

## 第九章 导弹弹体的侧向动态特性

### 目的要求：

- 1、能够应用前面所学的知识建立侧向扰动运动的微分方程；
- 2、掌握面对称导弹侧向扰动运动模态的分析方法，并能够应用所掌握的方法分析侧向扰动运动三种模态的运动现象；
- 3、能够分析、推导出由航向静稳定动力系数和横向静稳定动力系数所决定的侧向稳定边界条件的表达式，并能给出其稳定边界图；
- 4、能够利用侧向稳定边界图对侧向扰动运动存在静稳定而动态不稳定区域的物理原因进行分析；
- 5、明确“副翼反逆现象”的概念以及造成这种现象的原因和弊端，掌握其克服的方法；
- 6、掌握轴对称导弹侧向扰动运动运动特性的分析方法以及将其分解为航向和横向两个独立控制通道的解耦方法和条件。

### 重点、难点：

- 1、面对称导弹侧向扰动运动三个模态的运动现象的分析和理解；
- 2、侧向扰动运动稳定边界图的分析、讨论方法及其理解；
- 3、引起“副翼反逆现象”的原因及其克服方法，尤其是方向舵的偏转方向；
- 4、轴对称导弹的航向和横向的解耦方法。

### 教学方法：

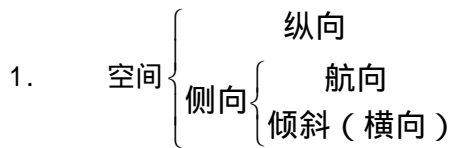
- 1、课堂教学；
- 2、对于较难理解的现象，通过多媒体演示其运动现象，加深理解；
- 3、例案教学。

### 教学时数：

课堂教学结合多媒体演示：8学时；  
例案教学：4学时。

## §9-1 侧向扰动运动的数学模型

### 一、侧向扰动运动的数学模型



一定条件下，空间基准运动可分为纵向和侧向运动：

- (1) 侧向运动参数很小；
  - (2) 作用在飞行器上的升力、阻力、 $M_z$ 与侧向参数的关系可忽略；
  - (3) 基本保持在一个平面。
2. 侧向运动参数： $\beta, \psi, \psi_v, \gamma, \gamma_v, \omega_x, \omega_y, z$
  3. 侧向扰动运动：描述侧向运动参数偏量（实际值相对基准值）随时间变化的规律。
  4. 侧向扰动运动的特点：
    - (1) 纵向参数不变，侧向基准值很小；

(2) 干扰只改变侧向运动参数；

(3) 小扰动。

### 5. 建模方法

采用运动微分方程的线性化处理办法，对侧向基准运动模型进行线性化处理，变基准模型为偏量模型。

$$\left. \begin{aligned} f_1 \frac{dx_1}{dt} &= F_1 \\ f_2 \frac{dx_2}{dt} &= F_2 \\ &\dots\dots \\ f_n \frac{dx_n}{dt} &= F_n \end{aligned} \right\}$$

$$f_0 \frac{d\Delta x}{dt} = \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_0 - \frac{dx_0}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 \right] \Delta x_1 + \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_0 - \frac{dx_0}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0 \right] \Delta x_2 + \dots$$

### 6. 模型简化

(1) 忽略高阶微量，即侧向参数的基准值与偏量值都为小量，两者乘积可忽略，其自身的乘积也可忽略；

(2) 质量不变；

(3) 不计结构参数和大气参数变化的影响；

(4) 纵向基本假设。

### 7. 侧向扰动运动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\psi_v}{dt} &= \frac{P-Z^\beta}{mV \cos \theta} \Delta\beta - \frac{P\alpha+Y}{mV \cos \theta} \Delta\gamma_v - \frac{Z^{\delta_y}}{mV \cos \theta} \Delta\delta_y \\ \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\omega_y + \frac{M_x^{\delta_x}}{J_x} \Delta\delta_x + \frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} \Delta\delta_y \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \Delta\omega_y + \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \Delta\dot{\beta} + \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y} \Delta\delta_y \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \Delta\omega_y \\ \Delta\psi_v &= \Delta\psi + \frac{\alpha}{\cos \theta} \Delta\gamma - \frac{1}{\cos \theta} \Delta\beta \\ \Delta\gamma_v &= \operatorname{tg} \theta \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta}{\cos \theta} \Delta\gamma \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -V \cos \theta \Delta\psi_v \end{aligned} \right\}$$

