

文章编号: 1000-4750(2011)11-0083-06

# 基于双重非线性的混凝土坝极限承载力研究

姜亚洲<sup>1</sup>, \*任青文<sup>1</sup>, 吴 晶<sup>2</sup>, 杜小凯<sup>3</sup>

(1. 河海大学力学与材料学院, 南京 210098; 2. 上海友为工程设计有限公司, 上海 200333; 3. 中国水电工程顾问集团公司, 北京 100011)

**摘 要:** 混凝土坝接近破坏时混凝土材料进入塑性状态发生有限变形, 研究几何非线性和包含应变软化的材料非线性对其极限承载能力的影响具有实际意义。该文的研究中本构律考虑材料非线性的应变软化, 协调律考虑几何非线性, 平衡律涉及几何非线性, 采用超载法分析混凝土坝的极限承载能力, 选取弧长法计算混凝土坝上游水压荷载位移曲线极值点以及下降段, 给出双重非线性即包含应变软化的材料非线性和几何非线性对重力坝系统整体极限承载能力的影响。

**关键词:** 混凝土坝; 极限承载力; 有限变形; 双重非线性; 几何非线性; 应变软化

**中图分类号:** TV311; TU37 **文献标志码:** A

## STUDY ON THE MAXIMUM BEARING CAPACITY OF CONCRETE DAM BASED ON DOUBLE NONLINEARITY

JIANG Ya-zhou<sup>1</sup>, \*REN Qing-wen<sup>1</sup>, WU Jing<sup>2</sup>, DU Xiao-kai<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Youwei Engineering Consulting Limited Company, Shanghai 200333, China;

3. China Hydropower Engineering Consulting Group Corporation, Beijing 100011, China)

**Abstract:** The finite deformation and plasticity will occur when a concrete dam is close to failure. It is very important to study the effect of geometric nonlinearity and material nonlinearity including strain softening on maximum bearing capacity. In this paper, material constitutive relation with strain softening, nonlinear geometry equations and equilibrium differential equations considering geometric nonlinearity are presented. The maximum bearing capacity of a concrete dam is obtained by the over-loading method and Arc-length method used to calculate the peak point and falling branch of the load-displacement curve, then the effect of double nonlinearity, including geometric and material nonlinearity considering strain softening, on the maximum bearing capacity are discussed.

**Key words:** concrete dams; maximum bearing capacity; finite deformation; double nonlinearity; geometric nonlinearity; strain softening

### 1 研究背景

关于混凝土坝非线性的已有研究通常是基于小变形的假设<sup>[1-4]</sup>, 而基于有限变形的非线性研究尚未广泛开展。已有的研究中, 主要考虑理想弹塑

性或弹脆性材料的非线性对局部应力和整体稳定性的影响, 很少考虑应变软化对混凝土坝极限承载能力的影响。此外, 混凝土坝接近破坏时变形有较大发展, 出现有限变形, 几何非线性对大坝极限承载能力影响的研究也基本上没有进行。本文从弹塑

收稿日期: 2010-03-05; 修改日期: 2010-06-28

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 973 计划项目(2007CB714104); 国家自然科学基金项目(51079045)

作者简介: 姜亚洲(1985-), 男, 江苏灌南人, 博士生, 从事重大工程灾变破坏与安全研究(E-mail: jyzhu@gmail.com);

\*任青文(1943-), 男, 浙江宁海人, 教授, 硕士, 江苏省力学学会理事长, 从事复杂力学系统的破坏与安全研究(E-mail: renqw@hhu.edu.cn);

吴 晶(1985-), 女, 江苏太仓人, 工程师, 硕士, 从事灾变破坏力学研究(E-mail: renqw@hhu.edu.cn);

杜小凯(1979-), 男, 北京人, 工程师, 博士, 从事水工结构工程设计与审查(E-mail: duxiaokai2003@163.com).

