DRSA 研究分级问题的文献. 2000 年之后, 经典粗集理论的研究与应用越来越少, 而各种扩展粗集方法的研究与应用越来越多. 同时, 在 MCDA 领域利用粗集研究各种分级问题的文献也越来越多. 目前, 利用粗集理论研究选择、排序和冲突分析及其扩展问题的文献数量较少, 可以预测, 今后将会有更多的文献集中于研究这些问题. 对于多准则描述问题, 则取决于上述粗集方法的进一步发展和应用.

3　结　论

多准则决策问题广泛存在于各种领域. 随着海量异构数据、分布式和商务智能等环境因素的快速发展, 经典的 MCDA 理论将面临更多的挑战. 粗集理论为解决多种多准则决策问题提供了有效方法. 理论为 MCDA 领域引入了集合近似、约简、核、确定性和可能性规则等新型概念和计算方法, 不仅对决策分析问题提供了解释机制(如发现重要的事实和关系), 而且利用决策规则形式的偏好模型可以表示决策者的决策政策, 提供决策支持. 本文综述了基于粗集的 MCDA 的分类框架和研究现状, 分析了当前研究中存在的问题, 并说明了未来研究的关键问题和发展方向.

参考文献(References)

[1] Roy B. Multicriteria methodology for decision aiding[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishing, 1996: 19-30.

[2] Zopounidis C, Doumpos M. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review[J]. European J of Operational Research, 2002, 138 (2): 229-246.

[3] Wallenius J, Dyer J S, Fishburn P C, et al. Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: Recent accomplishments and what lies ahead[J]. Management Science, 2008, 54(7): 1336-1349.

[4] Keeney R L, Raiffa H. Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs[M]. New York: Wiley, 1976: 131-218.

[5] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw Hill, 1980: 1-287.

[6] Roy B. How outranking relation helps multiple criteria decision making[C]. Multiple Criteria Decision Making. Columbia: University of South Carolina Press, 1973: 179-201.

[7] Brans J P, Mareschal B, Vincke P. PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis[C]. Operational Research’84. North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1984: 477-490.

[8] Jacquet-Lagrèze E. An application of the UTA discriminant model for the evaluation of R&D projects[C]. Advances in Multicriteria Analysis. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995: 203-211.

[9] Mousseau V, Slowinski R. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples[J]. J of Global Optimization, 1998, 12(2): 157-174.

[10] Zopounidis C, Doumpos M. A multicriteria decision aid methodology for sorting decision problems: The case of financial distress[J]. Computational Economics, 1999, 14(3): 197-218.

[11] Slovic P. Choice between equally-valued alternatives[J]. J of Experimental Psychology: Human Perception Performance, 1975, 1(3): 280-287.

[12] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough set theory for multicriteria decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.

[13] Slowinski R, Greco S, Matarazzo B. Axiomatization of utility, outranking and decision-rule preference models for multiple-criteria classification problems under partial inconsistency with the dominance principle[J]. Control & Cybernetics, 2002, 31(4): 1005-1035.

[14] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Axiomatic characterization of a general utility function and its particular cases in terms of conjoint measurement and rough-set decision rules[J]. European J of Operational Research, 2004, 158(2): 271-292.

[15] Pawlak Z. Rough set[J]. Int J of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[16] Pawlak Z. Rough sets theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991: 1-229.

[17] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 109(1/2/3/4): 21-47.

[18] Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. Information Sciences, 1998, 111(1-4): 239-259.

[19] Chen D G, Zhang W X, Yeung D, et al. Rough approximations on a complete completely distributive lattice with applications to generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2006, 176(13): 1829-1848.

[20] Pomykala J A. Approximation operations in approximation space[J]. Bulletin of the Polish Academy of Science, 1987, 35(9/10): 653-662.

[21] Tsang E, Cheng D, Lee J, et al. On the upper approximations of covering generalized rough sets[C]. Proc of 2004 Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Kowloon: Hong Kong Polytech University, 2004: 4200-4203.

[22] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152(1): 217-230.

