

文章编号: 1000-4750(2011)11-0045-07

# 钢-混凝土组合梁考虑剪力滞效应实用设计方法

聂建国<sup>1</sup>, \*李法雄<sup>1</sup>, 樊健生<sup>1</sup>, 蔡奇<sup>2</sup>

(1. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 2. 北京市市政工程研究院, 北京 100037)

**摘 要:** 钢-混凝土组合梁翼板剪力滞效应对组合梁截面应力和变形产生重要影响。基于组合梁弹性理论分析模型, 忽略界面滑移效应, 推导了简支和悬臂组合梁在均布和集中荷载作用下的应力和变形成解析解。通过引入翼板有效宽度和截面有效刚度的两种简化设计方法分别考虑翼板剪力滞效应对组合梁截面应力和变形的影响。用该文提出的简化设计方法计算考虑剪力滞效应时组合梁截面应力和变形与解析结果吻合良好。通过比较分析各国规范关于组合梁剪力滞效应的设计方法, 该文提出的简化设计方法具有精度高、计算方法简单等优点。

**关键词:** 钢-混凝土组合梁; 剪力滞效应; 翼板有效宽度; 截面有效刚度; 设计方法

**中图分类号:** TU398 **文献标志码:** A

## PRACTICAL DESIGN METHOD FOR STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAM CONSIDERING SHEAR LAG EFFECT

NIE Jian-guo<sup>1</sup>, \*LI Fa-xiong<sup>1</sup>, FAN Jian-sheng<sup>1</sup>, CAI Qi<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Beijing Municipal Engineering Research Institute, Beijing 100037, China)

**Abstract:** Shear lag effect has significant effect on stress and deflection of composite beams. According to the elastic analytical model of composite beams, stress and deflection analytical solutions for the cases of simply supported composite beams and cantilever composite beam under uniform distribution load and concentrated load are derived by ignoring slip effect in the interface. By introducing effective flange width and effective sectional rigidity, practical design methods for considering shear lag effect of composite beam are presented, and the results calculated by these methods have good agreement with those obtained from analytical solutions. By comparing different design methods for composite beam considering shear lag effect from different countries, the simple practical design method presented in this research is found to have high accuracy despite of its simplicity.

**Key words:** steel-concrete composite beam; shear effect; effective flange width; sectional effective rigidity; design method

由于混凝土翼板在组合梁受力过程中产生剪切变形, 导致组合梁截面应力增加, 主梁变形进一步增大。国内外众多试验研究表明<sup>[1-3]</sup>: 翼板剪力滞效应引起翼板最大正应力较按初等梁理论计算得到的应力值增大 10%~30%, 但对主梁变形的影响并不大。试验研究和理论分析均表明: 翼板宽度

和主梁跨度之比是影响组合梁剪力滞效应最为重要的因素。

目前, 与组合梁相关的各国主要规范基本上采用翼板有效宽度的方法考虑剪力滞效应对组合梁受力行为的影响, 但各国规范的对翼板有效宽度规定的计算方法却有很大的不同。美国 AASHTO<sup>[4]</sup>、

收稿日期: 2010-01-07; 修改日期: 2010-06-17

基金项目: 国家自然科学基金海外基金项目(20081335222); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT00736)

作者简介: 聂建国(1958—), 男, 湖南衡阳人, 教授, 博士, 博导, 长江学者, 从事钢-混凝土组合结构体系研究(E-mail: niejg@tsinghua.edu.cn);

\*李法雄(1984—), 男, 浙江温州人, 博士生, 从事大跨钢-混凝土组合结构桥梁研究(E-mail: lifaxiong@gmail.com);

樊健生(1975—), 男, 山东济南人, 副教授, 博士, 从事钢-混凝土组合结构体系研究(E-mail: fanjsh@tsinghua.edu.cn);

蔡奇(1980—), 男, 安徽人, 高工, 硕士, 从事结构改造加固研究(E-mail: caiqi@mails.tsinghua.edu.cn).