性力学的 3 个基本方程(本构律、协调律和平衡律)出发,分析几何非线性和包含应变软化的材料非线性对 3 个基本方程影响,并用数值试验研究了基于有限变形并考虑应变软化的双重非线性对混凝土坝极限承载能力的影响。

## 2 非线性力学理论

混凝土坝在设计工况下的变形一般属于小变形问题,而研究混凝土坝破坏时的极限承载力则可能涉及有限变形。研究表明,混凝土单轴压缩应力-应变曲线的峰值点应变  $\varepsilon_c$  在 0.002 附近<sup>[5]</sup>,高强度混凝土的应力-应变曲线下降段显得更脆,应力下降更为剧烈。混凝土单轴拉伸应力的应变曲线峰值点应变  $\varepsilon_t$  则在  $2 \times 10^{-4}$  左右,考虑应变软化,最终破坏应变可以达到  $1 \times 10^{-3}$  附近(图 1)。因此,混凝土坝的破坏研究需要考虑几何非线性。

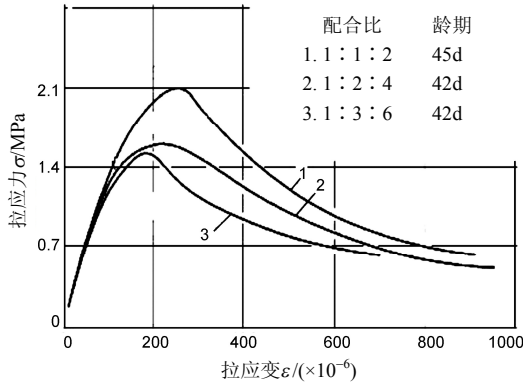


图 1 混凝土单轴拉伸应力-应变曲线<sup>[6]</sup>

Fig.1 Uniaxial tensile stress-strain curve of concrete

### 2.1 协调律

对于几何非线性问题,考察体的变形量与结构尺寸相比不能被忽略,反映应变-位移关系的几何微分方程出现位移梯度的乘积项或平方项,即反映应变和位移关系的几何方程不再是线性方程<sup>[7]</sup>,舍去三次项等高次项,协调律可表示为:

$$\begin{cases} E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u_i = \bar{u}_i, & \text{在 } S_u \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u_i$  为定义于初始参考态 Lagrange 坐标描述的位移分量;  $E_{ij}$  为相应的 Green 应变;  $(u_{i,j} + u_{j,i})/2$  是常规小变形的线性项;  $u_{k,i}u_{k,j}/2$  是有限变形引起的几何非线性项; 下标  $i, j, k=1,2,3$ ;  $\Omega$  为考察体;  $S_u$  为考察体位移边界。

### 2.2 平衡律

考察体的有限变形造成了结构变形后的位移

与变形前的位移存在较大的偏差,使得基于变形后位移建立的平衡微分方程中出现了应力与位移梯度的乘积项。此时平衡律可表示为<sup>[7-8]</sup>:

$$\begin{cases} [\sigma_{kl}(\delta_{il} + u_{i,l})]_k + p_i = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{kl}(\delta_{il} + u_{i,l})N_k = \bar{T}_i, & \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $u_i$ 、 $\sigma_{kl}$  分别为 Lagrange 坐标描述的位移和 Kirchhoff 应力张量;  $p_i$  和  $\bar{T}_i$  分别是以变形前构形的单位体积和单位面积定义的体积力和面力强度。

### 2.3 本构律

本构律中包含应变软化,考虑到坝体混凝土开裂后能够受压而不能受拉的特点,本文采用 Lubliner J<sup>[9]</sup>和 Lee J<sup>[10]</sup>提出的塑性损伤模型来模拟水位升降荷载作用下混凝土材料的响应。

#### 2.3.1 屈服函数

以  $F$  表示应变屈服函数<sup>[11]</sup>,表达式为:

$$F(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^{pl}) = \frac{(\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\bar{\varepsilon}^{pl}) + \gamma)\langle \hat{\sigma}_{\max} \rangle}{1 - \alpha} - \bar{\sigma}_c(\bar{\varepsilon}_c^{pl}) \quad (3)$$

式中:  $\alpha = (\sigma_{b0} - \sigma_{c0}) / (2\sigma_{b0} - \sigma) = (0.08 \sim 0.12)$ ;  $\beta(\bar{\varepsilon}^{pl}) = \bar{\sigma}_c(\bar{\varepsilon}_c^{pl})(1 - \alpha) / \bar{\sigma}_t(\bar{\varepsilon}_t^{pl}) - (1 + \alpha)$ ;  $p$  为有效静水压力;  $q$  为等效应力;  $\bar{\sigma}$  为有效应力;  $\hat{\sigma}_{\max}$  是  $\bar{\sigma}$  特征值中的最大值;  $\bar{\sigma}_t$  为拉伸屈服应力;  $\bar{\sigma}_c$  为受压屈服应力;  $\alpha$  和  $\gamma$  是材料参数;  $\sigma_{b0}$ 、 $\sigma_{c0}$  分别为双轴、单轴受压屈服应力;  $\bar{\varepsilon}^{pl}$  为等效塑性应变; 下标  $t$  表示受拉状态; 下标  $c$  表示受压状态。仅当三轴都为受压状态时,系数  $\gamma$  才起作用,对混凝土等准脆性材料,  $\gamma = 3$ 。受压受拉屈服面在偏平面上的投影<sup>[12]</sup>见图 2。

