

文章编号: 1000-4750(2011)11-0059-05

水饱和混凝土单轴压缩弹塑性损伤本构模型

陈有亮, *邵 伟, 周有成

(上海理工大学土木工程系, 上海 200093)

摘 要: 多孔多相的饱和混凝土中, 孔隙自由水对混凝土的力学特性有显著的影响。该文基于损伤力学基本原理建立了单轴压缩条件下水饱和混凝土的弹塑性损伤本构模型, 并结合太沙基“有效应力原理”, 认为材料的损伤是由本体有效应力和结构有效应力引起的, 根据应力平衡条件得出了两种有效应力下的应力关系方程, 并在此基础上建立了水饱和混凝土的单轴压缩损伤演化方程。

关键词: 水饱和混凝土; 单轴压缩; 本构模型; 有效应力; 演化方程

中图分类号: TU528.01 **文献标志码:** A

ELASTOPLASTIC DAMAGE CONSTITUTIVE MODEL OF WATER-SATURATED CONCRETE UNDER UNIAXIAL COMPRESSION

CHEN You-liang, *SHAO Wei, ZHOU You-cheng

(Department of Civil Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: In multi-phase porous saturated concrete, pore water in the saturated concrete has a remarkable influence on the mechanical property of concrete. Based on the basic principles of damage mechanics, an elasto-plastic damage constitutive model for water-saturated concrete under uniaxial compression is established. Combined with the Terzaghi's effective stress principle, it is found that the effective stresses of the body and structure lead to the damage of material. According to the stress equilibrium condition, the two kinds of effective stress relationship are attained. And on this basis, the damage evolution equation of water-saturated concrete under uniaxial compression is established.

Key words: water-saturated concrete; uniaxial compression; constitutive model; effective stress; evolution equation

在实际工程中, 许多混凝土结构经常在水环境下工作, 混凝土中含有大量的孔隙, 包括混凝土成型时残留下来的气泡, 水泥石中的毛细管孔隙和凝胶孔, 以及水泥石和集料接触处的孔穴等。在水压力的作用下, 水将渗透到混凝土的孔隙和裂缝中。受各种荷载的影响, 混凝土中的孔隙水会对孔壁产生水压力, 进而影响混凝土的力学性能。

目前对于混凝土材料的研究多以自然干燥条件下的混凝土试件为基础, 对水环境条件下混凝土

的力学性能的研究还比较少。国外 Yaman I O 等^[1]研究了湿态混凝土抗压强度、弹性模量随孔隙率的变化规律, 研究表明: 随着孔隙率和孔隙中含水量的增加, 混凝土的强度降低, 弹性模量升高。Ross C A 等^[2]对湿态混凝土的抗拉强度进行了分析研究, 结果表明: 随着混凝土湿度的增加, 混凝土的抗拉强度降低。Ross P 等^[3]对湿态混凝土在动力条件下抗拉性能的变化机理进行了解释。国内王海龙、李庆斌等^[4-6]采用细观断裂力学的方法研究了

收稿日期: 2010-03-02; 修改日期: 2010-05-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(10872133); 上海市浦江人才计划项目(09PJ1407700)

作者简介: 陈有亮(1966—), 男, 河北衡水人, 教授, 博士后, 从事混凝土、岩石材料力学方面的研究工作

(E-mail: chenyouliang2001@yahoo.com.cn);

*邵 伟(1984—), 男, 安徽蚌埠人, 硕士生, 从事混凝土、岩石材料力学方面的研究工作(E-mail: shaowei2775@163.com);

周有成(1984—), 男, 浙江温州人, 硕士生, 从事混凝土、岩石材料力学方面的研究工作(E-mail: zyu_scu@126.com).