为了写出由侧向动力系数表示的标准侧向扰动运动方程组，还需对上述方程组的第一式作进一步的简化。

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P\alpha + Y - G \cos \theta$$

$$\frac{P\alpha + Y}{mV} = \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{V} \cos \theta \right)$$

$$\left( \frac{P\alpha + Y}{mV} \right) \Delta\gamma_v = \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{V} \cos \theta \right) \left( \operatorname{tg} \theta \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta}{\cos \theta} \Delta\gamma \right)$$

$$\left( \frac{P\alpha + Y}{mV} \right) \Delta\gamma_v = \frac{g}{V} (\sin \theta \Delta\beta + \cos \vartheta \Delta\gamma)$$

$$-mV \cos \theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} = (-P + Z^\beta) \Delta\beta + mg (\sin \theta \Delta\beta + \cos \vartheta \Delta\gamma) + Z^{\delta_y} \Delta\delta_y$$

$$\cos \theta \Delta\psi_v = \cos \theta \Delta\psi + \alpha \Delta\gamma - \Delta\beta$$

$$\cos \theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} = \cos \theta \frac{d\Delta\psi}{dt} + \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} - \frac{d\Delta\beta}{dt}$$

$$-mV \frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} \Delta\omega_y - mV \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} + mV \frac{d\Delta\beta}{dt}$$

$$= (-P + Z^\beta) \Delta\beta + mg \sin \theta \Delta\beta + mg \cos \vartheta \Delta\gamma + Z^{\delta_y} \Delta\delta_y$$

$$\left. \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_z} \Delta\omega_y + \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \Delta\dot{\beta} + \frac{M_y^{\delta_y}}{J_y} \Delta\delta_y + \frac{M'_{yd}}{J_y} \right\}$$

$$\cos \theta \frac{d\Delta\psi_v}{dt} = \frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} \Delta\omega_y + \alpha \frac{d\Delta\gamma}{dt} - \frac{d\Delta\beta}{dt}$$

$$= \frac{P - Z^\beta}{mV} \Delta\beta - \frac{g}{V} \sin \theta \Delta\beta - \frac{g}{V} \cos \vartheta \Delta\gamma - \frac{Z^{\delta_y}}{mV} \Delta\delta_y + \frac{F'_{zd}}{mV}$$

$$\Delta\psi_v = \Delta\psi - \frac{1}{\cos \theta} \Delta\beta + \frac{\alpha}{\cos \theta} \Delta\gamma$$

$$\left. \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\omega_y + \frac{M_x^{\delta_x}}{J_x} \Delta\delta_x + \frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} \Delta\delta_y + \frac{M'_{xd}}{J_x} \right\}$$

$$\frac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta\omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \Delta\omega_y$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} \Delta\omega_y$$

$$\frac{d\Delta Z}{dt} = -V \cos \theta \Delta\psi_c$$

$$\Delta\gamma_v = \operatorname{tg} \theta \cdot \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta}{\cos \theta} \Delta\gamma$$

方程组中第 1、2、4、5 式与其余式无关，可从方程组中独立出去，由这 4 个式子组成的方程组为描述侧向扰动运动参数  $\Delta\omega_x$ 、 $\Delta\omega_y$ 、 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$  的微分方程组。

将  $\Delta\omega_y$  代入 6 式，解  $\Delta\psi$ ；将  $\Delta\psi$ 、 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$  代入 3 式解  $\Delta\psi_v$ ；将  $\Delta\psi_v$  代入 7 式解  $\Delta z$ ；

将  $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$  代入 8 式解  $\Delta\gamma_v$ 。

## 二、侧向动力系数

### 1. 航向动力系数

$$\left. \begin{array}{l} \text{阻尼动力系数} \quad b_{22} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \quad (1/s) \\ \text{恢复动力系数} \quad b_{24} = -\frac{M_y^{\beta}}{J_y} \quad (1/s^2) \\ \text{操纵动力系数} \quad b_{27} = -\frac{M_y^{\delta_y}}{J_y} \quad (1/s^2) \\ \text{下洗动力系数} \quad b'_{24} = -\frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \quad (1/s) \\ \text{旋转动力系数} \quad b_{21} = -\frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \quad (1/s) \end{array} \right\}$$

### 2. 横向动力系数

$$\left. \begin{array}{l} \text{阻尼动力系数} \quad b_{11} = -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \quad (1/s) \\ \text{恢复动力系数} \quad b_{14} = -\frac{M_x^{\beta}}{J_x} \quad (1/s^2) \\ \text{操纵动力系数} \quad b_{18} = -\frac{M_x^{\delta_x}}{J_x} \quad (1/s^2) \\ \text{旋转动力系数} \quad b_{12} = -\frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \quad (1/s) \\ \text{垂尾效应动力系数} \quad b_{17} = -\frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} \quad (1/s) \end{array} \right\}$$

### 3. 侧向动力系数

$$\left. \begin{array}{l} \text{侧向力动力系数} \\ \text{舵面动力系数} \\ \text{重力动力系数} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_{34} = \frac{P - Z^\beta}{mV} \quad (1/s) \\ b_{37} = -\frac{Z^{\delta_y}}{mV} \quad (1/s) \\ b_{35} = -\frac{g}{V} \cos \vartheta \quad (1/s) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b_{36} = -\frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} & b_{41} = \frac{1}{\cos \theta} & b_{56} = -tg \vartheta & a_{33} = -\frac{g}{V} \sin \theta \\ b_{61} = \frac{1}{\cos \vartheta} & b_{71} = tg \theta & b_{72} = \frac{\cos \vartheta}{\cos \theta} & b_{81} = -V \cos \theta \end{array}$$