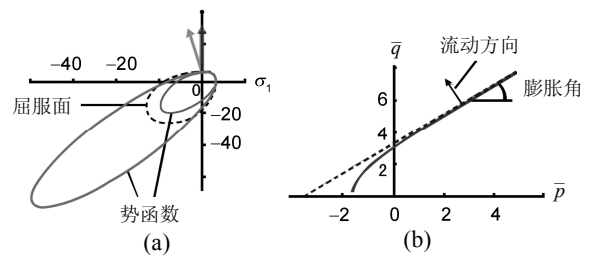


图 2 屈服面和塑性势函数

Fig.2 Yield surface and plastic potential function

#### 2.3.2 流动法则

材料非线性涉及应变软化时 Drucker-Prager 稳定性公设不再成立,基于弱稳定准则考虑应变软化,采用非关联流动法则,假设:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial G(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4)$$

塑性势函数采用指数型 Drucker-Prager 势函数<sup>[11]</sup>:

$$G = \sqrt{(\varepsilon\sigma_{t0} \tan\psi)^2 + \bar{q}^2} - \bar{p} \tan\psi \quad (5)$$

式中： $\psi$  是高围压  $p-q$  上的膨胀角； $\sigma_{t0}$  是单轴拉伸破坏应力； $\varepsilon$  是指数参数，见图 2。

### 2.3.3 应力-应变关系

应力-应变关系引入劲度衰减因子  $d$ ，Cauchy 应力与 Green 应变关系表示为：

$$\sigma = (1-d)\mathbf{D}_0^{el} : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) = \mathbf{D}^{el} : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (6)$$

式中： $\mathbf{D}_0^{el}$  是材料初始未损伤弹性劲度矩阵，拉伸压缩劲度衰减因子  $d = (0 \sim 1)$  取决于塑性应变、温度  $\theta$  和场变量  $f_i (i=1, 2, \dots)$ 。

应力-应变曲线如图 3 所示<sup>[11]</sup>。

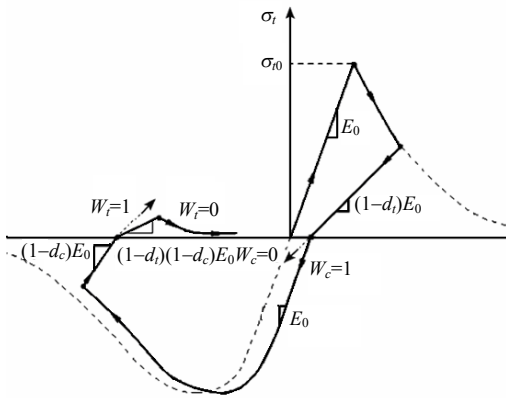


图 3 单轴拉压应力-应变曲线

Fig.3 Uniaxial tensile and compressive stress-strain curve

## 3 非线性力学问题的有限元方法

### 3.1 非线性有限元支配方程

Lagrange 坐标变化率形式虚功方程为：

$$\int_{V_0} S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} dV_0 = \int_{S_{0\sigma}} p_i^0 \delta v_i dS_0 + \int_{V_0} F_i^0 \delta v_i dV_0 \quad (7)$$

式中  $\delta v_i$  是考察体内质点的虚速度分量。

利用伽辽金有限元法，即以形函数为权函数，则单元内应变速率与节点速度可以表示为<sup>[7]</sup>：

$$\dot{E}_{ij} = [\mathbf{B}_{ij}] \{\dot{U}\} = \left[ \frac{1}{2} ([N_i]_{,j} + [N_j]_{,i}) + [N_k]_{,i} [N_k]_{,j} \{\mathbf{U}\} \right] \{\dot{U}\} \quad (8)$$

式中： $\mathbf{U}$  为单元节点位移分量构成的列向量；应变速率  $\dot{E}$  与单元节点速度  $\{\dot{U}\}$  之间的转换系数  $[\mathbf{B}_{ij}]$

