第二章　控制系统的数学模型

（Control System Modeling）

数学模型（models）—— 描述系统内部各变量之间关系的数学表达式

静态模型—— 在静态（即变量的各阶导数为零）条件下，描写变量之间关系的代数方程。

动态模型 ——描写变量各阶导数之间关系的微分方程（或其它模型形式）。

数学模型是分析、设计控制系统的基础。

建立数学模型的方法主要有：
- 分析法（解析法）
- 实验法（辨识法）

本章主要内容有：
- 传递函数与微分方程
- 用分析法建立系统数学模型的一般方法
- 闭环系统传递函数的求取
  - 结构图变换
  - 梅森（Mason)公式

§2.1　传递函数与微分方程

一、预备知识

1. Laplace变换，教材 P 519

2. 线性系统重要特性 —— 叠加原理

线性系统满足叠加原理有两重含义，即可叠加性和均匀性。

例如：$a_0 \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \dfrac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$

若：当$x=x_1$时，其解为y_1；

当$x=x_2$时，其解为y_2

则　①当$x=x_1+x_2$时，其解为$y=y_1+y_2$。

②当$x=Ax_1$时，其解为$y=Ay_1$，其中A为常数。

3．线性定常微分方程求解

常用方法： 经典法、拉氏变换法、计算机求解

例：已知某系统的微分方程： $\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$

输入信号：$u_i(t)=1(t)$

初始条件：$u_o(0)=0.1$ $\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=0}=0.1$

解：设：$U_\mathrm{i}(s)=L[u_\mathrm{i}(t)]$，$U_\mathrm{o}(s)=L[u_\mathrm{o}(t)]$

由拉氏变换的微分定理，得：

$$L[\frac{du_o(t)}{dt}]=sU_o(s)-u_o(0)$$

$$L[\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}]=s^2U_o(s)-su_o(0)-\dot{u}_o(0)$$

连同初始条件一起代入原微分方程，得：

$$\underline{s^2U_o(s)-0.1s-0.1}+\underline{sU_o(s)-0.1}+U_o(s)=U_i(s)$$

整理得：$U_o(s)(s^2+s+1)=U_i(s)+0.1s+0.2$

$$U_o(s)=\frac{U_i(s)}{s^2+s+1}+\frac{0.1s+0.2}{s^2+s+1}$$

又 $\because u_i(t)=1(t),\quad U_i(s)=\frac{1}{s}$

$$U_o(s)=\frac{1}{s^2+s+1}\cdot\frac{1}{s}+\frac{0.1s+0.2}{s^2+s+1}$$

$\Big\downarrow L^{-1}$

由输入引起的输出

由初始条件引起的输出

$$u_o(t)=\underline{1+1.15e^{-0.5t}\sin(0.866t-120^\circ)}+\underline{0.2e^{-0.5t}\sin(0.866t+30^\circ)}$$

用拉氏变换法求解微分方程的步骤可归纳为:

微分方程 $\xrightarrow{\text{拉氏变换}}$ 输出的象函数 $\xrightarrow{\text{拉氏反变换}}$ 输出的时域函数(微分方程的解)

当t=0⁻ 时，输出量、输入量及其各阶导数项均为零。

二、传递函数的定义

对于线性定常系统，在零初始条件下，输出的L变换与输入的L变换之比.
①②

n 阶线性定常系统：

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+\ldots+a_nc(t)=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\ldots+b_mr(t)$$

$$(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n)C(s)=(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_m)R(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s_{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

几个概念：传递函数的零点：满足$N(s)$=0的点——传函分子=0的根

传递函数的极点：满足$D(s)$=0的点——传函分母=0的根

特征方程：$D(s)$=0（当传函为闭环传函时）

三、传递函数的性质

①传递函数是复变量s的有理真分式函数，即m≤n，且所有系数为实数；

②传递函数是系统输入输出关系的表达式，它只取决于系统的结构参数，而与系统的输入信号的形式无关，当然也与初始条件无关。

可用下列方框表示其输入输出间的关系：$R(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow C(s)$