#### 4.相似干扰力与力矩

$$M_{yd} = \frac{M'_{yd}}{J_y} \quad M_{xd} = \frac{M'_{xd}}{J_x} \quad F_{zd} = \frac{F'_{zd}}{mV}$$

### 三、侧向扰动运动的状态方程

侧向扰动运动的状态向量为

$$[\Delta \omega_x \quad \Delta \omega_y \quad \Delta \beta \quad \Delta \gamma]^T$$

$$\Delta \dot{\omega}_x = -b_{11} \Delta \omega_x - b_{12} \Delta \omega_y - b_{14} \Delta \beta - b_{18} \Delta \delta_x - b_{17} \Delta \delta_y + M_{xd}$$

$$\Delta \dot{\omega}_y = -(b_{21} + b'_{24} \alpha) \Delta \omega_x - (b_{22} - b'_{24} b_{36} + b'_{24} \alpha b_{56}) \Delta \omega_y$$

$$-(b_{24} - b'_{24} b_{34} - b'_{24} b_{35}) \Delta \beta + b'_{24} b_{35} \Delta \gamma$$

$$-(b_{27} - b'_{24} b_{37}) \Delta \delta_y + M_{yd} - b'_{24} F_{zd}$$

$$\Delta \dot{\beta} = \alpha \Delta \omega_x - (b_{36} - \alpha b_{56}) \Delta \omega_y - (b_{34} + a_{33}) \Delta \beta - b_{35} \Delta \gamma - b_{37} \Delta \delta_y + F_{zd}$$

$$\Delta \dot{\gamma} = \Delta \omega_x + b_{56} \Delta \omega_y$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega}_x \\ \Delta \dot{\omega}_y \\ \Delta \dot{\beta} \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix} = A_{xy} \begin{bmatrix} \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \beta \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{18} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_x$$

$$- \begin{bmatrix} b_{17} \\ b_{27} - b'_{24} b_{37} \\ b_{37} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_y + \begin{bmatrix} M_{xd} \\ M_{yd} - b'_{24} F_{zd} \\ F_{zd} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{xy} = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{14} & 0 \\ -(b_{21} + b'_{24} \alpha) & -(b_{22} - b'_{24} b_{36} + b'_{24} \alpha b_{56}) & -(b_{24} - b'_{24} b_{34} - b'_{24} b_{35}) & b'_{24} b_{35} \\ \alpha & -(b_{36} - \alpha b_{56}) & -(b_{34} + a_{33}) & -b_{35} \\ 1 & b_{56} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = |sI - A_{xy}| = s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= b_{22} + b_{34} + b_{11} + \alpha b'_{24} b_{56} - b'_{24} b_{36} + a_{33} \\
 A_2 &= b_{22} b_{34} + b_{22} b_{33} + b_{22} b_{11} + b_{34} b_{11} + b_{22} a_{33} \\
 &\quad - b_{24} b_{36} - b'_{24} b_{36} b_{11} - b_{21} b_{12} + (b_{14} + b_{24} b_{56} + b'_{24} b_{11} b_{56} - b'_{24} b_{12}) \alpha - b'_{24} b_{35} b_{56} \\
 A_3 &= (b_{22} b_{14} - b_{21} b_{14} b_{56} + b_{24} b_{11} b_{56} - b_{24} b_{12}) \alpha - (b_{24} b_{36} + b'_{24} b_{11} b_{56} - b'_{24} b_{12} + b_{14}) b_{35} \\
 &\quad + b_{22} b_{34} b_{11} + b_{22} b_{11} b_{33} + b_{21} b_{14} b_{36} - b_{21} b_{12} a_{33} - b_{21} b_{12} b_{34} - b_{24} b_{11} b_{36} \\
 A_4 &= -b_{35} (b_{22} b_{14} - b_{21} b_{14} b_{56} + b_{24} b_{11} b_{56} - b_{24} b_{12})
 \end{aligned} \right\}$$