湿态混凝土在外部荷载的作用下, 孔隙水压力的 大小对混凝土受力性能的影响; 并利用弹性断裂力学理论探讨了饱和混凝土的静力、动力抗压强度变化机理并建立了理论模型; 且根据拉伸荷载作用下混凝土中微裂纹的扩展规律和不同阶段微裂纹引起的混凝土非弹性柔度张量的变化, 考虑自由水的作用, 利用线弹性断裂力学建立了饱和混凝土的受拉本构模型。白卫峰等^[7]结合太沙基“有效应力原理”, 建立了饱和混凝土考虑动态应变率效应的单轴拉伸统计损伤模型, 将材料宏观力学性能同微观损伤机理有机地结合起来, 综合考虑了动态条件下惯性效应和自由水粘性效应的影响, 形象地描述了饱和混凝土材料动态损伤演化机制。如何解释混凝土材料的损伤机制, 以及如何在本构模型中反映有效应力对材料损伤演化的影响, 目前学术界还没有形成统一的认识。

本文尝试从损伤力学的角度, 分析了饱和水对混凝土的力学性能的影响, 建立了单轴压缩条件下水饱和混凝土的弹塑性损伤本构模型, 并结合太沙基“有效应力原理”, 得到两种有效应力下的应力关系方程, 并在此基础上建立了水饱和混凝土的单轴压缩损伤演化方程。

1 实验设计

本试验制作了尺寸为 100mm×100mm×300mm 普通棱柱体混凝土试件, 水泥采用强度等级 42.5 的普通硅酸盐水泥, 细骨料为普通河砂, 颗粒级配属于级配 II 区, 粗骨料为碎石, 最大粒径 40mm, 水为自来水, pH 值在 7.0 左右(由 pH 试纸测定), 混凝土配合比见表 1。

表 1 混凝土配合比

Table 1 Concrete mix proportion

材料	水泥/(kg/m ³)	水/(kg/m ³)	砂子/(kg/m ³)	石子/(kg/m ³)
配合比	336.5	175.0	625.5	1249.1

混凝土试件在制作完成 24h 后拆模, 试件表面应标识出试件日期, 然后放入混凝土养护箱养护 28d。然后分别对试件进行自然干燥和浸水处理。将部分试件放入洁净水中浸泡养护 7d, 使混凝土达到饱和状态。达到龄期后利用 SANS 微型控制电液伺服压力试验机对其进行单轴压缩试验, 研究自然干燥和水饱和两种不同湿度对混凝土材料本构模型的影响, 主要参数试验结果如表 2 所示。

表 2 主要参数试验结果

Table 2 Test results of main parameters

试验参数	$\varepsilon_e / (\times 10^{-6})$	$\varepsilon_c / (\times 10^{-6})$	σ_c / MPa	E_e / GPa
干燥	574	1720	36.1	32.3
	597	1781	36.6	34.1
	583	1844	37.8	33.7
水饱和	459	1605	32.6	44.8
	472	1563	33.5	42.5
	485	1578	34.9	41.0

注: ε_e 为混凝土弹性应变峰值, ε_c 为混凝土峰值应变, σ_c 为混凝土峰值应力, E_e 为材料的初始弹性模量。

2 机理分析

混凝土是一种非均质、不等向的多相复合材料, 混凝土内部的微裂纹, 可以分为贯通的微裂纹和封闭的微裂纹。在承受荷载前, 微裂纹处于稳定状态, 微裂纹中孔隙水压力会对混凝土产生预加荷载, 使得混凝土产生拉应力。当在混凝土外表面施加荷载时, 从混凝土的外表面到混凝土的内部产生一定的水力梯度, 造成渗流场。水在微裂纹内运动, 给裂纹的表面施加荷载, 裂纹中的自由水对裂纹产生劈拉作用, 加速了混凝土的损伤和微裂纹的扩展。

随着外荷载的增加, 饱和混凝土的孔隙水压力经历了从一个平稳到线性增长的过程^[8]。水通过凝胶孔或者凝胶体与骨料之间的界面, 水的作用降低了粒子之间的范德华力, 促使混凝土中的颗粒异向分开, 降低了混凝土颗粒之间的凝聚力, 使得损伤不断积累, 当裂纹尖端单元的损伤值达到临界值时, 微裂纹沿界面扩展。