称为几何矩阵； $\frac{1}{2} ([N_i]_{,j} + [N_j]_{,i})$  为小应变条件下的几何矩阵； $[N_k]_{,i} [N_k]_{,j} \{\mathbf{U}\}$  是有限变形条件下由几何非线性产生的附加项，代入式(7)，并令单元体

力与面力  $\int_{S_{0\sigma}} p_i^0 \delta v_i dS_0 + \int_{V_0} F_i^0 \delta v_i dV_0 = \{P_i\}$  得到有限变形 Lagrange 描述的有限元方程：

$$\{P_i\} = \int_{V_0} \frac{1}{2} ([N_i]_{,j}^T + [N_j]_{,i}^T) S_{ij} dV_0 + \int_{V_0} ([N_k]_{,i} [N_k]_{,j} \{\mathbf{U}\})^T S_{ij} dV_0 \quad (9)$$

式中等号右边第一项积分与小应变情况下一致，第二项是有限变形由于几何非线性引起的附加项。写成增量形式，即有限变形条件下 Lagrange 有限元求解方程增量形式的支配方程为：

$$\{\Delta P_i\} = [\mathbf{K}] \{\Delta U\} = ([\mathbf{K}]^0 + [\mathbf{K}]^1 + [\mathbf{K}]^2 - [\mathbf{Q}_t]) \{\Delta U\} \quad (10)$$

式中：

$$[\mathbf{K}]^0 = \int_{V_0} [N_i]_{,j}^T C_{ijkl}^0 [N_k]_{,l} dV_0;$$

$$[\mathbf{K}]^1 = \int_{V_0} [N_\lambda]_{,i}^T \sigma_{ij} [N_\lambda]_{,j} dV_0;$$

$$[\mathbf{K}]^2 = \int_{V_0} [[N_i]_{,j}^T C_{ijkl}^0 [N_\beta]_{,k} [N_\beta]_{,l} \{\mathbf{U}\} + [N_\lambda]_{,i}^T [N_\lambda]_{,j} \{\mathbf{U}\} C_{ijkl}^0 [N_k]_{,l} + [N_\lambda]_{,i}^T [N_\lambda]_{,j} \{\mathbf{U}\} C_{ijkl}^0 [N_\beta]_{,k} [N_\beta]_{,l} \{\mathbf{U}\}] dV_0;$$

式中： $[\mathbf{K}]^0$  即为常用的小位移小应变刚度矩阵； $[\mathbf{K}]^1$  为几何非线性引起的初应力刚度； $[\mathbf{K}]^2$  为几何非线性引起的初位移刚度； $[\mathbf{Q}_t]$  称为荷载刚度矩阵。

### 3.2 非线性方程求解

有限变形考虑几何非线性与应变软化，需要解决荷载极限点刚度矩阵奇异甚至无法进行迭代的问题，为了得到考察体荷载-位移曲线的峰值点与下降段，本文采用弧长法来克服这个困难。

弧长法<sup>[11,13]</sup>基本原理是将施加的荷载也作为一个未知量，通过同时约束荷载水平和位移向量来达到对非线性问题得求解，它属于一种广义的位移控制法，采用该迭代控制方法能较好地解决极值点和下降段问题。它的基本思想是引入一个在几何上相当于解曲线弧长的参数，通过控制弧长参数来实现每个增量步，从物理意义上看，这相当于对位移和荷载的综合控制，采用引入弧长因子确定荷载增量来进行迭代，直至确定合适的荷载增量，弧长的定义为：

$$\Delta l = \Delta \lambda_i \times \sqrt{v_i^N (v_i^N)^T + 1} \quad (11)$$

式中： $\Delta l$  为增加的弧长； $\Delta \lambda_i$  为荷载增加系数； $v_i^N$  为位移增量与初次迭代得到的最大位移绝对值之比。