## §9-2 侧向扰动运动的模态

侧向自由扰动运动的一般解为：

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \omega_x &= k e^{s_i t} \\
 \Delta \omega_y &= L e^{s_i t} \\
 \Delta \beta &= M e^{s_i t} \\
 \Delta \gamma &= N e^{s_i t}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= (b_{21} + b'_{24} \alpha) \cdot f_{21}(s_i) - (b_{22} - b'_{24} b_{36} + \\
 &\quad b'_{24} \alpha b_{56} + \lambda) \cdot f_{22}(s_i) + (b_{24} - b'_{24} b_{34} - \\
 &\quad b'_{24} a_{33}) \cdot f_{23}(s_i) + b'_{24} b_{35} \cdot f_{24}(s_i)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K(s_i + b_{11}) + L \cdot b_{12} + M \cdot b_{14} &= 0 \\
 K \cdot b_{21} + L(s_i + b_{22}) + M(b'_{24} s_i + b_{24}) &= 0 \\
 L b_{36} + M \cdot (s_i + b_{34} + a_{33}) + N(\alpha s_i + b_{35}) &= 0 \\
 -K - L \cdot b_{56} + N s_i &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta \omega_x \quad : \quad \Delta \omega_y \quad : \quad \Delta \beta \quad : \quad \Delta \gamma = K_i \quad : \quad L_i \quad : \quad M_i \quad : \quad N_i$$

$$= f_{21}(s_i) : f_{22}(s_i) : f_{23}(s_i) : f_{24}(s_i)$$

**根的特点：**四个特征根分为三种情况：一个大实根  $s_1$ （负值）；一个小实根  $s_2$ （正值）；二

对共轭复根  $s_{3,4}$ 。每一个根决定了一种运动形态。

一、倾侧运动摸态

1. 特征根特点

大负实根  $s_1$

2. 参数特点

$$|\Delta \omega_x| \gg |\Delta \omega_y|, |\Delta \gamma| \gg |\Delta \beta|,$$

3. 扰动运动型态及特点

非周期迅速衰减运动，基本上只有倾斜角  $\Delta \gamma$  的变化，称为倾侧运动型态。

#### 4.近似求根

$$\begin{aligned} s_1 &\approx -A_1 \\ &\approx -b_{11} \\ &= \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \end{aligned}$$

证明：

已知  $A_1 = b_{22} + b_{34} + b_{11} + \alpha b'_{24} b_{56} - b'_{24} b_{36} + a_{33}$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{g}{V} \sin \theta - \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} - \frac{-P + Z^\beta}{mV} - \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \\ &\quad + \alpha \left( -\frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \right) (-\operatorname{tg} \vartheta) - \left( -\frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \right) \left( -\frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} \right) \end{aligned}$$

$\alpha$ 比较小

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\vartheta - \alpha) \\ &= \cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha \\ &\approx \cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} &= \frac{\cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \\ &= 1 + \alpha \operatorname{tg} \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{g}{V} \sin \theta - \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} - \frac{-P + Z^\beta}{mV} - \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \\ &\quad + \alpha \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \operatorname{tg} \vartheta - \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} (1 + \alpha \operatorname{tg} \vartheta) \\ &= -\frac{g}{V} \sin \theta - \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} - \frac{-P + Z^\beta}{mV} - \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} - \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \end{aligned}$$

由于  $M_x^{\omega_x} > M_y^{\dot{\beta}}$   $M_x^{\omega_x} > M_y^{\omega_y}$   $J_y \square J_x$

故  $\left| \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \right|$ 、 $\left| \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \right|$  相对  $\left| \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \right|$  可以忽略不计

$V$  很大,  $\frac{g}{V} \sin \theta$ 、 $\frac{-P + Z^\beta}{mV}$  又可以忽略不计

$A_1$  可以近似表示为

$$A_1 = -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}$$

$$s_1^4 > |s_1^3| > s_1^2 > |s_1|$$

$s_1^4 + A_1 s_1^3 + A_2 s_1^2 + A_3 s_1 + A_4 = 0$  中的  $A_2 s_1^2$ 、 $A_3 s_1$ 、 $A_4$  这三项都可以忽略不计,故可

求出  $s_1$  为

$$s_1 + A_1 = 0$$

即

$$\begin{aligned} s_1 &\approx -A_1 \\ &\approx -b_{11} \\ &= \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \end{aligned}$$

大实根  $s_1 = -b_{11} = \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} < 0$ , 所以其对应的扰动运动形态应该是一个稳定的非周期运动。

## 二、螺旋运动模态

### 1. 特征根特点

小正实根  $s_1$

### 2. 参数特点

$$|\omega_y| \gg |\omega_x| \quad |\gamma| \gg |\beta|$$

### 3. 扰动运动型态及特点

取地面坐标系  $ox_0z_0$ , 假定俯仰角  $\vartheta$  和弹道倾角  $\theta$  都不大, 飞行器的运动学方程由图可

以近似为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &\cong V \\ \dot{y}_0 &\cong 0 \\ \dot{z}_0 &\cong V(\Delta\beta - \Delta\psi) \end{aligned}$$

$\vartheta$  不大时,  $\Delta\dot{\psi} = \Delta\omega_y$ , 所以  $\Delta\psi = \omega_y / s_2$

若  $\Delta\psi \gg \Delta\beta$ , 则  $(\Delta\beta - \Delta\psi) \cong -\Delta\psi$

由根  $s_2$  决定的参数  $\Delta\omega_y$  的特解可以写成  $\Delta\omega_y = L_2 e^{s_2 t}$ ,  $L_2$  为待