随着微裂纹的增加, 外界水通过表面裂纹渗入到混凝土中, 水的进入加快了混凝土裂纹的扩展, 裂纹的扩展又引起渗透系数的增大, 水渗入加快。逐渐增加外部荷载, 满足一定的开裂准则后, 微裂纹就会发生弯折扩展, 经历一定角度的弯折后, 微裂纹的最终扩展方向与外加最大压荷载的方向平行。当分枝裂纹发展到一定的长度时, 混凝土中的裂纹就会发生汇合、串接而形成主裂纹, 从而导致饱和混凝土峰值应力的降低。

3 损伤本构模型

3.1 损伤本构模型

本文基于损伤力学的基本理论^[9-10], 来建立水饱和混凝土的本构模型, 饱和混凝土在单轴受压作

用下,产生的应变 ε 可以分解为弹性应变 ε_e 和塑性应变 ε_p :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (1)$$

式中: ε_e 为弹性应变; ε_p 为塑性应变。

根据内变量理论,引入损伤因子 D 和内变量 q 分别表征损伤和塑性的发展。假设材料的弹性自由能势和塑性自由能势不耦合,材料的 Helmholtz^[11]自由能势可分解为两项:

$$\Phi(\varepsilon, D, q) = \Phi_e(\varepsilon_e, D) + \Phi_p(\varepsilon_p, q) \quad (2)$$

式中: Φ_e 为由弹性应变引起的不可逆部分; Φ_p 为由塑性应变引起的不可逆部分。

材料的弹性自由能势和塑性自由能势分别表示为:

$$\Phi_e(\varepsilon_e, D) = \int_0^{\varepsilon_e} \sigma_e d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_e} E_e \varepsilon d\varepsilon \quad (3)$$

$$\Phi_p(\varepsilon_p, q) = \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} \sigma_p d\varepsilon = \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} E_p \varepsilon d\varepsilon \quad (4)$$

式中: σ_e 和 σ_p 分别为弹性阶段应力和损伤塑性阶段应力; E_e 和 E_p 分别为材料的初始弹性模量和损伤塑性模量。

由式(2)、式(3)、式(4)可得:

$$\Phi(\varepsilon, D, q) = \int_0^{\varepsilon_e} E_e \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} E_p \varepsilon d\varepsilon \quad (5)$$

令 $E_p = (1-D)E_e$,则式(5)可变为:

$$\Phi(\varepsilon, D, q) = \int_0^{\varepsilon} E_e \varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} E_e D \varepsilon d\varepsilon \quad (6)$$

又根据热力学控制方程可得:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \int_0^{\varepsilon} E_e \varepsilon d\varepsilon}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} E_e D \varepsilon d\varepsilon}{\partial \varepsilon} = (1-D)E_e \varepsilon \quad (7)$$

3.2 损伤演化方程

将混凝土看作是由力学性能相同的骨料颗粒组成的。混凝土存在两种变形机制:一是因混凝土骨料自身的变形而导致的混凝土的整体变形;另一种则是混凝土微观结构上的变化即骨料之间的永久性相对位移而导致的混凝土的整体变形,前一种称为本体变形,后一种称为结构变形^[12-13]。在饱和状态下,混凝土的损伤主要是因混凝土骨料自身的变形和微观结构上的变化共同作用的结果,即两种变形叠加的结果。变形机制示意图见图1。

3.2.1 本体有效应变

本体变形是因骨料自身的变形导致,为了得到本体应变的关系式,在介质中任取一界面 OO' ,设

总截面积为 A ,骨料所占截面积为 $(1-e)A$,孔隙所占截面积为 eA ,在该截面上对整个介质施加总应力 σ ,分析示意图如图2。

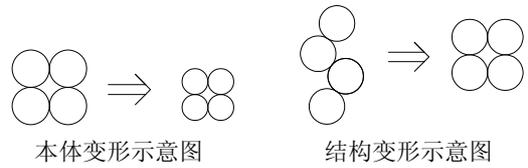


图1 两种变形机制示意图

Fig.1 Schematic diagram of two kinds of deformation mechanism

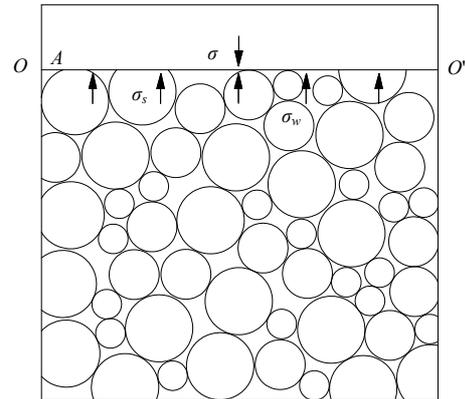


图2 本体变形应力分析示意图

Fig.2 Body deformation stress analysis diagram

根据截面受力平衡,则有:

$$\sigma A = \sigma_w e A + \sigma_s (1-e) A \quad (8)$$

式中: e 为孔隙率,本文取 $e=0.1$; σ 为总应力; σ_s 为骨料平均应力; σ_w 为孔隙水压力。

由式(8)可得应力关系方程:

$$\sigma = \sigma_w e + \sigma_s (1-e) \quad (9)$$

将 σ_s 折算到整个横截面上,得到本体有效应力:

$$\sigma_{\text{eff}}^w = \frac{\sigma_s (1-e) A}{A} = \sigma_s (1-e) \quad (10)$$

把式(10)代入式(9)可得本体有效应力公式:

$$\sigma = \sigma_{\text{eff}}^w + \sigma_w e \quad (11)$$

由式(11)可得本体有效应变:

$$\varepsilon_w = f_w(\sigma_{\text{eff}}^w) \quad (12)$$

3.2.2 结构有效应变

结构变形是介质微观结构上的变化,结构变形的产生取决于混凝土颗粒之间的触点应力,而与颗粒内部的应力状态无关。任取一不穿过颗粒内部且由触点连成的曲面 OO' ,分析示意图见图3。

设 A_{si} 为第 i 个触点应力的垂直分量 σ_{si} 的作用面积的垂直投影面积,则有下面的应力平衡关系:

$$\sigma A = \sum \sigma_{si} A_{si} + \left(A - \sum A_{si} \right) \sigma_w \quad (13)$$

$$\text{令 } \sigma_{\text{eff}}^s = \frac{\sum \sigma_{si} A_{si}}{A}, \quad e_w = 1 - \frac{\sum A_{si}}{A},$$

则式(13)可变成:

$$\sigma = \sigma_{\text{eff}}^s + e_w \sigma_w \quad (14)$$

式(14)可用来确定材料的结构有效应力。

结构有效应变量 ε_s 由 σ_{eff}^s 决定, 可得:

$$\varepsilon_s = f_s(\sigma_{\text{eff}}^s) \quad (15)$$

σ_{eff}^s 为所有触点应力在介质横截面积上的折算应力之和, 称之为结构有效应力。

由式(12)和式(15)可得总应变, 即为:

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon_s = f_w(\sigma_{\text{eff}}^w) + f_s(\sigma_{\text{eff}}^s) \quad (16)$$

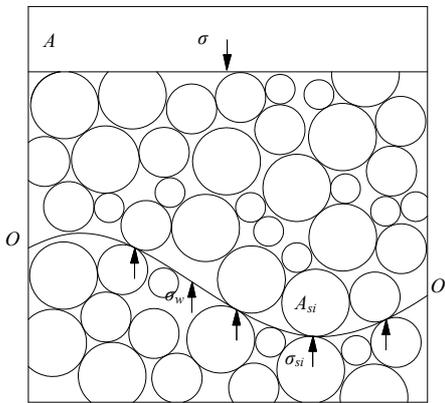


图3 结构变形应力分析示意图

Fig.3 Structural deformation stress analysis diagram

3.2.3 损伤变量

损伤变量 D 是材料损伤程度的度量, 而损伤程度是与各微单元所包含的缺陷多少有关, 微元的这些缺陷直接影响着损伤变量 D 演化形式。混凝土受压产生不可逆变形直到试件破坏的过程可视为损伤不断积累的过程。

假定材料损伤后仍然是弹塑性体, 假设骨料颗粒的破坏是一个弹塑性过程, 为了建立宏观和微观应变之间的关系, 故引入骨料颗粒弹性系数 λ :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{\varepsilon_e} \quad (17)$$

