第9章 结构可靠度分析

9.1 结构可靠度基本概念

●结构的功能要求

四项基本功能：

(1) 能承受在正常施工和正常使用时可能出现的各种作用；
(2) 在正常使用时具有良好的工作性能；
(3) 在正常维护下具有足够的耐久性能；
(4) 在偶然事件发生时（如地震、火灾等）及发生后，仍能保持必需的整体稳定性。

9.1 结构可靠度基本概念

(1)、(4)为结构的安全性
(2)为结构的适用性
(3)为结构的耐久性
统称为结构的可靠性

●结构的功能函数

令 $Z=R-S$

R：结构抗力；
S：结构荷载效应。

9.1 结构可靠度基本概念

则有三种情况：

(1) $Z>0$ 结构可靠
(2) $Z<0$ 结构失效
(3) $Z=0$ 结构处于极限状态

称

$Z=R-S$ 为结构的功能函数
$Z=R-S=0$ 为结构极限状态方程

由于影响荷载效应S和结构抗力R都有很多基本的随机变量，则结构功能函数的一般形式为

$$Z=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

9.1 结构可靠度基本概念

●结构极限状态

ü 定义：如果整个结构或结构的一部分超过某一特定状态就不能满足设计规定的某一功能要求，则此特定状态称为该功能的极限状态。

ü 两类极限状态——承载能力与正常使用

1.承载能力极限状态

对应于结构或构件达到最大承载能力或不适于继续承载的变形。

9.1 结构可靠度基本概念

(1) 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡（如倾覆等）；
(2) 结构构件或连续因材料强度被超过而破坏（包括疲劳破坏），或因过度的塑性变形而不适于继续承载；
(3) 结构转变为机动体系；
(4) 结构或结构构件丧失稳定（如压屈等）。

9.1 结构可靠度基本概念

2.正常使用极限状态

对应于结构或结构构件达到正常使用或耐久性能的某项规定限值。

(1) 影响正常使用或外观的变形;

(2) 影响正常使用或耐久性能的局部损坏(包括裂缝);

(3) 影响正常使用的振动;

(4) 影响正常使用的其他特定状态。

9.1 结构可靠度基本概念

● **结构可靠度**

Ø **定义：结构在规定的时间内，在规定的条件下，完成预定功能的概率。是结构可靠性的概率量度。**

ü 规定的时间——一般指结构设计基准期。在同样的条件下，规定时间越长，结构的可靠度越低。

ü 规定的条件——指正常设计、正常施工、正常使用条件，排除人为错误或过失因素。

9.1 结构可靠度基本概念

Ø **基本计算公式**

可靠度 $P_s = P\{Z \geq 0\} = \int_0^{\infty} f_Z(Z)dZ$

失效概率 $P_f = P\{Z < 0\} = \int_{-\infty}^{0} f_z(Z)dZ$

$$P_s + P_f = 1$$

或 $P_s = 1 - P_f$

如果 S 与 R 相互独立，则

$$f_Z(Z) = f_Z(R,S) = f_R(R) \cdot f_S(S)$$

9.1 结构可靠度基本概念

此时

$$p_f = P\{Z<0\} = P\{R-S<0\} = \iint\limits_{R-S<0} f_R(R) f_S(S) dRdS$$

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_R^{+\infty} f_S(S)dS\right] f_R(R)dR$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\int_{-\infty}^{R} f_S(S)dS\right] f_R(R)dR$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[1-F_S(R)] f_R(R)dR$$

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{S} f_R(R)dR\right] f_S(S)dS$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(S) f_S(S)dS$$

9.1 结构可靠度基本概念

● **结构可靠指标**

Ø **如果 *R* 和 *S* 为两个相互独立的正态随机变量，则**

$$p_f = P\{Z<0\} = P\left\{\frac{Z}{s_Z} < 0\right\} = P\left\{\frac{Z-m_Z}{s_Z} < -\frac{m_Z}{s_Z}\right\}$$

其中

$$m_Z = m_R - m_S$$

$$s_Z = \sqrt{s_R^2 + s_S^2}$$

9.1 结构可靠度基本概念

令 $b = \frac{m_Z}{s_Z} = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{s_R^2 + s_S^2}}$