③传递函数与微分方程有相通性，是一一对应的，非常容易转换。

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+\cdots+a_nc(t)=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\cdots+b_mr(t)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

熟记对应关系

④传递函数的反拉氏变换是系统的单位脉冲响应。

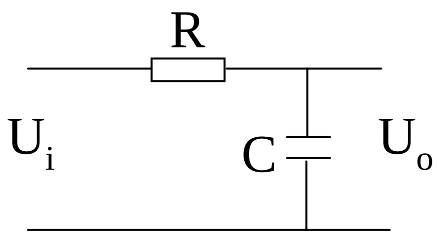
⑤传递函数只是对系统的数学描述，并不反映系统的物理构成。

课堂练习对应关系。

§2.2　分析法建立系统数学模型的一般方法

一、环节数学模型的建立

例2.1　建立一阶RC网络数学模型



输入量：电压 u_I；

解：(1)确定输入输出变量:

输出量：电压 u_o。

(2)列写方程：$u_i = u_R + u_c = u_R + u_o$

$$u_R = Ri$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{du_o}{dt}$$

(3)消除中间变量，整理为标准形式：$RC\dfrac{du_o}{dt} + u_o = u_i$

相应的传递函数为：$\dfrac{U_o(s)}{U_i(s)} = \dfrac{1}{RCs+1}$

事实上，对于此类电网络，可以直接用电路上所学的运算法得到其传递函数。

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{R + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs+1}$$

归纳分析法建立环节数学模型的一般步骤：

（1）确定输入输出变量；

（2）根据相应的物理定律列写方程；

（3）消除中间变量；

（4）增量化、线性化处理。

（5）写成标准形式：

对于微分方程：输出写在等号的左边，输入（及扰动）写在等号的右边，并且按降阶排列。

对于传递函数：当分子分母都是s的多项式时，分子分母都按s降幂次排列。

或：分子分母都写为因式连乘的形式。

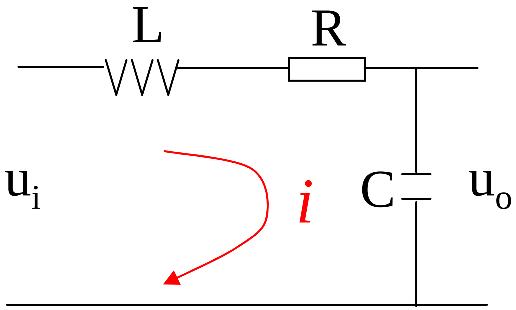
说明：对于电路网络，如例2.1 ，可以用《电路》课上所学的运算法可直接得到传递函数。

再看一例

例2.2　RLC网络。

设系统输入为$u_i(t)$，输出为$u_o(t)$。

试建立该网络的数学模型。



解：根据电路原理，可列得如下方程

$$\begin{cases} u_i = u_L + u_R + u_o \\ i = C\dfrac{du_o}{dt} \\ u_R = Ri = RC\dfrac{du_o}{dt} \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u_o}{dt^2} \end{cases} \Longrightarrow LC\frac{d^2u_o}{dt^2} + RC\frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

——二阶线性常系数微分方程

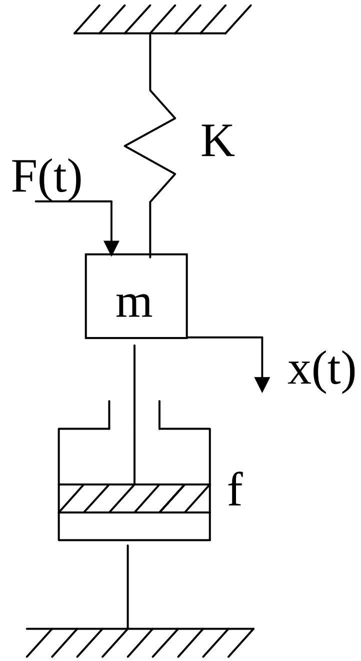
或：$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{Ls + R + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