式中: ε_λ 为骨料颗粒弹性应变峰值; ε_e 为骨料颗粒极限应变。

假设结构有效应变全部为塑性应变, 弹性应变只存在于骨料颗粒的本身变形中, 则:

弹性应变为:

$$\varepsilon_e = \lambda \varepsilon_w = \lambda f_w(\sigma_{\text{eff}}^w) \quad (18)$$

塑性应变为:

$$\varepsilon_p = (1 - \lambda) \varepsilon_w + \varepsilon_s = (1 - \lambda) f_w(\sigma_{\text{eff}}^w) + f_s(\sigma_{\text{eff}}^s) \quad (19)$$

假设损伤的演变主要受初始损伤和耦合损伤

的塑性应变的影响, 假定本体有效应变引起的损伤和结构有效应变引起的损伤之间不耦合, 即将水饱和和混凝土的损伤看作是由初始损伤、本体有效应变引起的损伤和结构有效应变引起的损伤的积累。故损伤变量可以表示成:

$$D = D_0 + a \varepsilon_p \quad (20)$$

式中: D_0 表示材料的初始损伤; a 表示塑性变形损伤参数。

将式(19)代入式(20)可得:

$$D = D_0 + a \varepsilon_p =$$

$$D_0 + a(1 - \lambda) f_w(\sigma_{\text{eff}}^w) + a f_s(\sigma_{\text{eff}}^s) \quad (21)$$

式(21)即为水饱和混凝土的单轴受压弹塑性损伤演化方程。

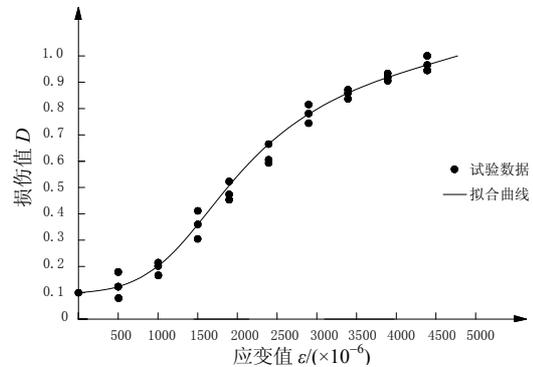


图4 损伤演化曲线

Fig.4 Damage evolution curve

本文假定初始损伤变量 D_0 在数值上等于孔隙率的数值, 通过对试验材料的破坏前后所得数据进行整理得到实测试验参数: $D_0=0.1$, $a=2.37 \times 10^2$, $\lambda=0.35$ 。根据本文试验所得的实验数据, 采用本文推导的损伤演化方程得到的水饱和混凝土的单轴压缩损伤演化曲线如图4所示。从图4中可以看出: 在加载前, 由于混凝土材料本身存在微裂纹, 即存在初始损伤, 损伤值 $D_0=0.1$ 。当应变小于 500×10^{-6} 之前, 混凝土损伤曲线近似为一条水平直线, 这是因为在外荷载作用下混凝土应变处于弹性阶段, 还未达到损伤应变阈值。当达到损伤应变阈值时, 混凝土损伤开始增长, 当达到峰值应变时, 混凝土损伤约为0.4。峰值应变之后, 混凝土损伤增长较快, 并最终达到完全损伤。

3.3 干燥和水饱和状态下应力-应变曲线及其比较

该试验的实测材料参数为: 干燥混凝土初始弹性模量 $E_e=33.4 \text{ GPa}$, 弹性应变峰值 $\varepsilon_e=585 \times 10^{-6}$, 混凝土峰值应变 $\varepsilon_c=1782 \times 10^{-6}$, 混凝土峰值应力 $\sigma_c=36.8 \text{ MPa}$, 水饱和混凝土初始弹性模量

$E_c=42.8\text{ GPa}$ ，弹性应变峰值 $\varepsilon_e=472\times 10^{-6}$ ，混凝土峰值应变 $\varepsilon_c=1582\times 10^{-6}$ ，混凝土峰值应力 $\sigma_c=33.7\text{ MPa}$ ，采用上述试验参数所得干燥和水饱和状态下混凝土单轴压缩应力-应变曲线如图 5、图 6 所示。