[23] Zhu W, Wang F Y. On three types of covering-based rough sets[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144.

[24] Zhu W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177 (6): 1499-1508.

[25] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 3-27.

[26] 安利平. 基于粗集理论的多属性决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 4-9.
(An L P. Multi-attribute decision analysis based on rough set theory[M]. Beijing: Science Press, 2008: 4-9.)

[27] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria[J]. European J of Operational Research, 2002, 138(2): 247-259.

[28] Dembczynski K, Greco S, Slowinski R. Rough set approach to multiple criteria classification with imprecise evaluations and assignments[J]. European J of Operational Research, 2009, 198(2): 626-636.

[29] Leung Y, Fischer M M, Wu W Z, et al. A rough set approach for discovery of classification rules in interval-valued information systems[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2008, 47(2): 233-246.

[30] Pawlak Z, Slowinski R. Rough set approach to multi-attribute decision analysis[J]. European J of Operational Research, 1994, 72(3): 443-459.

[31] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. J of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.

[32] Skowron A. Synthesis of adaptive decision systems from experimental data[C]. Proc 5th Scandinavian Conf on Artificial Intelligence. Norway: Trondheim, 1995: 220-238.

[33] Slezak D. Approximate reducts in decision tables[C]. Proc of the 6th Int Conf Information Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems. Spain: Granada, 1996: 1159-1164.

[34] Bazan G J, Skowron A, Synak P. Dynamic reducts as a tool for extracting laws from decision tables[C]. Proc Symposiums on Methodologies for Intelligent Systems. Berlin: Spinger-Verlag, 1994: 346-355.

[35] Dubois D, Prade H. Putting rough sets and fuzzy sets together[C]. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992: 203-233.

[36] ϕhrn A. Discernibility and rough sets in medicine: Tools and applications[D]. Trondheim: Department of Computer and Information Science, Norwegian University of Science and Technology, 1999: 66-70.

[37] Grzymala-Busse W J. LERS－A system learning from examples based on rough sets[C]. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of Rough Sets Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992: 3-18.

[38] Slowinski R. Rough set learning of preferential attribute in multi-criteria decision making[C]. Proc of the 7th Int Symposium on Methodology for Intelligent Systems. Norway: Trondheim, 1993: 642-651.

[39] 安利平, 陈增强, 袁著祉. 基于粗集理论的多属性决策分析[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 294-298.
(An L P, Chen Z Q, Yuan Z Z. Multi-attribute decision analysis based on rough set theory[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 294-298.)

[40] 毕文杰, 陈晓红. 一种基于可变精度粗糙集的群体分类决策方法[J]. 系统工程, 2007, 25(8): 94-97.
(Bi W J, Chen X H. A group classification method based on variable precision rough sets[J]. Systems Engineering, 2007, 25(8): 94-97.)

[41] Wang C Z, Wu C X, Chen D G. A systematic study on attribute reduction with rough sets based on general binary relations[J]. Information Sciences, 2008, 178(9): 2237-2261.

[42] Slowinski R, Vanderpooten D. Similarity relations as a basis for rough approximations[C]. Advances in Machine Intelligence and Soft computing IV. Durham: Duke University Press, 1997: 17-33.

[43] Slowinski R, Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12(2): 331-336.

[44] An L P, Tong L Y. Binary relations as a basis for rule induction in presence of quantitative attributes[J]. J of Computers, 2010, 5(3): 440-447.

[45] 安利平, 陈增强. 基于相似关系的集合近似及其含糊性解释[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2384-2388.
(An L P, Chen Z Q. Set approximation and its interpretation on vagueness based on similarity relations[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2384-2388.)

[46] Cattaneo G. Abstract approximation spaces for rough theories[C]. Rough Sets in Knowledge Discovery 1: Methodology and Applications. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998: 59-98.

[47] Stepaniuk J, Kretowski M. Decision system based on tolerance rough sets[C]. Proc of the 4th Int Workshop on Intelligent Information Systems. Poland: Augustow, 1995: 62-73.

[48] Skowron A, Stepaniuk J. Tolerance approximation spaces[J]. Fundamenta Informaticae, 1996, 27(2/3): 245-253.