二者完全一致

作业：习题2－2，习题2－10（选作）

例2.3　弹簧-质量-阻尼机器机械位移系统。

试列写质量 m在外力F(t)作用下，位移x(t)的运动方程。



解：设质量m相对于初始状态的位移为：x(t)

则速度、加速度分别，dx(t)/dt，d²x/dt²

由牛顿运动定律有：

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(t)-F_1(t)-F_2(t)$$

弹簧的弹力=Kx(t)

阻尼器的阻尼力=fdx(t)/dt

其中：K为弹簧的弹性系数；f为阻尼器的阻尼系数。

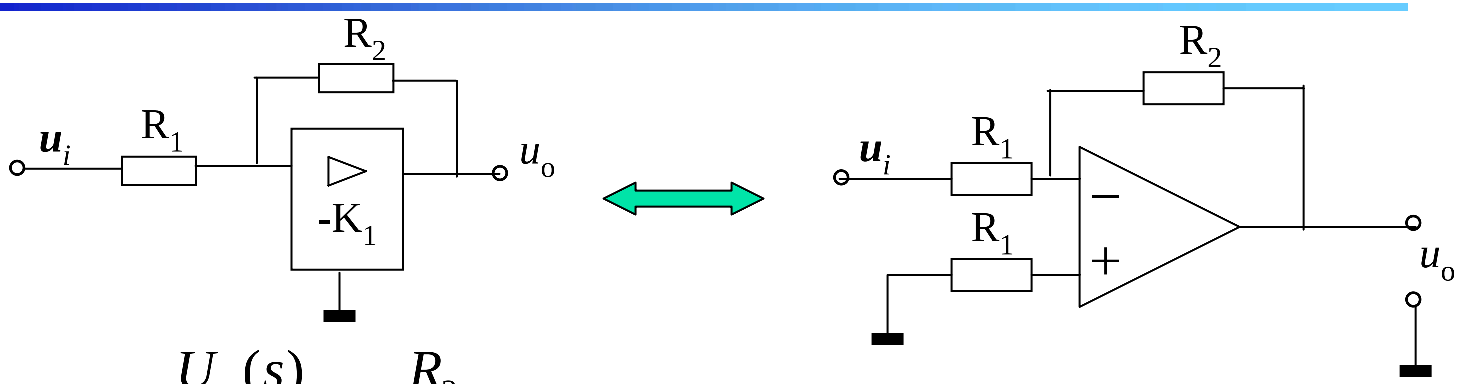
$$\therefore\ m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+f\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=F(t)$$

与RLC网络比较 $LC\frac{d^2u_o}{dt^2}+RC\frac{du_o}{dt}+u_o=u_i$

思考与理解: 传递函数只是对系统的数学描述，并不反映系统的物理构成。

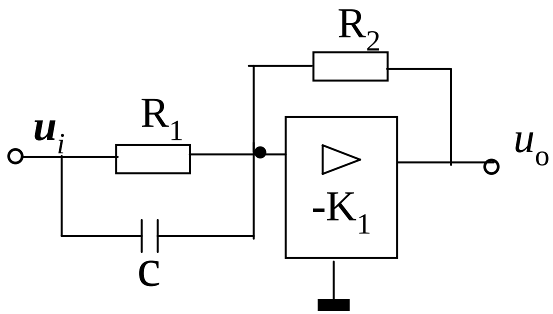
例2.4　有源网络

(1)