$Y = \frac{Z - m_Z}{s_Z}$ 标准正态随机变量

则

$$p_f = P\{Y < -b\} = \Phi(-b)$$

$\Phi(\cdot)$：标准正态分布函数

$$b = -\Phi^{-1}(p_f)$$

9.1 结构可靠度基本概念

Ø β 与 P_f 的关系

β 越大，P_f 越小，P_s 越大

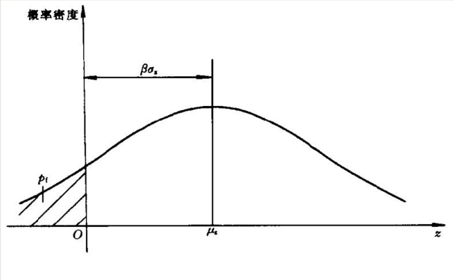


图 9-1 失效概率 p_f 与可靠指标 β 的关系

9.1 结构可靠度基本概念

β 与 P_f 的数值关系

β	1.0	1.5	2.0	2.5
P_f	$1.59\text{x}10^{-1}$	$6.68\text{x}10^{-2}$	$2.28\text{x}10^{-2}$	$6.21\text{x}10^{-3}$
β	3.0	3.5	4.0	4.5
P_f	$1.35\text{x}10^{-3}$	$2.33\text{x}10^{-4}$	$3.17\text{x}10^{-5}$	$3.40\text{x}10^{-6}$

9.2 结构可靠度分析的实用方法

一、中心点法

ü 特点：仅利用基本随机变量的统计参数(均值和方差)计算结构的可靠度,因此实用方便。

ü 假定：根据概率中心极限定理，Z的分布随功能函数中自变量数n的增加而渐进于正态分布。

9.2 结构可靠度分析的实用方法

ü 情况Ⅰ：结构功能函数为线性函数

$$Z = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

则

$$m_Z = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i m_{Xi} \qquad \sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_{Xi})^2}$$

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i m_{Xi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_{Xi})^2}} \qquad p_f = \Phi(-\beta)$$

9.2 结构可靠度分析的实用方法

ü 情况Ⅱ：结构功能函数为非线性函数

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

在各个变量的中心点（均值点）展开成泰勒级数，仅取线性项

$$Z \approx g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}\bigg|_{m_X} (X_i - m_{X_i})$$

则

$$m_Z \approx g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n})$$

9.2 结构可靠度分析的实用方法

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\bigg|_{m_X} \sigma_{X_i} \right)^2}$$

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\bigg|_{m_X} \sigma_{X_i} \right)^2}}$$

9.2 结构可靠度分析的实用方法

● 可靠指标 β 的几何意义

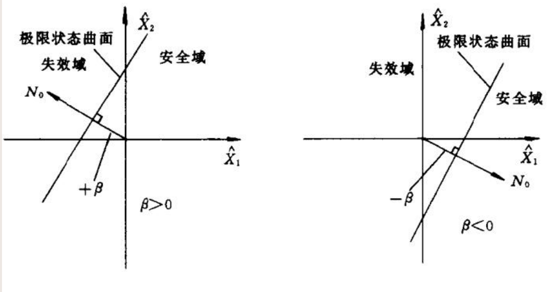


图 9-3 线性极限状态方程情况 β 的几何意义

9.2 结构可靠度分析的实用方法

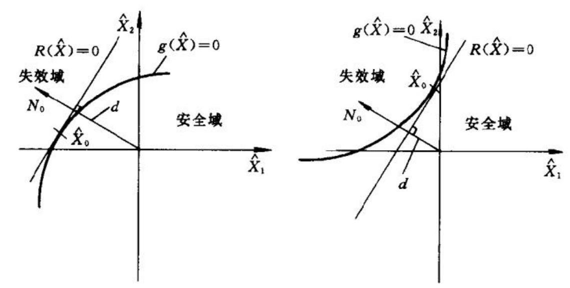


图 9-4 非线性极限状态方程情况 β 的几何意义

9.2 结构可靠度分析的实用方法

结论：

①当$X=[X_1,X_2,\cdots,X_n]^T$为独立正态随机向量时，可靠指标β的绝对值近似等于在标准化空间中原点到过极限状态非线性曲面上某点（常取为均值点）切面的距离。