定系数。

$$\Delta\psi = \frac{1}{s_2} \Delta\omega_y = \frac{L_2}{s_2} e^{s_2 t}$$



$$x \cong Vt;$$

$$z \cong -V \int_0^t \Delta\psi(t) dt = -V \frac{L_2}{s_2^2} (e^{s_2 t} - 1)$$

飞行器进行平面转弯,一方面偏离原来的偏航角,另一面又以愈来愈小的半径进行转弯。同时还因倾斜角不断增大,升力的垂直分量不断减小,飞行高度也在逐渐下降,整个运动如同螺旋运动。

#### 4. 近似求根

因为  $s_2$  通常小于 1, 所以  $s_2^4 < s_2^3 < s_2^2 < s_2$ , 于是特征方程可以近似为

$$A_3 s_2 + A_4 \approx 0$$

由此可得

$$s_2 \cong -A_4 / A_3$$

### 三、“荷兰滚”运动模态

#### 1. 特征根特点

一对共轭复根

#### 2. 参数特点

参数  $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y$  和  $\Delta\beta$  都有变化, 但是角速度  $\Delta\omega_x$  的变化大一点。

#### 3. 扰动运动型态及特点

既有滚转, 又有偏航和侧滑, 它类似于滑冰运动中“荷兰滚”花式动作, 因而将飞行器的这种侧向运动分量, 习惯上又称荷兰滚运动。

#### 4. 近似求根

$$s_1 = -b_{11}, s_2 = -\frac{A_4}{A_3}$$

$$(s + b_{11}) \left( s + \frac{A_4}{A_3} \right) (s^2 + As + B) = 0$$

$$b_{11} \frac{A_4}{A_3} B = A_4$$

$$b_{11} + \frac{A_4}{A_3} + A = A_1$$

$$B = \frac{A_3}{b_{11}}$$

$$A = A_1 - b_{11} - \frac{A_4}{A_3}$$

$$s^2 + As + B = 0$$

$$s_{3,4} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

#### 四、运动过程

第一阶段是相应于(绝对值)大实根的倾斜运动,该运动很快衰减而消失,延续时间很短(约为 0.2~0.4 秒);当航向静稳定性比较大时,第二阶段出现振荡运动,延续时间约为几秒钟(例如 4~5 秒);以后进入第三阶段,剩下的只是螺旋运动了。该运动是由小的正实根所确定的,是一个慢发散的运动,而且运动延续的时间很长,(约达一分钟),所以在飞行中很难发现螺旋不稳定性。

### §9-3 导弹弹体的侧向稳定边界图及其讨论

#### 一、侧向稳定边界条件及其稳定边界图

##### 1. 边界条件

$$s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + s_4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 > 0 \\ A_2 > 0 \\ A_3 > 0 \\ A_4 > 0 \end{array} \right\}$$

$$R = A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 > 0$$

$$A_1 = -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}, \text{ 所以 } A_1 > 0 \text{ 的条件自然可以得到满足}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \\ A_4 = 0 \\ R = A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 = 0 \end{array} \right\}$$

在  $A_2 = 0$ 、 $A_3 = 0$  和  $A_4 = 0$  这些稳定边界方程式中,  $b_{14}$  和  $b_{24}$  之间呈线性关系。而

在稳定边界方程  $A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 = 0$  中,  $b_{14}$  和  $b_{24}$  之间则为一般的二次方程。

$A_4 = 0$  是一条通过原点的直线;

$A_2 = 0$  是一条平行于  $b_{14}$  轴的水平线;

$A_3 = 0$  是一条斜线;

$R = 0$  是一条二次曲线

##### 2. 由螺旋运动边界条件

$$(s + b_{11}) \left( s + \frac{A_4}{A_3} \right) (s^2 + As + B) = 0$$

可见  $A_3 > 0, A_4 > 0$ ，保证了这个小的实根是一个负实根，也就是说保证了螺旋运动是一个稳定的运动。所以我们将  $A_3 = 0$  和  $A_4 = 0$  边界线称为螺旋稳定边界

### 3. 振荡运动边界条件

$$A^2 - 4B < 0$$

要使  $(s^2 + As + B)$  这一组特征根所对应的运动是稳定的，则要求

$$A > 0$$

$$B > 0$$

$$B = \frac{A_3}{b_{11}}, A = A_1 - b_{11} - \frac{A_4}{A_3}$$

$$B = \frac{A_3}{b_{11}} > 0$$

$$A = A_1 - b_{11} - \frac{A_4}{A_3} > 0$$

$$A > 0 \quad B > \left( \frac{A}{2} \right)^2$$

$$\therefore B = \frac{A_3}{b_{11}}, b_{11} > 0,$$

$$\therefore B > 0 \Leftrightarrow A_3 > 0$$

$B = 0$  和  $A_3 = 0$  这两条稳定边界线是一条线

$A = 0$  的稳定边界线，与  $R = 0$  的边界线比较接近，这时就可以近似地认为  $A = 0$  和  $R = 0$  也是一条稳定边界线。

### 4. 稳定程度

虚线  $ab$  代表  $b_{14}$  不变的情况下，当  $b_{24}$  改变多大后，就达到了稳定的边界； $cd$  线代表  $b_{24}$  不变的情况下，当  $b_{14}$  改变多大后，就达到了稳定的边界。