传函为：$\dfrac{U_o(s)}{U_i(s)}=-\dfrac{R_2}{R_1}$

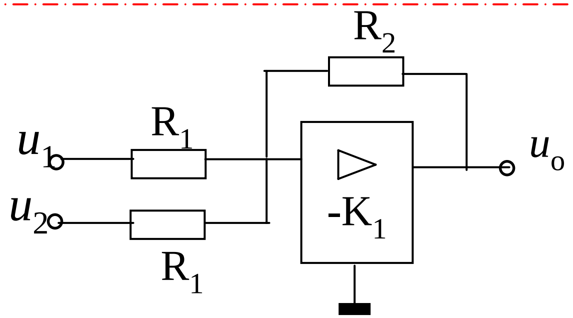
(2)



传函为：$\dfrac{U_o(s)}{U_i(s)}=-\dfrac{R_2}{\dfrac{R_1}{R_1Cs+1}}$

$$=-\frac{R_2}{R_1}\cdot(R_1Cs+1)$$

(3)



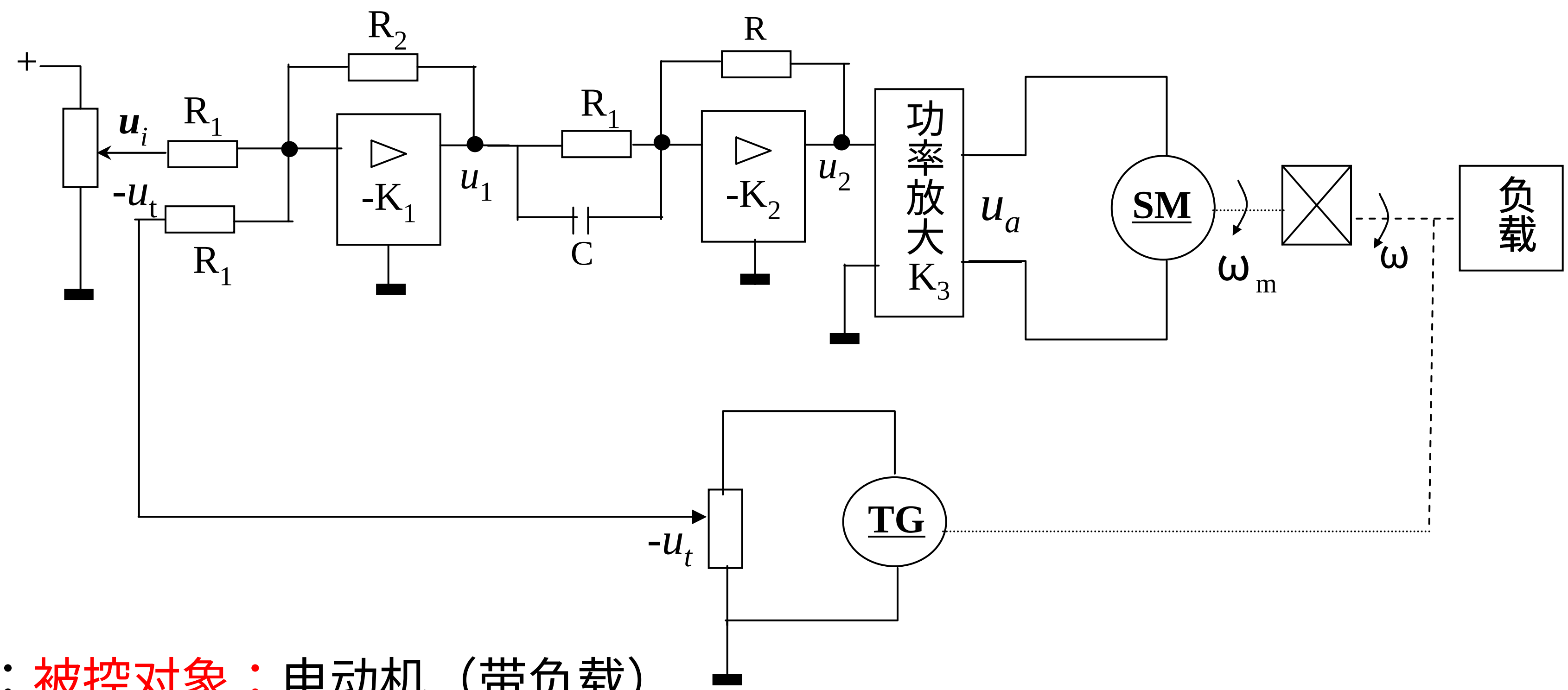
$$U_o(s)=-\frac{R_2}{R_1}[U_1(s)+U_2(s)]$$

