

文章编号: 1000-4750(2011)12-0160-06

基于能量法的高温(火灾)环境下轴心受压格构柱动力稳定性分析

*赵洪金¹, 董宁娟², 刘超^{1,3}, 吴敏哲¹

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院, 西安 710055; 2. 中国飞机强度研究所, 西安 710065; 3. 西安建筑科技大学理学院, 西安 710055)

摘 要: 根据弹性体系动力稳定理论, 采用能量法和 Hamilton 原理, 分别建立了高温(火灾)环境中缀条式和缀板式格构柱在轴向周期荷载作用下的动力偏微分方程。利用 Galerkin 方法将其转化为二阶常微分 Mathieu 型参数振动方程, 求得周期解所包围的动力不稳定区域。通过分析长细比、恒载、温度等参数对轴心受压格构柱动力不稳定区域的影响, 探讨了两种格构柱发生参数振动的动力稳定性问题, 为高温环境下结构工程动力分析与设计提供参考依据。

关键词: 参数振动; 动力稳定性; 格构柱; 周期荷载; 高温环境

中图分类号: TU391; TU392.5 **文献标志码:** A

DYNAMIC STABILITY ANALYSIS ON AXIAL COMPRESSION LATTICE COLUMN UNDER HIGH TEMPERATURE CONDITION USING ENERGY METHOD

*ZHAO Hong-jin¹, DONG Ning-juan², LIU Chao^{1,3}, WU Min-zhe¹

(1. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China;

2. Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an 710065, China;

3. School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Based on the dynamic stability theory of an elastic system, parametric vibration equations of laced and battened lattice columns subject to a periodic load under high temperature (fire) condition were established respectively by adopting the energy method and Hamilton principle. Galerkin's method was used to convert the partial differential equations into second order ordinary differential Mathieu equations, and then the dynamic instability regions surrounded by periodic solutions were obtained. The dynamic stability problems of parametric vibration were discussed about two kinds of axial compression lattice columns. Through analyzing the influences of slenderness ratio, constant load and temperature etc. on the dynamic instability regions of axial compression lattice column, reference basis for the dynamic analysis and design on high temperature (fire) condition in structure engineering is provided.

Key words: parametric vibration; dynamic stability; lattice column; periodic load; high temperature condition

在工程实际中, 大型结构中的压杆, 如桥梁的上弦杆、厂房的双肢柱、起重机和无线电桅杆的塔身等, 由于承重的需要或构造等的原因, 常由几个

柱肢(工字钢、槽钢、角钢等)通过横向连接缀件(钢板、角钢、槽钢等)组成格构柱。其中轴向柱肢是承受轴向荷载的主要构件, 横向缀件则作为将各分肢

收稿日期: 2010-04-12; 修改日期: 2010-11-08

作者简介: *赵洪金(1982—), 男, 山东临沂人, 博士生, 从事结构动力稳定性研究(E-mail: zhq-2005@163.com);

董宁娟(1982—), 女, 陕西宝鸡人, 博士生, 从事结构振动控制研究(E-mail: dnj0306@163.com);

刘超(1982—), 男, 河北张家口人, 讲师, 博士生, 从事钢筋混凝土结构抗震研究(E-mail: chaoliu@xauat.edu.cn);

吴敏哲(1943—), 男, 河北蠡县人, 教授, 博导, 从事结构工程抗震及动力分析(E-mail: minzhewu@163.com).