中国 GB50017-2003<sup>[5]</sup>和 JTJ 025-86<sup>[6]</sup>等规范仍然规定组合梁翼板有效宽度与混凝土板的厚度相关, 导致在组合梁宽跨比较小的某些情况下, 严重低估了组合梁翼板有效宽度。英国 BS5400<sup>[7]</sup>采用查表的方式计算组合梁翼板有效宽度, 源于 BS5400 规定的设计方法主要吸收了 Moffatt 和 Dowling 等人<sup>[8]</sup>采用有限元方法得到的研究成果。欧洲规范 4(EC4)<sup>[9]</sup>则规定组合梁翼板有效宽度仅与主梁跨度相关, EC4 的计算方法相对简单但忽略了组合梁剪力滞效应最为重要的影响因素。日本道桥示方书<sup>[10]</sup>和加拿大<sup>[11]</sup>等国规范规定的翼板有效宽度计算方法则主要考虑宽跨比的影响, 其计算精度相对较高。

需要说明的是, 组合梁的翼板有效宽度是根据主梁某个关键截面的翼板正应力分布形态得到, 根据文献[3, 12-13]的研究成果, 组合梁的翼板有效宽度沿梁轴方向的分布并不是统一的, 边界条件和荷载类型对组合梁翼板有效宽度分布产生显著影响。因此, 根据某个截面应力分布形态定义得到的翼板有效宽度用于计算组合梁的变形显然存在不合理之处。

针对上述问题, 本文在文献[12]组合梁剪力滞效应理论分析模型基础上, 引入翼板有效宽度和截面有效刚度两种简化设计方法分别考虑组合梁剪力滞效应对组合梁截面应力和变形的影响。

## 1 组合梁剪力滞效应

虽然组合梁的界面滑移效应和翼板剪力滞效应存在耦合关系, 但界面滑移效应主要影响组合梁的变形<sup>[14]</sup>, 对组合梁的剪力滞效应影响较小, 这一点在文献[12, 15]中得到充分的验证。因此, 本文在考察剪力滞效应对组合梁受力行为的影响时忽略界面滑移效应的影响, 由此得到的简化设计方法偏于安全。

根据文献[12]的推导结果, 当不考虑组合梁界面滑移效应时, 组合梁弹性行为控制微分方程如下所示:

$$\begin{cases} (B_1 + B_2)w'' - \frac{B_4}{2}f' + M(x) = 0 \\ B_3f'' - \frac{B_4}{2}w''' - B_5f = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $w$  为组合梁竖向变形函数;  $f$  为组合梁翼板剪滞强度函数;  $M(x)$  为组合梁弯矩分布函数;

$$B_1 = (E_c I_{cu} + E_s I_{sL}) \quad ; \quad B_2 = (E_c I_c + E_s I_s) \quad ;$$

$$B_3 = E_c A_c \left( D^2 - \frac{4}{3}D + \frac{8}{15} \right) + E_s A_s D^2; \quad B_4 = \frac{4}{3} E_c S_{cu};$$

$$B_5 = G_c A_c \frac{4}{3b^2}; \quad \text{其中, } A_c \text{ 为混凝土翼板的面积;}$$

$I_c = 2b \cdot h_c^3 / 12$  为混凝土翼板对自身中和轴的惯性矩;  $I_{cu} = A_c \cdot h_u^2$  为混凝土翼板对换算截面中和轴的惯性矩;  $S_{cu} = A_c \cdot h_u$  为混凝土翼板对换算截面中和轴的面积矩。  $A_s$  为钢梁截面的面积;  $I_s$  为钢梁对自身中和轴的惯性矩;  $I_{sL} = A_s \cdot h_L^2$  为钢梁截面对换算截面中和轴的惯性矩;  $D$  为考虑截面轴力自平衡引入的附加轴向位移;  $h_u$ 、 $h_L$  表示组合梁换算截面中和轴分别到混凝土翼板中和轴和钢梁截面中和轴的距离。