当有多个外作用信号时，传函要分别求取。

当求取对其中某一个外作用信号的传函时，认为其余外作用信号为零。

思考：这种情况下，系统的总输出如何？

例2.5 某速度控制系统如下图所示，建立其数学模型。

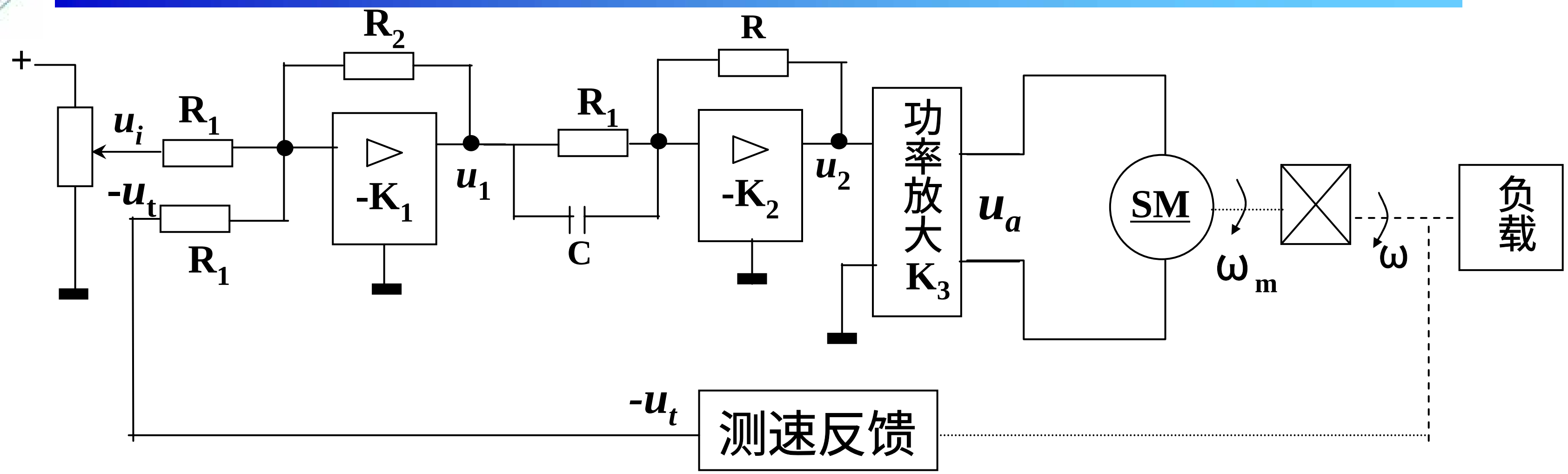


解：被控对象：电动机（带负载）

输入量：u_i

输出量：转速ω

扰动量：负载转矩Mc′（折算到电动机轴上的等效值）



运算放大器 I ： $u_1 = -K_1(u_i - u_t)$ 其中 $K_1 = \frac{R_2}{R_1}$

运算放大器 II： $u_2 = -K_2(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1)$ 其中 $K_2 = \frac{R}{R_1}$，$\tau = R_1 C$

功率放大器： $u_a = K_3 u_2$

直流电动机： $T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_c M_c'$

齿 轮 系： $\omega = \frac{1}{i}\omega_m$

测速发电机： $u_t = K_t \omega$

消去中间变量可得系统微分方程：$T_m' \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_g' \frac{du_i}{dt} + K_g u_i - K_c' M_c'$