②当$X=[X_1,X_2,\cdots,X_n]^T$为独立正态随机向量时，且在X的标准化空间中极限状态曲面为单曲曲面，则用原点到极限状态曲面的最短距离代替可靠指标所产生的误差最小。

9.2 结构可靠度分析的实用方法

● **中心点法的缺点**

(1) 没有考虑有关基本变量分布类型的信息。

(2) 由于在中心点处取功能函数的线性近似，由此得到的可靠指标β一般不为标准空间原点到极限状态曲面的最短距离。

9.2 结构可靠度分析的实用方法

二、验算点法

● **验算点法对中心点法的改进**

(1)当极限状态方程$g(X)=0$为非线性曲面时，不以通过中心点的切平面作为线性近似，而以通过$g(X)=0$上某一点$X^*=[X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*]^T$的切平面作为线性近似，以减小中心点法的误差。该点$X^*$称为验算点，验算点法可使$X^*$收敛于标准化空间中极限状态曲面到原点的最近距离点。

9.2 结构可靠度分析的实用方法

(2)当基本变量X_i具有分布类型的信息时，将X_i的分布在X_i^*处变换为当量正态分布，以考虑变量分布对可靠度（可靠指标）计算结果的影响。

9.2 结构可靠度分析的实用方法

●**验算点法计算步骤**

(1)列出极限状态方程$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0$，并确定所有基本变量X_i的分布类型和统计参数μ_{Xi}及σ_{Xi};

(2)假定X_i^*和β的初值，一般取X_i^*的初值等于X_i的均值;

(3)对于非正态变量X_i，在验算点处按

$$s_{X_i'} = f\left(\frac{X_i^* - m_{X_i'}}{s_{Xi}}\right) \Big/ f_i(X_i^*) = f\left\{\Phi^{-1}\left[F_i(X_i^*)\right]\right\} \Big/ f_i(X_i^*)$$

$$m_{X_i'} = X_i^* - \Phi^{-1}[F_i(X_i^*)] s_{X_i'}$$

9.2 结构可靠度分析的实用方法

计算当量正态变量的标准差$s_{X_i'}$和均值$m_{X_i'}$，并分别代替原来变量的标准差s_{X_i}和均值m_{X_i};

(4)求方向余弦

$$a_i = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{X^*} s_{X_i}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{X^*} s_{X_i}\right)^2\right]^{1/2}}$$

(5)按公式

$$g\left(m_{X_1} + a_1 b s_{X_1}, m_{X_2} + a_2 b s_{X_2}, \mathbf{L}, m_{X_n} + a_n b s_{X_n}\right) = 0,$$

求解β;

9.2 结构可靠度分析的实用方法

(6)计算X_i^*的新值

$$X_i^* = m_{Xi} + a_i b s_{Xi}$$

重复步骤(3)~(6)，直到前后两次计算所得的值相对差值不超过容许限值。

9.3 相关随机向量的结构可靠度计算

■**结构功能函数中各基本变量间的相关性**

●**举例**

地震作用与重力荷载

风载与雪载

●**相关性**

$X\uparrow \quad \rightarrow \quad Y\uparrow$	正相关
$X\uparrow \quad \rightarrow \quad Y\downarrow$	负相关
X变化与Y变化无关	独立

9.3 相关随机向量的结构可靠度计算

●**相关系数**

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

$$s_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad \text{协方差}$$

■**相关性对结构可靠度的影响**

●**简单情况**

$Z = R - S$ $\quad R$与S相关，且为正态变量

$$b = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{s_R^2 + s_S^2 - 2r_{RS}s_R s_S}}$$