[49] An L P, Tong L Y. Construction of binary relations in presence of multiple attributes[C]. Proc of the 11th Int Conf on Informatics and Semiotics in Organisations. Marrickville: Aussino Academic Publishing House, 2009: 40-46.

[50] An L P, Chen Z Q. Tolerance and similarity relations in definition of rough approximations[J]. ICIC Express Letters, 2010, 4(5): 1515-1520.

[51] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112(1/2/3/4): 39-49.

[52] Kryszkiewicz M. Rules in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1999, 113(3/4): 271-292.

[53] 赵卫东, 曹文彬, 戴伟辉. 不完全信息下的粗集拓展[J]. 系统工程学报, 2002, 17(6): 481-485.
(Zhao W D, Cao W B, Dai W H. Extension of rough set theory under incomplete information[J]. J of Systems Engineering, 2002, 17(6): 481-485.)

[54] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk[C]. Operational Tools in the Management of Financial Risks. Dordrecht: Kluwer, 1998: 121-136.

[55] An L P, Tong L Y. Rough approximations based on intersection of indiscernibility, similarity and outranking relations[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(6): 555-562.

[56] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation by dominance relations[J]. Int J of Intelligent Systems, 2002, 17(2): 153-171.

[57] An L P, Chen Z Q. Generation of dominance-based decision rules[J]. ICIC Express Letters, 2009, 3(B): 745-750.

[58] Blaszczynski J, Greco S, Slowinski R. Multi-criteria classification — A new scheme for application of dominance-based decision rules[J]. European J of Operational Research, 2007, 181(3): 1030-1044.

[59] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Handling missing values in rough set analysis of multi-attribute and multi-criteria decision problems[C]. New Directions in Rough Sets, Data Mining and Granular-Soft Computing. Berlin: Springer, 1999: 146-157.

[60] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R, et al. Variable consistency model of dominance-based rough set approach[C]. Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer-Verlag, 2001: 170-181.

[61] 安利平, 陈增强. 基于二元关系和布尔推理的分级决策模型[J]. 系统工程学报, 2009, 24(6): 701-709.
(An L P, Chen Z Q. Sorting decision model based on binary relations and Boolean reasoning[J]. J of Systems Engineering, 2009, 24(6): 701-709.)

[62] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Fuzzy extension of the rough set approach to multicriteria and multiattribute sorting[C]. Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge. Heidelberg: Physica-Verlag, 2000: 131-151.

[63] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough set approach to decisions under risk[C]. Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer-Verlag, 2001: 160-169.

[64] Susmaga R, Slowinski R, Greco S, et al. Generation of reducts and rules in multi-attribute and multi-criteria classification[J]. Control and Cybernetics, 2000, 29(4): 969-988.

[65] Dembczynski K, Pindur R, Susmaga R. Generation of exhaustive set of rules within dominance-based rough set approach[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2003, 82(4): 96-107.

[66] 贾修一, 商琳, 陈家骏. 基于优势关系粗糙集的规则生成算法[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2007, 6(6): 686-689.
(Jia X Y, Shang L, Chen J J. Rule induction algorithm based on dominance-based rough set approach[J]. J of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2007, 6(6): 686-689.)

[67] Dembczynski K, Greco S, Slowinski R. Methodology of rough-set-based classification and sorting with hierarchical structure of attributes and criteria[J]. Control & Cybernetics, 2002, 31(4): 891-920.

[68] Shao M W, Zhang W X. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. Int J of Intelligent Systems, 2005, 20(1): 13-27.

[69] 胡明礼, 刘思峰. 基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1347-1351.
(Hu M L, Liu S F. Rough analysis method of multi-attribute decision making based on generalized extended dominance relation[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1347-1351.)

[70] 何亚群, 胡寿松. 不完全信息的多属性粗糙决策分析方法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(2): 117-120.
(He Y Q, Hu S S. Rough analysis method of multi-attribute decision making with incomplete information[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(2): 117-120.)