归纳系统数学模型的建立的一般步骤

(1)确定系统输入、输出变量；

(2)根据各环节相应的物理定律建立各环节的数学模型；

(3)消除中间变量，写出系统外作用量与输出量之间的微分方程。

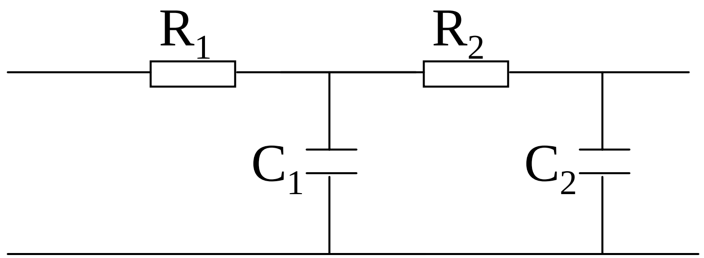
或先画出系统结构图再求出传递函数（当然也就得到了微分方程）。

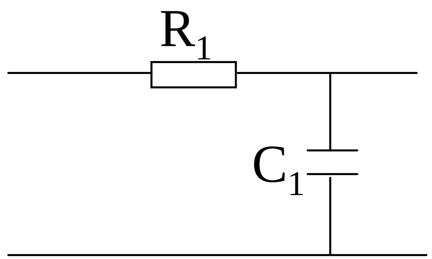
列写系统各环节数学模型时应要注意的问题：

(1)信号传递的单向性，前一个元件的输出是后一个元件的输入。

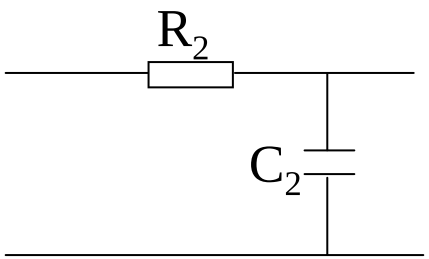
(2)前后连接的两个元件中，后级对前级的负载效应问题。

例如：





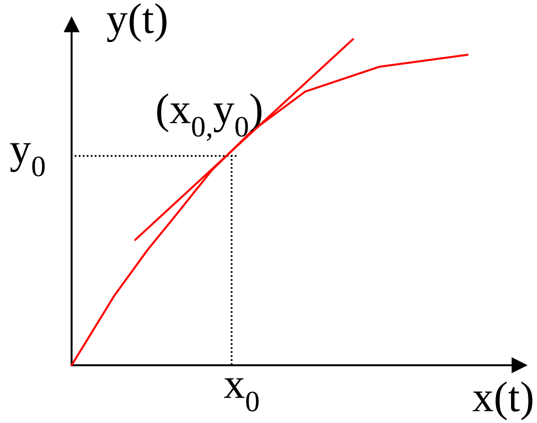
串联



二者传函不同

三、非线性运动方程的线性化（P16）

非线性环节是广泛存在的。



x(t)——非线性环节的输入信号

y(t)——非线性环节的输出信号

处理方法:
- 忽略——视为线性元件
- 微偏法——小偏差线性化法 ——本章讨论
- 非线性系统理论 ——描述函数法、相平面法、逆系统方法等

微偏法的实质是：

在小范围内，用切线代替曲线，从而达到线性化的目的。

具体做法是：

在工作点附近进行泰勒级数展开，忽略高次项。

设：非线性方程为：$y=f(x)$

在工作点（x_0，y_0）展开为泰勒级数：

$$y=f(x_0)+\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\therefore y-f(x_0)\approx\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)$$