#### 二、关于侧向稳定边界图的讨论

##### 1. 物理现象分析

$$\gamma > 0 \rightarrow Y \sin \gamma > 0 \rightarrow \beta > 0$$

$$\begin{array}{ccc}
b_{24} & & b_{14} \\
M_y^\beta & & M_x^\beta \\
M_y^\beta \cdot \beta < 0 & & M_x^\beta \cdot \beta < 0 \rightarrow \gamma \downarrow \\
\omega_y < 0 & & \omega_x < 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\begin{cases} M_y^{\omega_y} \cdot \omega_y > 0 \rightarrow \beta \downarrow \\ M_x^{\omega_y} \cdot \omega_y > 0 \rightarrow \gamma \uparrow \end{cases} & & \begin{cases} M_y^{\omega_x} \cdot \omega_x > 0 \rightarrow \beta \downarrow \\ M_x^{\omega_x} \cdot \omega_x > 0 \rightarrow \gamma \uparrow \end{cases} \\
|b_{24}| \square |b_{14}| & & \\
\beta \uparrow > \beta \downarrow \rightarrow |\beta| \uparrow & & \\
\gamma \uparrow > \gamma \downarrow \rightarrow |\gamma| \uparrow & & \\
|b_{14}| \square |b_{24}| & & \\
\beta \downarrow > \beta \uparrow \rightarrow |\beta| \downarrow & & \\
\gamma \downarrow > \gamma \uparrow \rightarrow |\gamma| \downarrow & &
\end{array}$$

### 3. 付翼反逆效应

#### (1) 概念

$$\text{飞行控制要求: } \delta_x < 0 \rightarrow M_x^{\delta_x} \cdot \delta_x > 0 \rightarrow \gamma > 0$$

但是  $\because \gamma > 0 \rightarrow \beta > 0 \rightarrow M_x^\beta < 0$  与飞行控制要求的  $M_x^{\delta_x} \cdot \delta_x$  相反, 严重时

( $|b_{14}| \square |b_{24}|$ ) 可能使飞行器发生方向相相反的滚转, 即“付翼反逆效应”。

#### (2) 消除措施

在偏转付翼的同时要相应地偏转方向舵。

$$M_x^{\omega_y} \cdot \omega_y > 0 \leftarrow \omega_y < 0 \leftarrow M_y^{\delta_y} \cdot \delta_y < 0 \leftarrow \delta_y > 0$$

### 4. 气动外形对航向静稳定性的影响

#### (1) 平置弹翼和垂直尾翼

a.  $|M_y^\beta|$  较小的原因

$$\blacksquare M_y^\beta = M_{y_{\text{垂尾翼}}}^\beta + M_{y_{\text{身}}}^\beta \text{ (静不稳)}$$

$$\blacksquare \text{垂直尾翼的 } c_z^\beta \text{ 随 } M \uparrow \text{ 而 } \downarrow \quad \therefore |M_{y_{\text{垂尾}}}^\beta| \downarrow$$

$\blacksquare$  为减小超音速波阻, 垂直尾翼采用薄翼  $\rightarrow$  气动载荷而形成的弹性变形可能很大, 又进一步降低了垂直尾翼的效率

#### b. 改进措施

$\blacksquare$  采用后掠角很大的垂直尾翼

- 增大垂直尾翼的面积
- 减小上反角，甚至采用下反角

(2) 气动外形对力矩旋转导数的影响

$$A_4 \approx b_{24}(b'_{12} - b_{56} \cdot b_{11}) - b_{14}(b_{22} - b_{21} \cdot b_{56}) = 0$$

$$b_{56} = -tg\vartheta \approx 0$$

$$b_{24}b'_{12} - b_{14}b_{22} = 0$$

$$\frac{b_{24}}{b_{14}} = \frac{b_{22}}{b'_{12}} = tg\psi$$

$$b_{22} \uparrow, b'_{12} \downarrow \rightarrow \frac{b_{24}}{b_{14}} \uparrow \rightarrow \text{螺旋稳定域} \uparrow$$

$$\gamma > 0 \rightarrow \beta > 0 \rightarrow M_y^\beta \cdot \beta < 0 \rightarrow \omega_y < 0$$

$$b_{22} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{J_y}$$

$$b'_{12} = -\frac{M_x^{\omega_y}}{J_x}$$

↓

↓

$$M_y^{\omega_y} \cdot \omega_y > 0 \rightarrow \beta > 0$$

$$M_x^{\omega_y} \cdot \omega_x > 0$$

$$\rightarrow M_x^\beta \cdot \beta < 0 \rightarrow \gamma \downarrow$$

$$\rightarrow \gamma \uparrow$$

(2) 飞行状态对侧向稳定性的影响

a. 迎角的影响

许多侧向动力系数都与迎角有关。

$$\text{如：采用大后掠角 } \alpha \uparrow \rightarrow |M_x^\beta| \uparrow \quad |M_y^\beta| \downarrow$$