## 4 数值模型试验

某混凝土重力坝坝高为 95m，底宽 84.4m，基

岩选取范围为坝踵向上游 175m,坝趾向下游 150m,建基面向下取 322m。计算荷载为自重和上游水荷载,坝体建基面和地基的材料参数见表 1。因坝体与地基材料的变形模量远大于建基面变形模量,且观测点位于建基面,为减少计算量采用线弹性模型。建基面材料采用节 2.3 本构律中所述的损伤应变软化模型,不同计算工况的最终破坏应变值见表 2。表 2 中最终破坏应变  $0.8 \times 10^{-3}$  取值依据是图 1 所描述的实验资料,  $1.2 \times 10^{-3}$  是为了验证极限承载能力对材料参数的敏感性而取的值。工况 1、工况 4 是材料本构为理想弹塑性工况,其他工况采用了本文第 2 节中提到的考虑损伤应变软化的本构模型,工况 1~工况 3 同时考虑了材料非线性和几何非线性,而工况 4~工况 6 仅考虑了材料非线性。

表 1 材料参数表

Table 1 Material parameters

材料分区	密度	变模/GPa	泊松比	抗拉强度/MPa	抗压强度/MPa
坝体混凝土	2400	24	0.167	/	/
建基面	2400	5	0.167	2	44
基岩	2700	24	0.167	/	/

表 2 各计算工况建基面材料最终破坏应变参数表

Table 2 Material parameters of the foundation plane in different conditions

编号	E/GPa	几何非线性	应变软化	最终拉破坏应变/ $(\times 10^{-3})$
1	5	√	/	/
2	5	√	√	1.2
3	5	√	√	0.8
4	5	/	/	/
5	5	/	√	1.2
6	5	/	√	0.8

注:最终破坏应变取值依据见本文图 1 与第 4 节,表 2 中符号√表示考虑了此因素,而符号/表示未考虑了此因素。

图 4 为重力坝剖面图,图 5 为重力坝建基面地基系统整体模型网格图。

### 5 结果分析

图 6~图 8 是重力坝建基面取不同材料参数时坝体整体超载的荷载  $P$ -位移  $U$  曲线,图 6~图 10 中  $P_0$  是指设计工况下上游坝面所受水压。

图 6 显示了材料非线性为理想弹塑性时,考虑几何非线性与否,坝体承载能力与位移的关系曲线。可以看出,重力坝建基面观测点位移达到 5cm 附近,几何非线性的作用开始体现,几何非线性的考虑提高了承载能力,但极限承载能力(图 6 中曲线峰值点)两者相差不大,仅提高  $0.11P_0$  左右。图 7、图 8 给出考虑应变软化时,坝体承载能力与位移的

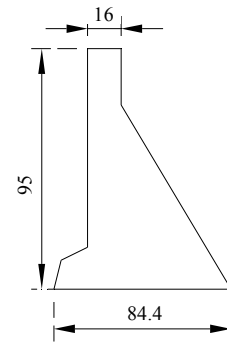


图 4 混凝土重力坝剖面图 /m  
Fig.4 Profile of concrete gravity dam

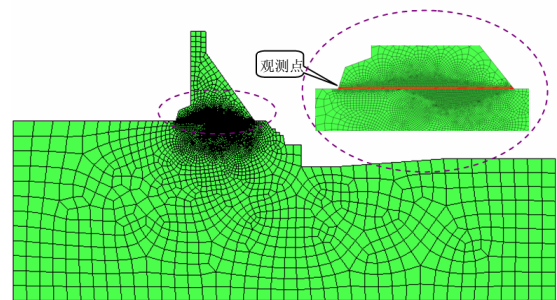


图 5 重力坝地基系统有限元模型  
Fig.5 Finite element model of the dam-foundation system

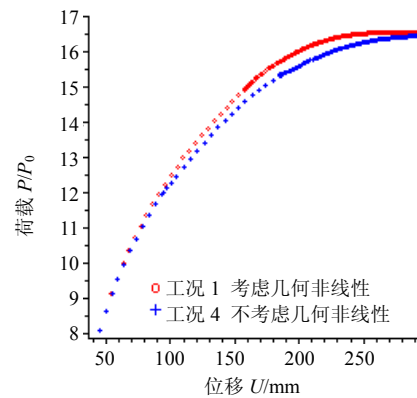


图 6 荷载位移曲线(理想弹塑性)  
Fig.6 Ideal elasto-plastic constitutive

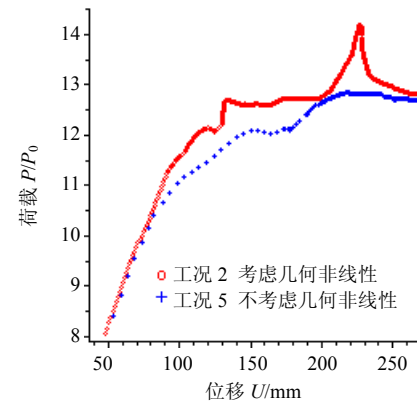


图 7 荷载位移曲线(应变软化,最终破坏应变  $1.2 \times 10^{-3}$ )  
Fig.7 Strain softening (ultimate destroy strain  $1.2 \times 10^{-3}$ )