连接成整体、抵抗侧力的辅助构件。根据构造形式可分成缀条式和缀板式两种，缀条式格构柱中缀条和柱肢组成多层平面刚架体系。

钢构件虽不可燃，但由于钢材导热快且是由薄壁型钢和钢板组成，遭受火灾后很快升温，会发生局部失稳，丧失承载力甚至整体倒塌^[1]。已有研究大多是在静荷载作用下考虑钢结构的抗火问题^[2-5]，而对于谐振荷载和热作用下结构的动力特性问题研究较少^[6-8]，对格构柱(组合压杆)的稳定性研究多集中在静力方面^[9-10]，动力稳定性方面比较少见。特别是对高温(火灾)环境下格构柱的动力稳定问题，还未见报道。众所周知，实际工程中理想的轴心受压格构柱是不存在的，但轴心受压构件的稳定性分析是其他偏压构件稳定性分析的基础。因此对格构式构件在热状态下的力学形态如何表述，高温火灾环境下轴心受压格构柱的动力稳定性尚需进行探讨，揭示高温环境中格构柱动力失稳的本质和规律仍具有一定的理论价值。

格构柱由于其构成包括承受轴向荷载的分肢和连接分肢的缀件，其剪切变形要比实腹柱大得多，剪力造成的附加挠曲影响就不能忽略，因此在格构柱的稳定研究中必须考虑剪切变形的影响。本文采用能量法和 Hamilton 原理，分别建立了高温(火灾)环境中缀条式和缀板式格构柱在轴向周期荷载作用下的动力偏微分方程。求得周期解所包围的动力不稳定区域，探讨了两种格构柱发生参数振动的动力稳定性问题；分析了杆件长细比、不变荷载、温度等参数对轴心受压格构柱动力稳定性的影响，为高温环境下结构工程动力分析与设计提供参考依据。

1 分析模型及公式推导

在高温(火灾)环境下柱体在轴向荷载 P 作用时的分析模型如图 1 所示。实验表明^[1]：在火灾或高温情况下，由于温度变化构件将产生轴向热应变 ε_{th} 。

此时柱体的总应变可由下式求得：

$$\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_e \tag{1}$$

式中： $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$ 为在温度 T 下的热应变； ε_e 为弹性应变； E_T 为高温 T 下结构的弹性模量； $\alpha = 1.4 \times 10^{-5} \text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ 为杆件的热膨胀系数； $\Delta T = T - T_0$ 为构件温差。

因此，柱子的内力可由以下公式求出：

$$N = E_T \varepsilon = P + \alpha \Delta T E_T A \tag{2}$$

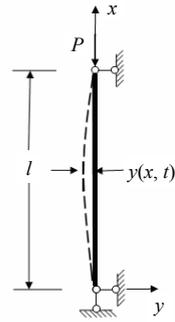


图 1 轴心受压柱分析模型

Fig.1 Analysis model of the axial compression column

2 缀条式轴心受压格构柱动力稳定

如图 2 所示，缀条式轴心受压格构柱可按桁架进行计算，柱肢和缀条间的连结结点均视为铰接点，弯曲后的组合杆截面并不垂直于挠度曲线 v ，用 φ 来表征截面的转角，则：

格构柱轴线上任意点的弯矩为：

$$M = -E_T I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{3}$$

剪力为：

$$F_Q = K_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) \tag{4}$$

式中： $E_T I$ 为组合压杆的抗弯刚度； I 为组合截面对形心轴的惯性矩； K_v 为截面的剪切刚度。

格构柱的应变能为：

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[E_T I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)^2 \right] dx \tag{5}$$

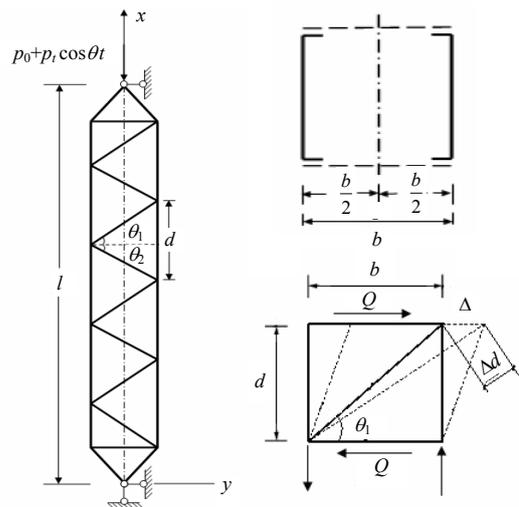


图 2 缀条式轴心受压格构柱

Fig.2 Laced axial compression lattice column

在单位剪力作用下，K 形布置的斜缀条的轴向变形为：

$$\Delta = \frac{1}{E_T A_1 \cos^2 \theta_1} \frac{b}{\cos \theta_1} + \frac{1}{E_T A_2 \cos^2 \theta_2} \frac{b}{\cos \theta_2} \quad (6)$$