限于文章篇幅, 本文仅给出简支组合梁承受跨中集中荷载时跨中挠度和应力解析解推导过程。

如图 1 所示, 组合梁在跨中作用一竖向集中荷载  $P$ , 简支梁的弯矩和剪力为:

$$\begin{cases} M(x) = \frac{P}{2}x \\ Q(x) = \frac{P}{2} \end{cases} \quad (2)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w''(0) = 0 \\ w''(L) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

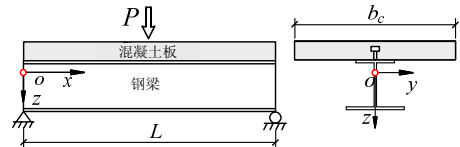


图 1 简支组合梁承受跨中集中荷载示意图

Fig.1 Simply supported composite beam under center point load

引入算子算法, 联立方程组(1)可以得到剪滞强度函数的 2 阶常微分方程如下:

$$f'' + A_1 f = A_2 Q(x) \quad (4)$$

式中:

$$A_1 = \frac{-4(B_2 + B_1)B_5}{4(B_2 + B_1)B_3 - B_4^2}; \quad A_2 = \frac{-2B_4}{4(B_1 + B_2)B_3 - B_4^2}.$$

解得:

$$f(x) = C_1 \sinh(rx) + C_2 \cosh(rx) + \frac{A_2 P}{2A_1} \quad (5)$$

式中:  $r = \sqrt{A_1}$ 。

将式(5)代入方程组(1), 可以得到:

$$w(x) = \frac{-P \left( \frac{1}{3} A_1 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) x^3 + \frac{B_4 A_2 \sinh(rx)}{r} \right)}{4 A_1 (B_1 + B_2) \cosh\left(\frac{rL}{2}\right)} + C_3 x + C_4 \quad (6)$$

利用边界条件式(3), 可以求得各个积分常数  $C_1 \sim C_4$  如下所示:

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{-A_2 P}{2 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) A_1}, C_3 = \frac{P (A_1 L^2 + 4 A_2 B_4)}{16 (B_1 + B_2) A_1}, C_4 = 0 \quad (7)$$

将积分常数式(7)代入式(6)便得到简支组合梁在跨中集中荷载作用下跨中挠度的解析解:

$$w_{L/2} = \frac{3 P L^3 B_4^2 \left( L r \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{rL}{2}\right) \right)}{48 (B_1 + B_2)^2 B_5 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) r L^3} + \frac{P L^3}{48 (B_1 + B_2)} \quad (8)$$

翼板应力解析解为:

$$\sigma_c(y, z) = E_c \left[ z_c w'' + f' \left( -\frac{2y}{b} + \frac{y^2}{b^2} + D \right) \right] \quad (9)$$

式中:  $z_c$  为翼板截面上任一点距组合梁截面中和轴的竖向坐标;  $y$  为翼板任一点距腹板中心的横向坐标。

同理, 可求得简支和悬臂组合梁在其他类型荷载作用下的变形解析解。

简支组合梁承受均布荷载时的跨中挠度:

$$w_{L/2} = \frac{B_4^2 \left[ 8 + \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) L^2 r^2 - 8 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) \right]}{32 (B_1 + B_2)^2 B_5 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) r^2 L^4} + \frac{5 q L^4}{384 (B_1 + B_2)} \quad (10)$$

悬臂组合梁承受均布荷载时的梁端挠度:

$$w_L = \frac{q L^4 B_4^2 [\cosh(rL)(L^2 r^2 + 2) - 2 - 2 L r \sinh(rL)]}{8 (B_1 + B_2)^2 B_5 \cosh\left(\frac{rL}{2}\right) r^2 L^4} + \frac{q L^4}{8 (B_1 + B_2)} \quad (11)$$

悬臂组合梁承受梁端集中荷载时梁端挠度:

$$w_L = \frac{P L^3 B_4^2 (-\sinh(rL) + L r \cosh(rL))}{4 (B_1 + B_2)^2 B_5 \cosh(rL) r L^3} + \frac{P L^3}{3 (B_1 + B_2)} \quad (12)$$