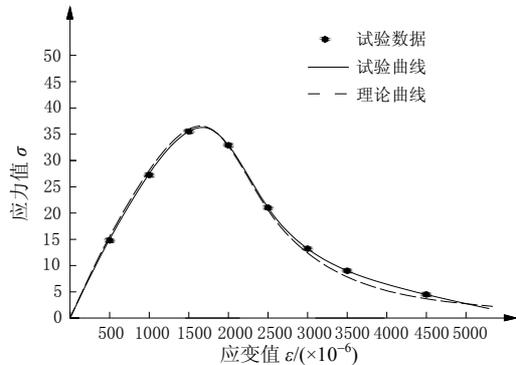


图 5 干燥混凝土应力-应变曲线
Fig.5 Stress-strain curve of dry concrete

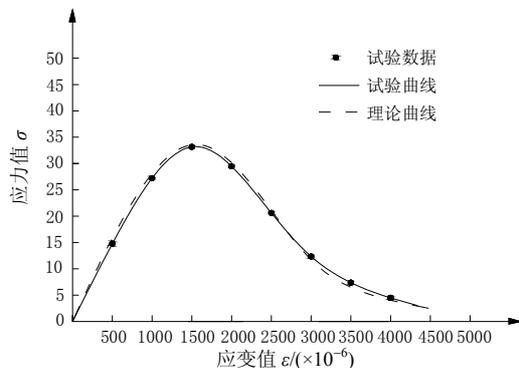


图 6 水饱和混凝土应力-应变曲线
Fig.6 Stress-strain curve of water-saturated concrete

对比图 5、图 6 可以看出：相对于干燥混凝土，水饱和混凝土的峰值应力、峰值应变降低，水饱和混凝土极限应变减小，即湿度越大，材料塑性越弱，混凝土越脆。还可以看出：水饱和混凝土损伤本构关系曲线与试验曲线符合程度好，而且是一条连续且可导的函数，符合混凝土单轴压缩全曲线的数字特征。

4 结论

(1) 本文建立了单轴压缩条件下水饱和混凝土的弹塑性损伤本构模型，并根据应力平衡条件得出了 2 种有效应力下的应力关系方程，并在此基础上建立了水饱和混凝土的单轴压缩损伤演化方程。

(2) 本文建立的水饱和混凝土单轴压缩损伤本构关系曲线不仅与试验曲线符合程度好，而且是一条连续且可导的函数，符合混凝土单轴压缩全曲线的数字特征。

(3) 本文对单轴压缩条件下水饱和混凝土的弹

塑性损伤本构模型进行的理论和试验研究，为研究水饱和混凝土结构的稳定性以及地下水 and 地表水对混凝土结构的影响奠定了初步的基础。

参考文献：

- [1] Yaman I O, Hearn N, AKtan H M. Active and non-active porosity in concrete, part II: Evaluation of existing models [J]. *Materials and Structures*, 2002, 35(2): 110—116.
- [2] Ross C A, Jerome D M, Tedesco J W. Moisture and strain rate effects on concrete strength [J]. *ACI Materials Journal*, 1996, 93(3): 293—300.
- [3] Rossi P, Van Mier J G M, Boulay C. The dynamic behaviour of concrete: Influence of free water [J]. *Materials and Structures*, 1992, 25: 509—514.
- [4] 王海龙, 李庆斌. 湿态混凝土抗压强度与本构关系的细观力学分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25(8): 1531—1536.
Wang Hailong, Li Qingbin. Mesomechanics analysis of compressive strength and constitutive equation of wet concrete [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(8): 1531—1536. (in Chinese)
- [5] 王海龙, 李庆斌. 饱和混凝土静动力抗压强度变化的细观力学机理[J]. *水利学报*, 2006, 37(8): 958—962.
Wang Hailong, Li Qingbin. Micro-mechanism of static and dynamic strengths for saturated concrete [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2006, 37(8): 958—962. (in Chinese)
- [6] 王海龙, 李庆斌. 水饱和混凝土静力抗拉强度降低细观机理及本构模型[J]. *应用基础与工程科学学报*, 2008, 16(1): 65—72.
Wang Hailong, Li Qingbin. Mesomechanics of tensile strength reduction and tension constitutive model of saturated concrete [J]. *Journal of Basic and Engineering*, 2008, 16(1): 65—72. (in Chinese)
- [7] 白卫峰, 陈健云, 范书立. 饱和混凝土单轴拉伸动态统计损伤本构模型[J]. *防灾减灾工程学报*, 2009, 29(1): 16—21.
Bai Weifeng, Chen Jianyun, Fan Shuli. The statistical dynamic damage constitutive model of saturated concrete under uniaxial tension [J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2009, 29(1): 16—21. (in Chinese)
- [8] 李庆斌, 王海龙. 水环境对混凝土力学性能的影响研究述评[J]. *中国科技论文在线*, 2006, 1(2): 83—94.
Li Qingbin, Wang Hailong. Influence of ambient water on properties of concrete [J]. *Science Paper Online*, 2006, 1(2): 83—94. (in Chinese)
- [9] Ju J W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25(7): 803—833.