式中: A_1 、 A_2 分别为上斜缀条和下斜缀条的面积;
 b 为压杆肢宽; d 为同一柱肢上两节点间距离; θ_1 、
 θ_2 分别为上斜缀条和下斜缀条与水平轴的夹角。

$$d = b \tan \theta_1 + b \tan \theta_2$$

因此缀条式格构柱剪切刚度可表示成:

$$\frac{1}{K_v} = \frac{\Delta}{d} = \frac{1}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} \times \left(\frac{1}{E_T A_1 \cos^3 \theta_1} + \frac{1}{E_T A_2 \cos^3 \theta_2} \right) \quad (7)$$

轴向周期动荷载 $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$ 作用下高温(火灾)环境中格构柱的荷载势能可以写成:

$$V = -[P(t) + n\alpha\Delta TE_T A'] \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8)$$

n 为格构柱的柱肢数。

动能:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (9)$$

总势能 Π 为荷载势能 V 和应变能 U 之和, 即:

$$\Pi = V + U \quad (10)$$

在 t_0 、 t_1 时刻, 由 Hamilton 原理, 变分方程:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt = 0 \quad (11)$$

分别对 v 、 φ 进行变分, 得到组合压杆的动力微分方程为:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - K_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)' + [P(t) + n\alpha\Delta TE_T A'] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

$$E_T I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) = 0 \quad (13)$$

得到高温(火灾)环境中格构柱承受周期荷载 $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$ 作用下的动力稳定微分方程:

$$E_T I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{m E_T I}{K_v} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{E_T I}{K_v} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \times (P_0 + P_t \cos \theta t + n\alpha\Delta TE_T A') + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

利用 Galerkin 方法进行离散, 设柱的横向位移

$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$, 满足杆的边界条件, 代入式(14), 整理得:

$$\left[1 + \frac{E_T I \pi^2}{l^2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \left(\frac{1}{A_1 \cos^3 \theta_1} + \frac{1}{A_2 \cos^3 \theta_2} \right) \right] \times m f''(t) + \frac{E_T I \pi^4}{l^4} f(t) - \left[1 + \frac{E_T I \pi^2}{l^2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \times \left(\frac{1}{A_1 \cos^3 \theta_1} + \frac{1}{A_2 \cos^3 \theta_2} \right) \right] \times (P_0 + P_t \cos \theta t + n\alpha\Delta TE_T A') \frac{\pi^2}{l^2} f(t) = 0 \quad (15)$$

式(15)可进一步简化为:

$$f''(t) + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f(t) = 0 \quad (16)$$

这就是高温(火灾)环境中缀条式格构柱在轴向周期荷载作用下的 Mathieu 型参数振动方程。

式中:

$$\omega = \left\{ \frac{\pi^4 EI}{ml^4} \left[1 + \frac{\pi^2 I}{l^2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \times \left(\frac{1}{A_1 \cos^3 \theta_1} + \frac{1}{A_2 \cos^3 \theta_2} \right) \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[1 + \frac{\pi^2 I}{l^2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \times \left(\frac{1}{A_1 \cos^3 \theta_1} + \frac{1}{A_2 \cos^3 \theta_2} \right) \right]^{-1} - n\alpha\Delta TE_T A';$$

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - P_0 / P}; \quad \mu = \frac{P_t}{2(P - P_0)}.$$

设式(16)有周期 $4\pi / \theta$ 的周期解为:

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right)$$

代入式(16)整理合并同类项, 根据周期解存在的条件得到临界频率方程, 令一阶行列式 $1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 0$, 求解可得临界频率近似公式 $\theta = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu}$ 。由此可确定周期解所包围的不稳定区域。