应力解析解同样可通过式(9)求得, 在此不一一列出。

## 2 组合梁翼板有效宽度

组合梁翼板有效宽度及有效宽度系数定义方法如下所示:

$$b_{\text{eff}} = \frac{\iint \sigma_c(y, z) dy dz}{\sigma_{\text{max}}}, \lambda = \frac{b_{\text{eff}}}{b_c} \quad (13)$$

式中:  $b_{\text{eff}}$  为组合梁翼板有效宽度;  $b_c$  为翼板实际宽度;  $\lambda$  为有效宽度系数。

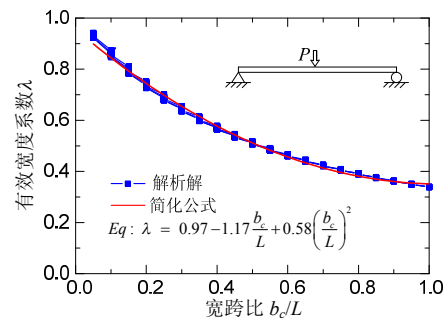
将式(9)代入式(13)可以求得, 翼板有效宽度系数的表达式为:

$$\lambda = 1 - \frac{2 f'(x)}{3 [h_u w''(x) + f'(x) D]} \quad (14)$$

选择一组工程中常见的组合梁尺寸取值范围。组合梁跨度  $L$  取 10m~50m, 混凝土翼板厚度  $h_c$  取 0.1m~0.5m, 钢梁高度  $h_s$  取 0.5m~2.5m, 宽跨比范围取 0.1~1.0。对上述取值范围内的组合梁尺寸进行随机组合, 分别建立 2400 根不同尺寸的简支或悬臂组合梁。

利用式(14)分别计算简支组合梁跨中截面和悬臂组合梁根部截面翼板有效宽度随宽跨比变化关系如图 2 所示, 并采用二次抛物线函数拟合出翼板有效宽度简化计算公式, 如图 2 所示。

根据图 2 中给出的翼板有效宽度简化计算公式计算得到 2400 根算例组合梁的翼板有效宽度, 并采用初等梁理论计算出组合梁的翼板最大正应力和应力解析解得到的翼板最大正应力比较情况如图 3 所示。从图 3 中可以看出, 图 2 中给出的翼板有效宽度简化计算公式具有很高的精度。