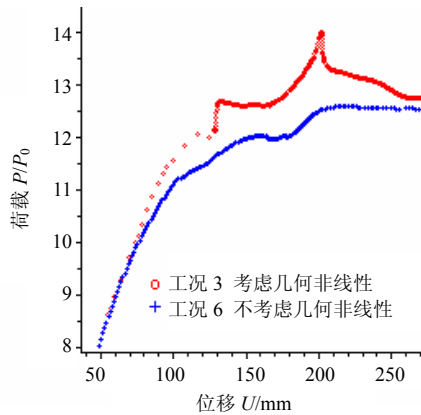


图 8 荷载位移曲线(应变软化, 最终破坏应变  $0.8 \times 10^{-3}$ )  
Fig.8 Strain softening (ultimate destroy strain  $0.8 \times 10^{-3}$ )

关系曲线, 可知几何非线性较大提高了系统的极限承载能力(图 7 和图 8 中曲线峰值点), 当最终破坏拉应变分别为  $1.2 \times 10^{-3}$  和  $0.8 \times 10^{-3}$  时, 极限承载能力提高的幅度为  $1.35P_0$  和  $1.40P_0$ 。

图 9、图 10 反映了应变软化对承载能力的影响, 应变软化使系统的极限承载能力(图 9 和图 10 中曲

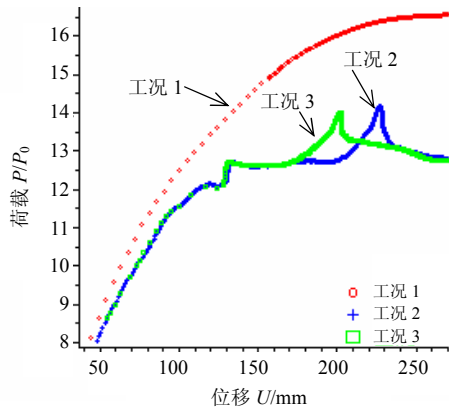


图 9 荷载位移曲线(不同材料非线性, 考虑几何非线性)  
Fig.9 Force-displacement curves with different nonlinear material constitutive and geometric nonlinearity

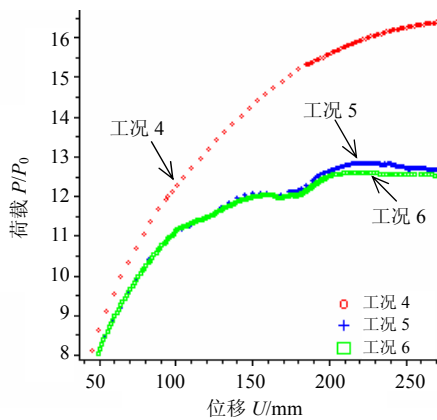


图 10 荷载位移曲线(不同材料非线性, 不考虑几何非线性)  
Fig.10 Force-displacement curves with different nonlinear material constitutives while without geometric nonlinearity

线峰值点)减小。最终破坏拉应变不同, 系统极限承载能力下降的幅度亦有所区别。与理想弹塑性相比, 不考虑几何非线性时最终破坏拉应变为  $1.2 \times 10^{-3}$ 、 $0.8 \times 10^{-3}$  分别减少  $3.62P_0$ 、 $3.86P_0$ , 占总荷载的 22.0%、23.5%之多; 考虑几何非线性时分别减少  $2.38P_0$ 、 $2.58P_0$ , 占总荷载的 14.4%、15.5%, 见表 3。

表 3 几何非线性和应变软化对承载能力的影响

Table 3 Effects of material and geometric nonlinearity on the load-bearing capacity

最终破坏 应变/( $\times 10^{-3}$ )	不考虑几何非线性		考虑几何非线性	
	减少荷载	减少比例/(%)	减少荷载	减少比例/(%)
1.2	$3.62P_0$	22.00	$2.38P_0$	14.40
0.8	$3.86P_0$	23.50	$2.58P_0$	15.50