同理取式(16)有周期 $2\pi / \theta$ 的周期解为:

$$f(t) = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(a_0 + a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right)$$

代入式(16)整理, 取临界频率方程的二阶行列式, 求解可得临界频率近似公式 $\theta_1 = \Omega \sqrt{1 + \mu^2 / 3}$, $\theta_2 = \Omega \sqrt{1 - 2\mu^2}$ 。

3 缀板式轴心受压格构柱动力稳定

如图 3 所示, 缀板式轴心受压格构柱可取刚架作为计算简图。缀板式格构柱的变形状态可分解为两部分: 作为一个杆件产生整体变形, 和作为一个刚架在结间还产生局部弯曲变形, 这可看作是由结间剪力所产生的附加弯矩造成的^[11]。

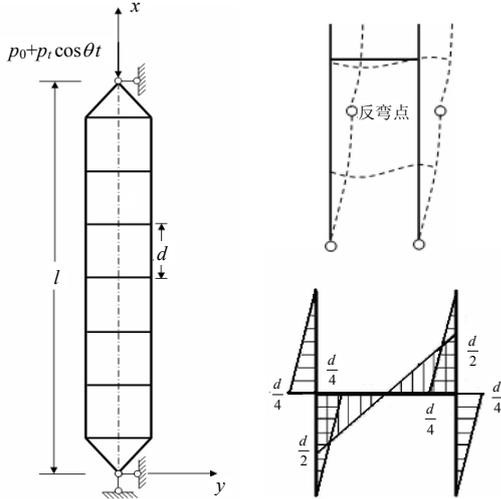


图 3 缀板式轴心受压格构柱

Fig.3 Battened axial compression lattice column

在单位剪力作用时, 一般情况下缀板的线刚度大于柱肢的线刚度, 采用柱肢和缀板反弯点都在杆件中点的假设, 利用图乘法可求得侧向剪切变形为:

$$\Delta = \frac{4}{E_T I'} \frac{d}{2} \times \frac{d}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{d}{4} + \frac{2}{E_T I''} \frac{d}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{d}{2} = \frac{d^3}{24E_I'} + \frac{bd^2}{12E_I''} \quad (17)$$

式中: b 为压杆肢宽; d 为同一柱肢上两节点间距离; I' 是柱肢的惯性矩; I'' 是缀板的惯性矩。

缀板式格构柱的剪切刚度可求得:

$$\frac{1}{K_v} = \frac{\Delta}{d} = \frac{d^2}{24E_I'} + \frac{bd}{12E_I''} \quad (18)$$

荷载势能:

$$V = -[P(t) + n\alpha\Delta TE_T A'] \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (19)$$

动能:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (20)$$

由 Hamilton 原理得到缀板式轴心受压格构柱的动力微分方程为:

$$E_T I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{m E_T I}{K_v} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{E_T I}{K_v} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \times$$

$$(P_0 + P_t \cos \theta t + n\alpha\Delta TE_T A') + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

利用 Galerkin 对方程进行离散, 设杆横向往移

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

代入上式(21), 整理得:

$$\left[1 + \frac{E_T I \pi^2}{l^2} \left(\frac{d^2}{24I'} + \frac{bd}{12I''} \right) \right] \times m f''(t) + \frac{E_T I \pi^4}{l^4} f(t) - \left[1 + \frac{E_T I \pi^2}{l^2} \times \left(\frac{d^2}{24I'} + \frac{bd}{12I''} \right) \right] \times (P_0 + P_t \cos \theta t + n\alpha\Delta TE_T A') \frac{\pi^2}{l^2} f(t) = 0 \quad (22)$$

式(22)可进一步简化为:

$$f''(t) + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f(t) = 0 \quad (23)$$

式中:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{ml^2} \left[1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{d^2}{24EI'} + \frac{bd}{12EI''} \right) \right]^{-1}};$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{d^2}{24EI'} + \frac{bd}{12EI''} \right)} - n\alpha\Delta TE_T A';$$