(参考文献[10]—[13]转第 88 页)

- [3] 任青文, 钱向东, 赵引, 等. 高拱坝沿建基面抗滑稳定性的分析方法研究[J]. 水利学报, 2002(2): 10—13.
Ren Qingwen, Qian Xiangdong, Zhao Yin, et al. Methods for analyzing sliding resistance stability along the base surface of high arch dam [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002(2): 10—13. (in Chinese)
- [4] 钱向东, 赵引, 任青文. 建基面强度对拱坝应力变形的影响[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2001, 29(3): 95—98.
Qian Xiangdong, Zhao Yin, Ren Qingwen. Influence of the strength of bearing surface on stress and deformation of arch dams [J]. Journal of Hehai University (Natural Sciences), 2001, 29(3): 95—98. (in Chinese)
- [5] Chen W F, Saleeb A F. Constitutive equations for engineering materials [M]. New York: Wiley Inter-science, 1994.
- [6] Evans R H, Marathe M S. Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension [J]. Materials and Structures, 1968(1): 61—64.
- [7] 孟凡中. 弹塑性有限变形理论和有限元方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.
Meng Fanzhong. Theory of elasto-plastic finite deformation and finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1985. (in Chinese)
- [8] 卓家寿, 邵国建. 力学建模导论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
Zhuo Jiashou, Shao Guojian. Introduction of mechanical model [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [9] Lubliner J, Oliver J, Oller S, et al. A Plastic-damage model for concrete [J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, 25(3): 229—326.
- [10] Lee J, Fenves G. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(8): 892—900.
- [11] ABAQUS Inc. ABAQUS theory manual, version 6.6 [M]. USA: Dassault Systemes Simulia Corp, 2006.
- [12] Rahman T, Lutz W, Finn R, et al. Simulation of the mechanical behavior and damage in components made of strain softening cellulose fiber reinforced gypsum materials [J]. Computational Materials Science, 2007, 39(1): 65—74.
- [13] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
Wang Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)

(上接第 63 页)

- [10] Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 51: 31—49.
- [11] 李杰, 吴建营. 混凝土弹塑性损伤本构模型研究 I: 基本公式[J]. 土木工程学报, 2005, 38(9): 14—27.
Li Jie, Wu Jianying. Elastoplastic damage constitutive model for concrete based on damage energy release rates, part I: Basic formulations [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38 (9): 14—27. (in Chinese)
- [12] 李传亮, 孔祥言. 多孔介质的双重有效应力[J]. 自然杂志, 1998, 21(5): 288—291.
Li Chuanliang, Kong Xiangyan. Double effective stresses of porous media [J]. Chinese Journal of Nature, 1998, 21(5): 288—291. (in Chinese)
- [13] 李传亮, 孔祥言. 多孔介质的流变模型研究[J]. 力学学报, 2003, 35(2): 230—234.
Li Chuanliang, Kong Xiangyan. A study on rheological model of porous media [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, 35(2): 230—234. (in Chinese)