(a) 简支组合梁承受跨中集中荷载

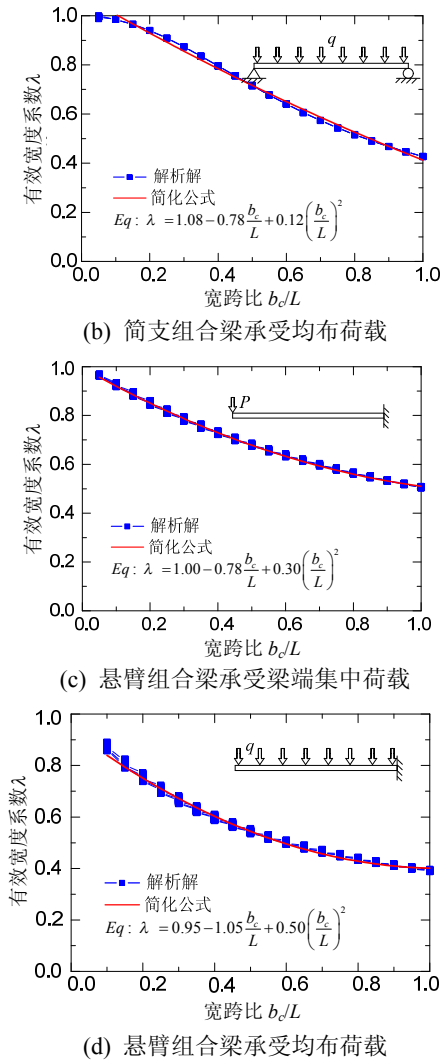


图2 组合梁翼板有效宽度与宽跨比关系

Fig.2 Relations of effective flange width and wide-span ratio

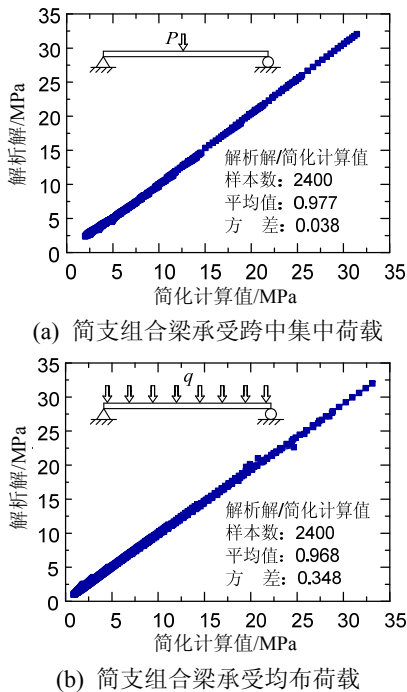


图3 组合梁应力解析解与简化计算结果比较

Fig.3 Comparison of the stress results from simplified method and analytical solutions of composite beams

### 3 组合梁截面有效刚度

观察考虑剪力滞效应时组合梁挠度计算公式(8)、式(10)~式(12), 容易看出变形计算公式中的第2项均为不考虑剪力滞效应时弹性梁变形计算的经典结构力学解答, 公式第1项实际上为考虑翼板剪力滞效应时的挠度附加项。因此, 可以将不考虑剪力滞效应时的组合梁截面刚度进行折减, 采用折减后的截面有效刚度, 利用结构力学方法即可方便得到组合梁考虑剪力滞效应时的挠度。

$$B_{\text{eff}} = \frac{B}{1 + \zeta} \quad (15)$$

式中:  $B$  为换算截面法计算得到组合梁截面刚度,  $B = B_1 + B_2$ ;  $\zeta$  为刚度折减系数。

引入影响参数  $\chi$ , 可以得到折减系数  $\zeta$  表达式如下所示:

简支组合梁承受集中荷载  $\zeta = \left(0.34 - 0.14 \frac{b_c}{L}\right) \chi \quad (16)$

简支组合梁承受均布荷载  $\zeta = \left(0.30 - 0.10 \frac{b_c}{L}\right) \chi \quad (17)$

悬臂组合梁承受集中荷载  $\zeta = \left(0.08 - 0.017 \frac{b_c}{L}\right) \chi \quad (18)$

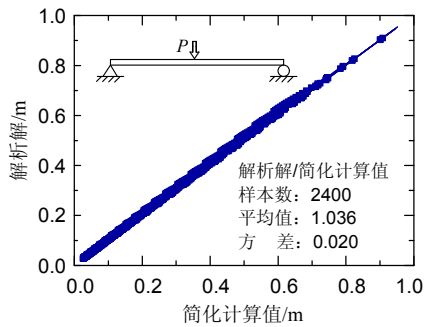
悬臂组合梁承受均布荷载  $\zeta = \left(0.11 - 0.036 \frac{b_c}{L}\right) \chi \quad (19)$

式中： $\chi$ 为考虑组合梁剪力滞效应的影响参数，

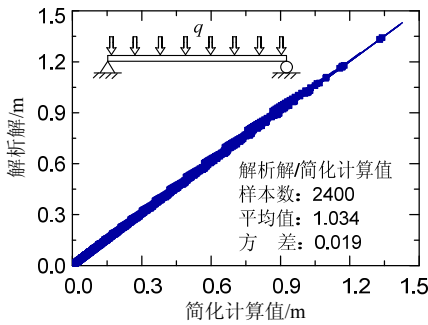
$$\chi = \frac{I_{cu} b_c^2}{I_0 L^2};$$

$b_c$ 为组合梁翼板实际宽度； $L$ 为组合梁跨度； $I_{cu} = A_c \cdot h_u^2$ 为混凝土翼板对换算截面中和轴的惯性矩； $I_0$ 为采用换算截面计算得到的截面惯性矩。