9.3 相关随机向量的结构可靠度计算

两个相关变量非线性极限状态方程可靠度设计结果

ρ	二阶矩阵法		数值积分	
	β	p_f	β	p_f
0.45	5.1074	1.6335×10^{-7}	5.1518	1.2901×10^{-7}
0.1	4.1545	1.6296×10^{-5}	4.1867	1.4150×10^{-5}
0	3.9747	3.5231×10^{-5}	4.0037	3.1177×10^{-5}
−0.1	3.8185	6.7124×10^{-5}	3.8444	6.0416×10^{-5}
−0.45	3.3982	3.3921×10^{-4}	3.4137	3.2048×10^{-4}
−0.9	3.0292	1.2262×10^{-3}	3.0319	1.2150×10^{-3}
−0.99	2.9698	1.2898×10^{-3}	2.9701	1.4885×10^{-3}

9.4 结构体系的可靠度

结构失效≠结构体系失效

一、基本概念

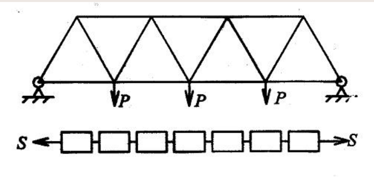
1. 结构构件的失效性质

- 脆性构件——失效后丧失功能
- 延性构件——失效后保持功能

2. 结构体系的失效模型

9.4 结构体系的可靠度

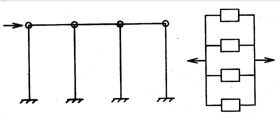
- **串联模型——静定结构**



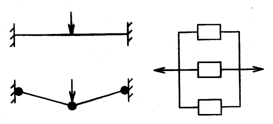
静定桁架与串联模型

9.4 结构体系的可靠度

- **并联模型——超静定结构(单一失效形态)**



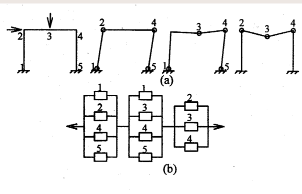
排架结构与并联模型



超静定梁与并联模型

9.4 结构体系的可靠度

- **串-并联模型——超静定结构(多失效形态)**



超静定刚架与串-并联模型

9.4 结构体系的可靠度

3.结构体系可靠度计算的复杂性

- 构件失效间的相关性

ü 构件抗力间的相关性

ü 构件荷载效应间的相关性

- 构件失效形态的不唯一性
- 构件失效间的相关性

ü 荷载相关

ü 所含失效构件相关

9.4 结构体系的可靠度

二、结构体系可靠度的上下界

Ø 设：结构体系有n个元件；

各元件的失效状态为 $\overline{X_i}$，失效概率为P_{fi}；

结构系统的失效概率为P_f。

1.串联系统

- **各元件工作状态完全独立**

$$p_f = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - p_{f_i}\right)$$

9.4 结构体系的可靠度

●各元件工作状态完全相关

$$p_f = 1 - P\left(\min_{i\in 1,n} X_i\right) = 1 - \min_{i\in 1,n}\left(1 - P_{f_i}\right) = \max_{i\in 1,n} p_{f_i}$$

●一般情况

$$\max_{i\in 1,n} p_{f_i} \le p_f \le 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_{f_i}\right)$$

可见，对于静定结构，结构体系的可靠度总小于或等于构件的可靠度。

9.4 结构体系的可靠度

2.并联系统

●各元件工作状态完全独立

$$p_f = P\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} p_{f_i}$$

●各元件工作状态完全相关

$$p_f = P\left(\min_{i\in 1,n} X_i\right) = \min_{i\in 1,n} p_{f_i}$$

9.4 结构体系的可靠度

●一般情况

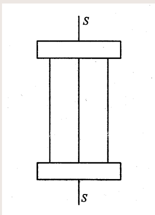
$$\prod_{i=1}^{n} p_{fi} \le p_f \le \min_{i\in 1,n} p_{f_i}$$

可见，对于失效形态唯一的超静定结构，结构体系的可靠度总大于或等于构件的可靠度。

9.4 结构体系的可靠度

三、例题

各构件为延性拉杆



受力体系图

$$b = \frac{\ln(3m_R) - \ln S}{\sqrt{d_R^2 + d_S^2}}$$