[71] 骆公志, 杨晓江, 刘思峰. 基于限制优势关系的粗糙决策分析模型[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 127-132.
(Luo G Z, Yang X J, Liu S F. Rough analysis model of multi-attribute decision making based on limited dominance relation[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 127-132.)

[72] 毕文杰, 陈晓红. 基于扩展优势关系粗糙集的群体分级决策方法[J]. 软科学, 2009, 23(3): 119-122.
(Bi W J, Chen X H. A group sorting decision making approach based on extended dominance-based rough set[J]. Soft Science, 2009, 23(3): 119-122.)

[73] Dembczynski K, Pindur R, Susmaga R. Dominance-based rough set classifier without induction of decision rules[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2003, 82(4): 84-95.

[74] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations[J]. European J of Operational Research, 1999, 117(1): 63-83.

[75] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Extension of the rough set approach to multicriteria decision support[J]. Information Systems and Operational Research, 2000, 38(3): 161-193.

[76] Slowinski R, Greco S, Matarazzo B. Mining decision-rule preference model from rough approximation of preference relation[C]. Proc of the 26th IEEE Annual Int Conf on Computer Software & Applications. Los Alamitos: IEEE Computer Soc, 2002: 1129-1134.

[77] An L P, Tong L Y. Learning rules from pairwise comparison table[C]. Artificial Intelligence and Computational Intelligence. Berlin: Springer, 2009: 18-27.

[78] Fortemps P, Greco S, Slowinski R. Multicriteria decision support using rules that represent rough-graded preference relations[J]. European J of Operational Research, 2008, 188(1): 206-223.

[79] Sai Y, Yao Y Y. Analyzing and mining ordered information tables[J]. J of Computer Science and Technology, 2003, 18(6): 771-779.

[80] 江洋溢, 张恒喜, 孟科, 等. 基于序关系的多准则粗集决策方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(6): 161-165.
(Jiang Y Y, Zhang H X, Meng K, et al. Research and application of multi-criteria decision making method based on order relation and rough set[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2007, 27(6): 161-165.)

[81] 任剑, 王坚强, 卞灿. 基于粗糙集的随机多准则决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(11): 2181-2185.
(Ren J, Wang J Q, Bian C. Stochastic multi-criterion decision-making method based on rough sets[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(11): 2181-2185.)

[82] 刘学生, 吴伟, 邹开其. 区间数排序的粗糙集方法[J]. 大连理工大学学报, 2008, 48(1): 143-146.
(Liu X S, Wu W, Zou K Q. Rough sets ranking methodology for interval numbers[J]. J of Dalian University of Technology, 2008, 48(1): 143-146.)

[83] Nguyen S H, Nguyen H S. Some efficient algorithms for rough set methods[C]. Proc of the Conf of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Spain: Granada, 1996: 1451-1456.

[84] Hu X H. Knowledge discovery in databases: An attribute-oriented rough set approach[D]. Regina: University of Regina, Computer Science Faculty of Graduate Studies, 1995: 65-85.

[85] 苗夺谦, 胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(6): 681-684.
(Miao D Q, Hu G R. A heuristic algorithm for reduction of knowledge[J]. J of Computer Research and Development, 1999, 36(6), 681-684.)

[86] Vinterbo S, ϕhrn A. Minimal approximate hitting sets and rule templates[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2000, 25(2): 123-143.

[87] Wroblewski J. Finding minimal reducts using genetic algorithms[C]. Proc of 2nd Int Joint Conf on Information Sciences. Wrightsville Beach, 1995: 186-189.

[88] Hashemi R R, Jelovsek F R, Razzaghi M. Developmental toxicity risk assessment: A rough sets approach[J]. Int J of Methods of Information in Medicine, 1993, 32(1): 47-54.

[89] 徐伟华, 张文修. 基于优势关系下信息系统分配约简的矩阵算法[J]. 计算机工程, 2007, 33(14): 4-7.
(Xu W H, Zhang W X. Matrix computation for assignment reduction in information systems based on dominance relations[J]. Computer Engineering, 2007, 33(14): 4-7.)

(下转第19页)