设：$K=\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$

有：$y-f(x_0)=K(x-x_0)$

即：$\Delta y=K\Delta x$ ——增量线性化方程

注意：⑴线性化方程的参数 $f'(x_0)$ 与工作点（平衡状态）有关。

⑵应用微偏法，工作范围不能过大，否则误差大。
到底多大合适，与非线性曲线形状有关。

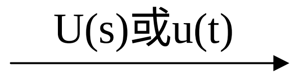
⑶二元函数的线性化方法与此相似，请课后阅读教材上的相关内容。

§2.3 控制系统的结构图及其化简（Block diagrams ）

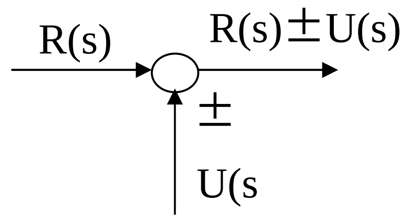
结构图又称方框图或方块图

一、 结构图的组成

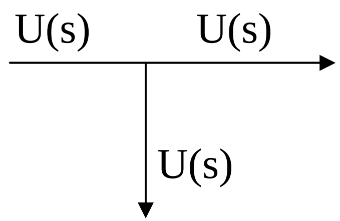
信号线：带箭头的直线，箭头表示信号的流向。



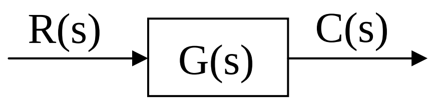
比较点（综合点）：两个以上的信号进行加减运算。输出信号等于所有输入信号的代数和。



引出点（分支点）：引出点表示信号引出或分支。在同一位置引出的信号**在数值和性质方面完全相同。**这一点与电路图是不同的。



方框（环节）：把传递函数写到方框的里面。方框的输出等于方框的输入与传递函数的乘积，可视为单向运算的算子。



二、 结构图的绘制

绘制结构图的一般方法：

（1）考虑负载效应，分别列写系统中各元部件的时域方程或复域方程；

代数方程的时域形式和复域形式相同，微分方程则必须写成复域形式。

（2）根据信号流向，从前向后(或从后向前)用信号线依次将各方框连接。

例2.5　前已求出

$$u_1 = -K_1(u_i - u_t) \longrightarrow U_1(s) = -K_1[U_i(s) - U_t(s)]$$

$$u_2 = -K_2(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1) \longrightarrow U_2(s) = -K_2(\tau s + 1)U_1(s)$$

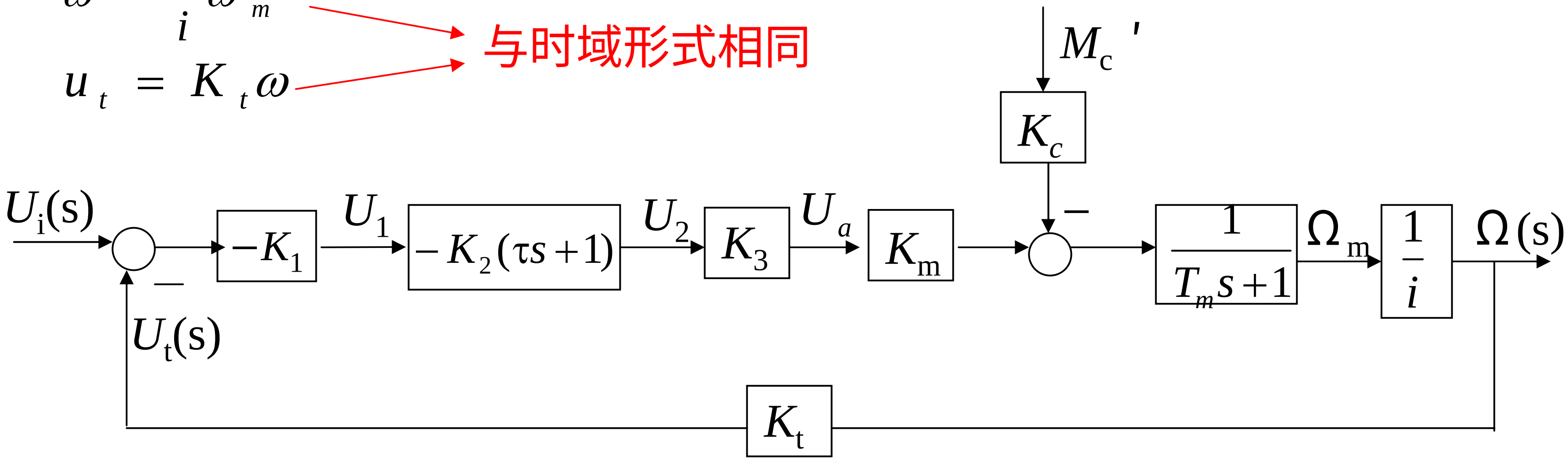
$$u_a = K_3 u_2 \longrightarrow U_a(s) = K_3 U_2(s)$$