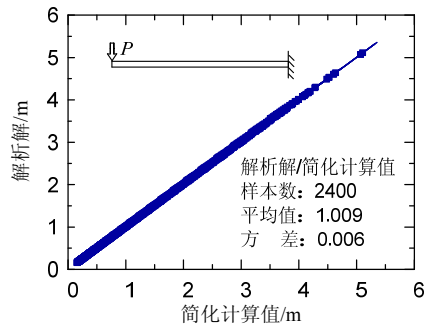
为验证组合梁截面有效刚度的正确性和适用性，仍以前述的 2400 根算例组合梁为例。分别采用理论解析解和有效刚度法计算得到组合梁挠度比较情况如图 4 所示。从图 4 中可以看出，采用有效刚度法计算考虑剪力滞效应时的组合梁挠度具有足够高的精度。折减系数  $\zeta$  随宽跨比  $b_c/L$  变化曲线如图 5 所示，从图 5 中可以看出，荷载类型对组合梁刚度折减系数影响较小，因此，为统一简化设计方法且偏于安全考虑，建议采用式(16)用于计算简支组合梁挠度，采用式(19)用于计算悬臂组合梁挠度。



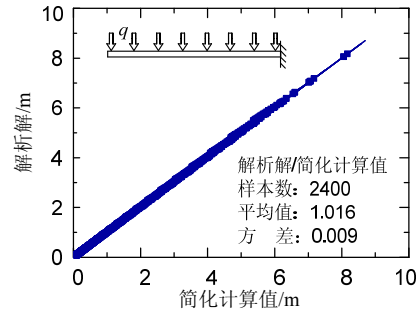
(a) 简支组合梁承受跨中集中荷载



(b) 简支组合梁承受跨中集中荷载



(c) 悬臂组合梁承受梁端集中荷载



(d) 悬臂组合梁承受均布荷载

图 4 组合梁挠度解析解与简化计算结果比较

Fig.4 Comparison of the deflection results from the simplified method and analytical solution of composite beam

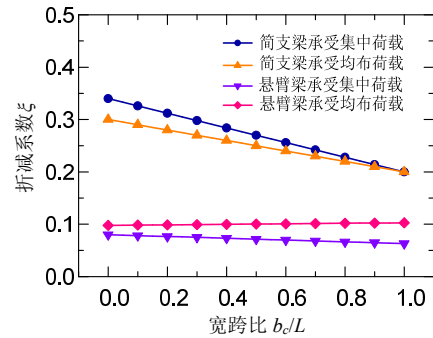


图 5 折减系数  $\zeta$  随宽跨比  $b_c/L$  变化关系

Fig.5 Variation of reduce coefficient  $\zeta$  upon wide-span ratio  $b_c/L$

## 4 各国设计方法比较

AASHTO 规范对组合梁翼板有效宽度的规定取 1/4 有效跨径、12 倍混凝土翼板平均厚度和相邻主梁间距三者中的最小值。

英国 BS5400 规范规定组合梁弹性阶段翼板有效宽度取值全部采用表格形式确定。区别均布荷载和集中荷载两种类型荷载，根据不同的  $b_c/L$  值，给出跨中、1/4 跨和支座处截面的翼板有效宽度。

欧洲规范 4(EC4)规定组合梁翼板有效宽度取 1/4 有效跨径和相邻主梁间距的较小值，并对连续组合梁支座处翼板有效宽度进行折减。

加拿大规范规定组合梁翼板有效宽度计算如下：

$$\begin{cases} b_e = b_0 + b_{e1} + b_{e2} \\ \frac{b_{ei}}{b_i} = 1 - \left(1 - \frac{L}{15b_i}\right)^3, & \frac{L}{b_i} \leq 15 \\ \frac{b_{ei}}{b_i} = 1, & \frac{L}{b_i} > 15 \end{cases} \quad (20)$$

日本规范对组合梁翼板有效宽度的计算方法分为均布荷载和集中荷载两种情况。



均布荷载下:

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \frac{b_i}{L} \leq 0.05 \\ \lambda = 1.1 - 2\frac{b_i}{L}, & 0.05 < \frac{b_i}{L} \leq 0.3 \\ \lambda = \frac{0.15L}{b_i}, & \frac{b_i}{L} \geq 0.3 \end{cases} \quad (21)$$

集中荷载下:

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \frac{b_i}{L} \leq 0.02 \\ \lambda = 1.06 - 3.2\frac{b_i}{L} + 4.5\left(\frac{b_i}{L}\right)^2, & 0.02 < \frac{b_i}{L} \leq 0.3 \\ \lambda = \frac{0.15L}{b_i}, & \frac{b_i}{L} > 0.3 \end{cases} \quad (22)$$

GB50017-2003《钢结构设计规范》和 JTJ025-86 对组合梁翼板有效宽度的规定取 1/3 有效跨径、12 倍混凝土翼板平均厚度和相邻主梁间距三者中的最小值。

各国规范对组合梁翼板有效宽度的取值随宽跨比变化规律如图 6 所示,从图 6 中可以看出,GB50017-2003 和 AASHTO 因考虑混凝土板厚度的影响,在宽跨比较小的情况下严重低估了翼板有效宽度;加拿大和日本规范对翼板有效宽度的取值较为接近,但明显低于理论解析解;欧洲规范 4(EC4) 在宽跨比较小的情况下高估了组合梁翼板有效宽度,在宽跨比较大的情况下反而低估了组合梁翼板有效宽度;相比较而言,本文提出的翼板有效宽度简化计算公式与理论解析解最为接近,且计算方法简单。

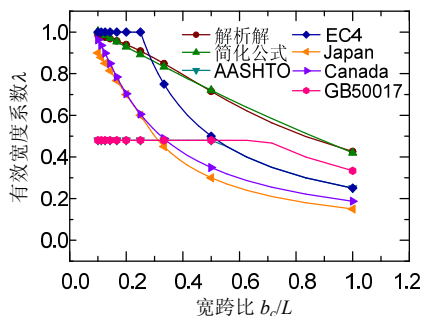


图 6 各国规范规定的翼板有效宽度比较

Fig.6 Comparison of effective flange width by using different design methods of different countries

根据各国规范规定的组合梁翼板有效宽度,采用换算截面法计算组合梁的截面刚度与理论解析

解比较情况如图 7 所示,从图 7 中可以看出,组合梁剪力滞效应对组合梁的变形影响较小,即使在宽跨比接近于 1 的极端情况下,组合梁的有效刚度亦接近于不考虑剪力滞效应时组合梁的截面刚度。如果仍然采用翼板有效宽度的方法用于考虑翼板剪力滞效应对组合梁变形的影响,实际上已严重高估了剪力滞效应对组合梁变形的影响。本文提出的有效刚度简化设计方法与理论解析解十分接近。

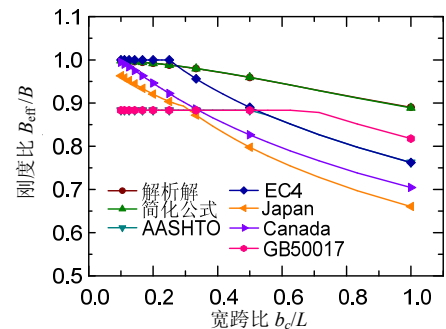


图 7 各国规范规定的组合梁截面刚度比较

Fig.7 Comparison of sectional rigidity of composite beam by using different design methods of different countries

## 5 结论

本文在文献[12]组合梁弹性理论分析模型基础上,推导了简支组合梁和悬臂组合梁在均布荷载和集中荷载作用下的应力和变形解析解。分别引入翼板有效宽度和截面有效刚度两种简化设计方法分别考虑组合梁剪力滞效应对组合梁截面应力和变形的影响。

通过算例分析表明:本文提出的翼板有效宽度和组合梁截面有效刚度用于计算考虑组合梁剪力滞效应时的应力和变形结果精度很高。通过分析比较各国规范对翼板有效宽度和截面刚度的规定,中国 GB50017-2003 和 AASHTO 因考虑板厚的影响,在宽跨比较小的情况下严重低估了翼板有效宽度;在宽跨比较大的情况下,各国规范均低估了组合梁翼板有效宽度;如果采用翼板有效宽度考虑剪力滞效应对组合梁变形的影响,则严重低估了组合梁截面刚度,导致变形计算值偏大;由本文提出的翼板有效宽度和截面有效刚度简化计算公式与解析解吻合良好,且计算方法简单。

## 参考文献:

- [1] Botzler P W, Colville J. Continuous composite-bridge model tests [J]. Journal of Structural Division, 1979, 105(9): 1741-1755.