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - P_0 / P}; \quad \mu = \frac{P_t}{2(P - P_0)}.$$

确定动力不稳定区域的方法同缀条式轴心受压格构柱, 计算过程从略。

4 算例分析

计算参数: 柱表面温度 $T_0=20^\circ\text{C}$, $\lambda=0.1\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, 保护层厚度 $d'=0.02\text{m}$, 燃烧持续时间 $t=0\text{s}\sim 200\text{s}$ 。

双肢缀条式轴心受压格构柱, 两端铰支, 取 $A'=2\times 10^{-3}\text{m}^2$, $E=2\times 10^8\text{kN}/\text{m}^2$, $I=2.5\times 10^{-4}\text{m}^4$, $A_1=A_2=2\times 10^{-4}\text{m}^2$, $b=d=0.5\text{m}$ 。求得动力不稳定区域如图 4~图 6 所示。

双肢缀板式轴心受压格构柱, 两端铰支, 取 $A'=2\times 10^{-3}\text{m}^2$, $E=2\times 10^8\text{kN}/\text{m}^2$, $I=2.5\times 10^{-4}\text{m}^4$, $I'=2\times 10^{-6}\text{m}^4$, $I''=8\times 10^{-6}\text{m}^4$, $b=d=0.5\text{m}$ 。求得动力不稳定区域如图 7~图 9 所示。

由图 4 和图 5 可知, 对缀条式和缀板式格构柱随着柱子的长细比增加, 格构柱稳定临界承载力随之有较大幅度降低, 结构发生参数共振时的频率降低, 动力不稳定区域迅速扩大, 说明长细比越大,

发生参数共振的可能性也越大，因此长细比是决定两种格构柱动力不稳定区域的重要因素。

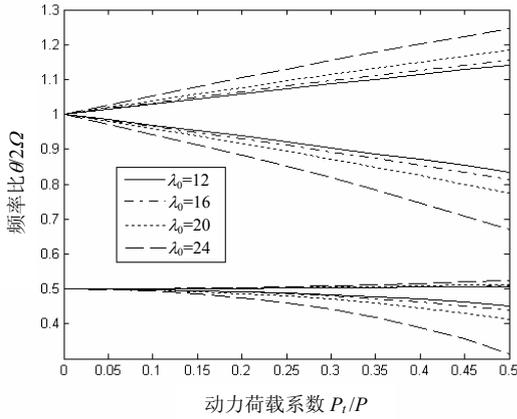


图 4 长细比对缀条式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.4 Effect of slenderness ratio on principal regions of dynamic instability for laced lattice column

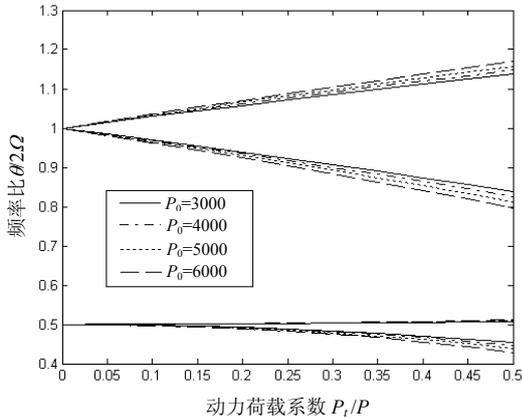


图 5 恒载对缀条式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.5 Effect of constant load on principal regions of dynamic instability for laced lattice column

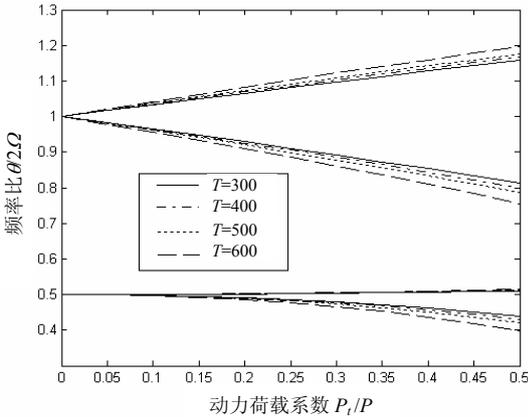


图 6 温度对缀条式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.6 Effect of temperature on principal regions of dynamic instability for laced lattice column