∴ 小迎角时  $b_{24} \square b_{14}$  螺旋不稳定

大迎角时  $\rightarrow b_{14} \uparrow \quad b_{24} \downarrow$  就有可能螺旋稳定。

b. 弹道倾角的影响

$$\alpha \approx 0; \quad \vartheta = \theta$$

$$b_{36} = -\frac{\cos \theta}{\cos \vartheta} \approx -1$$

当弹道倾角  $\theta$  改变时，只会引起下列侧向扰动运动的动力系数改变

$$a_{33} = -\frac{g}{V} \sin \theta$$

$$b_{35} = -\frac{g}{V} \cos \theta$$

$$b_{56} = -tg\vartheta \approx -tg\theta$$

$$\begin{aligned}
A_1 &\approx b_{11} \\
A_2 &\approx b_{22}b_{11} \\
A_3 &\approx b_{22}b_{11}b_{34} + b_{11}b_{24} + (-b_{21} + b_{35} + \alpha b_{22})b_{14} \\
A_4 &\approx -b_{35}[b_{22}b_{14} + (b_{56}b_{11} - b_{12})b_{24}]
\end{aligned}$$

弹道倾角的变化只是通过  $b_{35}$  影响  $A_3$  的大小，通过  $b_{35}$ 、 $b_{56}$  影响  $A_4$ 。

考虑到  $(-b_{35}b_{14})$  这一项对  $A_3$  的影响并不显著，而  $A_4$  本身又非常小，所以可以认为

$$R = A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1A_4 \approx A_1A_2A_3 - A_3^2$$

因此，可以认为  $\theta$  和  $\vartheta$  的变化，对于  $R = 0$  这条稳定边界曲线的移动影响不大。

由于  $A_4 = 0$  的边界线实际上是由下列方程所决定：

$$b_{24} = \frac{b_{22}}{b_{12} - b_{56}b_{11}} b_{14}$$

或可以写成

$$b_{24} \approx \frac{b_{22}}{b_{12} + tg\vartheta b_{11}} b_{14}$$

$$\vartheta \uparrow \rightarrow \frac{b_{24}}{b_{14}} \downarrow \rightarrow \text{斜率越小，螺旋稳定域越小；}$$

$$\vartheta \downarrow \rightarrow \frac{b_{24}}{b_{14}} \uparrow \rightarrow \text{斜率越大，螺旋稳定域越大。}$$

如果其它飞行条件相同（或接近）时，最危险的情况将是弹道倾角为最大值的情况，这时候能满足稳定条件，其它飞行情况也就必然满足。

c. 推力的影响

推力  $P$  变化只影响动力系数  $b_{34}$

$$b_{34} = \frac{P - Z^\beta}{mV}$$

由于  $A_4 = 0$  中不包含  $b_{34}$ ，所以推力的改变对于  $A_4 = 0$  的螺旋稳定边界并无影响。

振荡边界  $R = 0$  与  $b_{34}$  有关，如果  $\frac{\partial R}{\partial b_{34}} > 0$ ， $P \uparrow \rightarrow b_{34} \rightarrow R \uparrow \rightarrow$  扩大振荡稳定域。

因此，在其它飞行条件相等的情况下，小推力是危险的。

三、侧向稳定程度的判据

1. 快收敛的倾斜运动

$$T_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} < 1 \sim 3s$$

## 2.慢发散的螺旋不稳定运动

$$T_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} > 20s$$

## 3. 荷兰滚运动

$$\lambda_{3,4} = \sigma \pm \nu i$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{0.693}{\sigma}$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu}$$

要求  $t_2 - t_1$  和  $T$  都小一些才比较好，这样可以保证导弹的振荡运动能较快地稳定下来。

在衡量荷兰滚运动时，有时引入倾斜角速度的最大振荡值  $\omega_{x \max}$  和偏航角速度的最大振幅值  $\omega_{y \max}$  之比，即

$$\alpha = \frac{|\omega_x|_{\max}}{|\omega_y|_{\max}}$$
$$\alpha = \frac{b_{14}}{b_{24}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b_{11}^2}{b_{24}^2}}}$$

一般规定  $\alpha$  值不大于某一数值，实质上是要求  $b_{24}$  比  $b_{14}$  不要小的太多。

实践表明一般面对称导弹为了获得较为良好的侧向动态特性，在稳定边界图上  $b_{14}$  和  $b_{24}$  组合参数的选择位置，往往是靠近  $A_4 = 0$  这条边界线的，甚至有时可以允许使  $A_4$  稍小于零。