- [2] Evans H R, Ahmad M K H, Kristek V. Shear lag in composite box girders of complex cross-sections [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 1993, 24: 183–204.
- [3] 田春雨. 钢-混凝土组合梁板体系的试验研究和理论分析[D]. 北京: 清华大学, 2005.  
Tian Chunyu. Experiment and research on steel-concrete composite slab-on-girder structure [D]. Beijing: Tsinghua University, 2005. (in Chinese)
- [4] American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). LRFD Bridge design specifications [S]. Washington, D.C: 2004.
- [5] GB50017-2003, 钢结构设计规范[M]. 北京: 中国计划出版社, 2003.  
GB50017-2003, Code for design of steel structures [S]. Beijing: China Planning Press. (in Chinese)
- [6] 交通部公路规划设计院. JTJ 025-86公路桥涵钢结构及木结构设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 1986.  
Ministry of Transportation Highway Planning and Design Institute. JTJ 025-86 Code for design of highway steel and wood bridges and culverts [S]. Beijing: China Communications Press, 1986. (in Chinese)
- [7] BS 5400-5: Steel, Concrete and composite bridges [S]. Part5. Code of practice for Design of Composite bridges. London: British Standard Institution, 1979.
- [8] Moffatt K R, Dowling P J. British shear lag rules for composite girders [J]. *Journal of the Structural Division—ASCE*, 1978, 104(ST7): 1123–30.
- [9] EN 1994-1, Design of composite steel and concrete structures [S]. Part1. General rules and rules for buildings. Brussels: European Committee for Standardization, 2005.
- [10] 日本道路协会. 道路桥示方书. 同解说(钢桥篇)[S]. 东京: 丸善株式会社, 2001.  
Japan Road Association. Design specification of Japan highway bridge. Explanation (steel bridge part) [S]. Tokyo: Mzruzen Ltd., 2001. (in Chinese)
- [11] CSA. Canadian highway bridge design code (CAN/CSA-S6-00) [S]. Canada: CSA International, 2001.
- [12] 聂建国, 李法雄. 钢-混凝土组合梁剪力滞效应弹性解析解[J]. *工程力学*, 2011, 28(9): 1–8.  
Nie Jianguo, Li Faxiong. Elastic analytical solution of the shear lag effect of steel-concrete composite beam [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(9): 1–8. (in Chinese)
- [13] 张彦玲, 李运生, 季文玉. 简支组合箱梁在横向对称荷载作用下的解析解及剪力滞研究[J]. *石家庄铁道学院学报(自然科学版)*, 2009, 22(1): 5–14.  
Zhang Yanling, Li Yunsheng, Ji Wenyu. A closed-form solution of load effect and study of shear lag effect for simple steel concrete composite box beam [J]. *Journal of Shijiazhuang Railway Institute (Natural Science)*, 2009, 22(1): 5–14. (in Chinese)
- [14] 聂建国, 沈聚敏, 余志武. 考虑滑移效应的钢-混凝土组合梁变形计算的折减刚度法[J]. *土木工程学报*, 1995, 28(6): 11–17.  
Nie Jianguo, Shen Jumin, Yu Zhiwu. A reduced rigidity method for calculating deformation of composite steel-concrete beams [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1995, 28(6): 11–17. (in Chinese)
- [15] 刘寒冰, 刘殿忠, 赵庆明. 钢-轻骨料混凝土组合梁考虑滑移的有效宽度分析[J]. *建筑结构学报*, 2007, 28(6): 185–190.  
Liu Hanbing, Liu Dianzhong, Zhao Qingming. Analysis for effective width considered slippage of composite steel-concrete beam with lightweight aggregate [J]. *Journal of Building Structures*, 2007, 28(6): 185–190. (in Chinese)