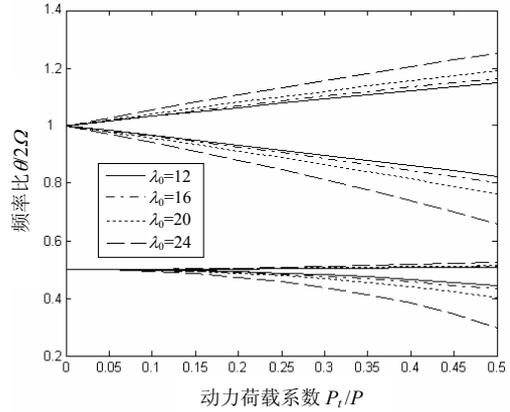


图 7 长细比对缀板式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.7 Effect of slenderness ratio on principal regions of dynamic instability for battened lattice column

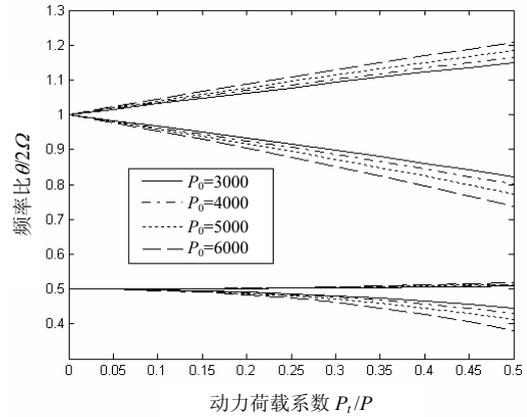


图 8 恒载对缀板式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.8 Effect of constant load on principal regions of dynamic instability for battened lattice column

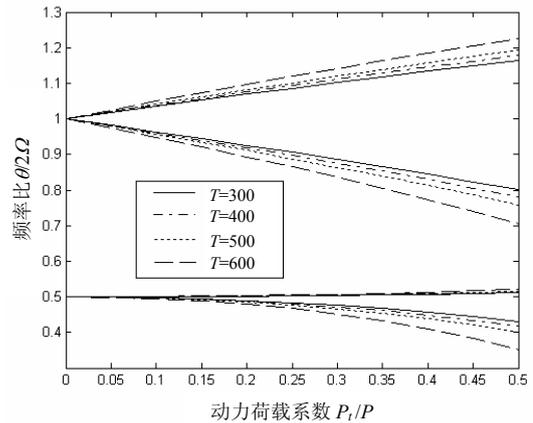


图 9 温度对缀板式格构柱动力不稳定区域的影响
Fig.9 Effect of temperature on principal regions of dynamic instability for battened lattice column

由图 6 和图 7 可知，对缀条式和缀板式格构柱随着动力荷载恒荷分量的增加，结构发生参数共振时的频率也降低，但对动力不稳定区域的影响很

小。同样由图 8 和图 9 可知,对缀条式和缀板式格构柱随着温度升高,格构柱稳定临界承载力随之降低,结构发生参数共振时的频率也降低,动力不稳定区域也随之变宽了,说明当温度比较高时,杆件更容易发生参数激发振动导致的失稳破坏,但对动力不稳定区域的影响不大。

图 4~图 9 所给轴心受压格构柱动力不稳定区域图表明:当外荷载的参数和格构柱的固有参数之间保持一定的关系时,结构是不稳定的^[12]。利用这个区域图,给定一个格构柱及外荷载的特性(包括扰动频率,静力分量,动力振幅分量),即可定性的判断该柱是否处于动力稳定状态。