注: 与理想非线性极限(最大)承载力比较得出的减少荷载。

图 7、图 8 中的荷载位移曲线有所波动, 初步分析是由于最终拉破坏应变较小时, 应变软化引起迭代过程中部分单元应力剧烈调整导致整体承载能力的波动。

## 6 结论

本文研究了建基面非线性对重力坝系统极限承载能力的影响, 得出以下结论:

(1) 材料本构采用理想弹塑性而不包含应变软化, 会高估系统的极限承载能力, 偏不安全。考虑应变软化, 残余承载能力小于极限承载能力(最大承载能力)。不同最终破坏拉应变对系统的极限承载能力影响亦有所差别。

(2) 几何非线性影响系统的整体承载能力。当本构模型是理想弹塑性时, 几何非线性的影响很小; 本构模型考虑应变软化后, 几何非线性将显著影响系统的极限承载能力。

## 参考文献:

[1] 周伟, 常晓林. 高混凝土重力坝复杂坝基稳定安全度及极限承载能力研究[J]. 岩土力学, 2006, 27: 161-166.  
Zhou Wei, Chang Xiaolin. Study of stabilization safety and limit load carrying capacity for complex foundation of high concrete gravity dam [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27: 161-166. (in Chinese)

[2] 常晓林, 杨海云, 周伟, 等. 重力坝沿建基面失稳破坏的真实安全度研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(9): 2365-2372.  
Chang Xiaolin, Yang Haiyun, Zhou Wei, et al. Study of true safety degree of failure along foundation surface of gravity dam [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(9): 2365-2372. (in Chinese)

- [3] 任青文, 钱向东, 赵引, 等. 高拱坝沿建基面抗滑稳定性的分析方法研究[J]. 水利学报, 2002(2): 10—13.  
Ren Qingwen, Qian Xiangdong, Zhao Yin, et al. Methods for analyzing sliding resistance stability along the base surface of high arch dam [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002(2): 10—13. (in Chinese)
- [4] 钱向东, 赵引, 任青文. 建基面强度对拱坝应力变形的影响[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2001, 29(3): 95—98.  
Qian Xiangdong, Zhao Yin, Ren Qingwen. Influence of the strength of bearing surface on stress and deformation of arch dams [J]. Journal of Hehai University (Natural Sciences), 2001, 29(3): 95—98. (in Chinese)
- [5] Chen W F, Saleeb A F. Constitutive equations for engineering materials [M]. New York: Wiley Inter-science, 1994.
- [6] Evans R H, Marathe M S. Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension [J]. Materials and Structures, 1968(1): 61—64.
- [7] 孟凡中. 弹塑性有限变形理论和有限元方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.  
Meng Fanzhong. Theory of elasto-plastic finite deformation and finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1985. (in Chinese)
- [8] 卓家寿, 邵国建. 力学建模导论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.  
Zhuo Jiashou, Shao Guojian. Introduction of mechanical model [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [9] Lubliner J, Oliver J, Oller S, et al. A Plastic-damage model for concrete [J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, 25(3): 229—326.
- [10] Lee J, Fenves G. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(8): 892—900.
- [11] ABAQUS Inc. ABAQUS theory manual, version 6.6 [M]. USA: Dassault Systemes Simulia Corp, 2006.
- [12] Rahman T, Lutz W, Finn R, et al. Simulation of the mechanical behavior and damage in components made of strain softening cellulose fiber reinforced gypsum materials [J]. Computational Materials Science, 2007, 39(1): 65—74.
- [13] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.  
Wang Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)

(上接第 63 页)

- [10] Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 51: 31—49.
- [11] 李杰, 吴建营. 混凝土弹塑性损伤本构模型研究 I: 基本公式[J]. 土木工程学报, 2005, 38(9): 14—27.  
Li Jie, Wu Jianying. Elastoplastic damage constitutive model for concrete based on damage energy release rates, part I: Basic formulations [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38 (9): 14—27. (in Chinese)
- [12] 李传亮, 孔祥言. 多孔介质的双重有效应力[J]. 自然杂志, 1998, 21(5): 288—291.  
Li Chuanliang, Kong Xiangyan. Double effective stresses of porous media [J]. Chinese Journal of Nature, 1998, 21(5): 288—291. (in Chinese)
- [13] 李传亮, 孔祥言. 多孔介质的流变模型研究[J]. 力学学报, 2003, 35(2): 230—234.  
Li Chuanliang, Kong Xiangyan. A study on rheological model of porous media [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, 35(2): 230—234. (in Chinese)