## §9-4 导弹弹体的侧向扰动运动的传递函数

- 一、 在侧向扰动运动中导弹对副翼偏转角  $\Delta\delta_x$  的传递函数
- 二、 导弹侧向扰动运动中对方向舵偏转角  $\Delta\delta_y$  传递函数
- 三、 导弹侧向扰动运动中对干扰力矩  $\Delta M_x$  的传递函数
- 四、 导弹侧向扰动运动中对干扰力矩  $\Delta M_y$  的传递函数
- 五、 对干扰力  $\Delta F_z$  的传递函数

## §9-5 轴对称导弹侧向扰动运动的特性

### 一、模型

轴对称，力矩系数的导数  $m_x^\beta, m_y^{\omega_x}, m_x^{\omega_y}, m_x^{\delta_y}$  都比较小，可略去不计；或者是将  $b_{14}\beta, b'_{12}\dot{\psi}$  和  $b_{17}\delta_{17}$  的作用看成是已知的干扰力矩。

$$J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = M_x^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_x^{\delta_x} \Delta\delta_x + \Delta M_x$$

飞行器除了轴对称以外，并在自动驾驶仪偏转付翼的作用下具有良好的倾斜稳定性，能够使倾斜角很小，可以略去重力侧向分量的作用，而不计  $b_{35}\gamma$  这一项。于是在近似水平飞行的条件下

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega_y}{dt} + b_{22}\Delta\omega_y + b_{24}\Delta\beta + b'_{24} \frac{d\Delta\beta}{dt} &= -b_{27}\Delta\delta_y \\ -\Delta\omega_y + b_{34}\Delta\beta + \frac{d\Delta\beta}{dt} &= -b_{37}\Delta\delta_y \end{aligned}$$

### 二、倾斜扰动运动

#### 1. 传递函数

$$(1) \quad \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + b_{11} \frac{d\Delta\gamma}{dt} = -b_{18}\Delta\delta_x + \Delta M_x / J_x$$

$$s(s + b_{11})\Delta\gamma(s) = -b_{18}\Delta\delta_x(s) + \Delta M_x(s) \cdot \frac{1}{J_x}$$

$$W_{\delta_x\gamma}(s) = -\frac{b_{18}}{s(s + b_{11})}$$

$$(2) \quad \frac{d\Delta\omega_x}{dt} + b_{11}\Delta\omega_x = -b_{18}\Delta\delta_x + \Delta M_x / J_x$$

$$W_{\delta_x\omega_x}(s) = -\frac{b_{18}}{s + b_{11}}$$

$$W_{\delta_x\omega_x}(s) = -\frac{K_{\delta_x\omega_x}}{T_x s + 1}$$

$$T_x = \frac{1}{b_{11}}$$

$$K_{\delta_x\omega_x} = \frac{b_{18}}{b_{11}}$$

$T_x$  导弹滚动扰动运动的时间常数；



$K_{\delta_x \omega_x}$  导弹滚动扰动运动的放大系数。

## 2. 动态特性

$$s(s + b_{11}) = 0$$

$$s = -b_{11} = \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \quad s_1 = 0$$

(1) 偶然干扰 (自由扰动运动)

$\gamma(t)$  = 非周期稳定 + 中立稳定

$\gamma_w$  存在

(2) 经常干扰 (强迫扰动运动)

a. 副翼单位脉冲偏转 ( $\Delta \delta_x(s) = 1$ )

$$\Delta \omega_{xw} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_{18}}{s + b_{11}} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_w &= \lim_{t \rightarrow \infty} m \Delta \gamma(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} m s \Delta \gamma(s) \\ &= -\frac{M_x^{\delta_x}}{M_x^{\omega_x}} \end{aligned}$$

b. 副翼正单位阶跃偏转 (即  $\Delta \delta_x(t) = 1$ )

$$\Delta \omega_{xw} = -s \frac{b_{18}}{s + b_{11}} \frac{1}{s} = -\frac{b_{18}}{b_{11}}$$

$$\Delta \gamma_w = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_{18}}{s(s + b_{11})} \frac{1}{s} = \infty$$

c.  $M_{dx}$

$$M_{dx}(s) = \frac{M_{dx}}{s}$$

$$\Delta \omega_{xw} = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{\gamma M}(s) \cdot \frac{M_{dx}}{s} = \frac{M_{dx}}{b_{11}}$$

$$\Delta \gamma_{xw} \rightarrow \infty$$

$$b_{11}\Delta\omega_{xw} = -b_{18}\Delta\delta_x$$

$$-M_x^{\omega_x}\Delta\omega_{xw} = M_x^{\delta_x}\Delta\delta_x$$

$$\Delta\omega_x(t) = \frac{b_{18}}{b_{11}}(e^{-b_{11}t} - 1)$$

对轴对称气动力外形的导弹,它的侧向扰动运动可以分为航向扰动运动和滚转扰动运动进行研究。