5 结论

由以上计算分析结果可知,轴压格构柱的动力解为无穷多组。文中的临界频率 θ 是取 $n=1$ 时求解得到的,为主共振频率,在 $\theta = \Omega$ 或 $\theta = 2\Omega$, 压杆位移将产生无限增大趋势,称之为参数共振^[12]。

缀条式和缀板式格构柱参数共振的形式相同,不同的是剪切刚度的计算,缀条式格构柱可按桁架形式进行计算而缀板式格构柱按刚架形式计算。

随着长细比增加结构发生参数共振时的频率降低,动力不稳定区域迅速扩大,因此长细比是决定两种格构柱动力不稳定区域的重要因素。随着动力荷载恒荷分量的增加,结构发生参数共振时的频率也降低,但对动力不稳定区域的影响很小。同样随着温度升高,格构柱稳定临界承载力随之降低,结构发生参数共振时的频率也降低,但对动力不稳定区域的影响不大。

参考文献:

- [1] 李国强, 蒋首超, 林桂祥. 钢结构抗火计算与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.
Li Guoqiang, Jiang Shouchao, Lin Guixiang. Computation and design for fire resistance of steel structures [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1999. (in Chinese)
- [2] Wang Y C. Postbuckling behavior of axially restrained and axially loaded steel columns under fire conditions [J]. Journal of Structural Engineering, 2004, 130(3): 371—380.
- [3] Huang Z F, Tsn K H, Ting S K. Structural response of thermally restrained steel columns under axial loads [J].

- Journal of Structural Engineering ASCE, 2000, 90(4): 2336—255.
- [4] Tan K H, Toh W S, Phng G H E. Fire resistance of steel columns subjected to different restraint ratios [C]. The Second International Conference on Steel and Composite Structures (ICSCS'04), Seoul, 2004.
- [5] 计琳, Tan Kanghai, 赵均海. 薄壁槽钢柱的抗火计算方法及参数分析[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2006, 26(6): 55—60.
Ji Lin, Tan Kanghai, Zhao Junhai. Fire resistance of thin-walled steel channel column and parameter analysis [J]. Journal of Changpan University (Natural Science Edition), 2006, 26(6): 55—60. (in Chinese)
- [6] 孙强. 高温环境下钢压杆受轴向动载作用时的稳定性[J]. 武汉理工大学学报, 2006, 28(6): 62—65.
Sun Qiang. The stability of steel compressed members under axial dynamic loading at high temperature [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2006, 28(6): 62—65. (in Chinese)
- [7] Eissa M, Amer Y A. Vibration control of a cantilever beam subject to both external and parametric excitation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 152: 611—619.
- [8] 王春妮, 李世荣. 热载荷作用下梁的主参数共振及其控制[J]. 兰州理工大学学报, 2009, 35(4): 166—172.
Wang Chunni, Li Shirong. Primary parametric resonance and control of beams subjected to thermal shock load [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2009, 35(4): 166—172. (in Chinese)
- [9] 胡隽, 王元丰. 组合压杆大挠度屈曲分析[J]. 北方交通大学学报, 2002, 24(1): 28—32.
Hu Jun, Wang Yuanfeng. Analysis on large deflection buckling of compressed built-up members [J]. Journal of Northern Jiaotong University, 2002, 24(1): 28—32. (in Chinese).
- [10] 李国跃, 吕凤梧. 双肢缀板钢格构立柱的整体稳定分析[J]. 土木工程学报, 2002, 35(4): 17—19.
Li Guoyue, Lu Fengwu. The overall stability of a battened plate column [J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(4): 17—19. (in Chinese)
- [11] 龙驭球, 包世华. 结构力学教程(II)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Long Yuqiu, Bao Shihua. Structural mechanics (II) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)
- [12] 符·华·鲍洛金. 弹性体系的动力稳定性[M]. 林砚田, 译. 北京: 高等教育出版社, 1960.
Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems [M]. Translated by Lin Yantian. Beijing: Higher Education Press, 1960. (in Chinese)