$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_c M_c' \longrightarrow \Omega_m(s) = \frac{1}{T_m s + 1}[K_m U_a(s) - K_c M_c'(s)]$$

$$\omega = \frac{1}{i}\omega_m$$

$$u_t = K_t \omega$$

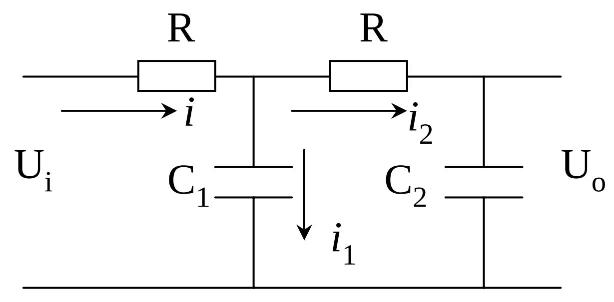
与时域形式相同

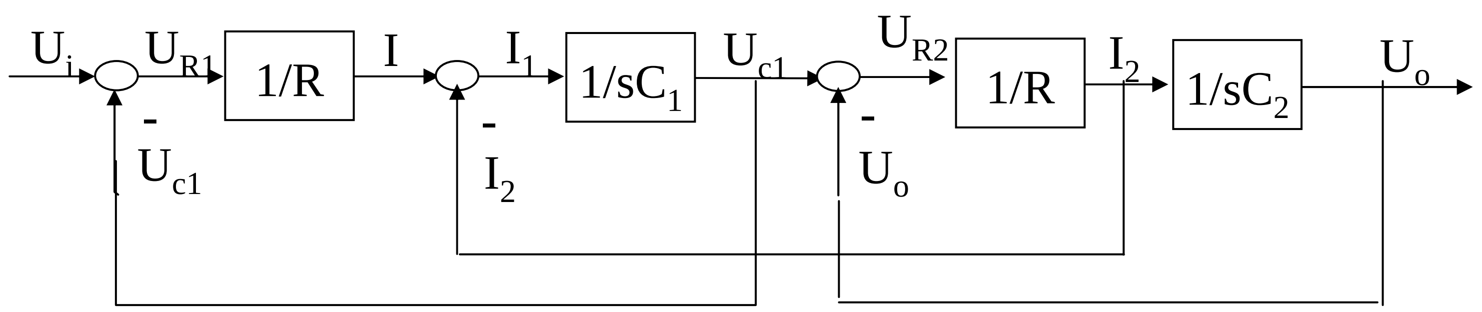


例2.6　　双T滤波电路，试绘制该系统结构图。

解：根据电路原理课列出系统复域方程为：

$$
\begin{cases}
U_i - U_{c1} = U_{R1} \\
U_{R1} = RI \\
I_1 + I_2 = I \\
I_1 = C_1 s U_{C_1} \\
U_{c1} - U_o = U_{R2} \\
U_{R2} = RI_2 \\
I_2 = C_2 s U_o
\end{cases}
$$





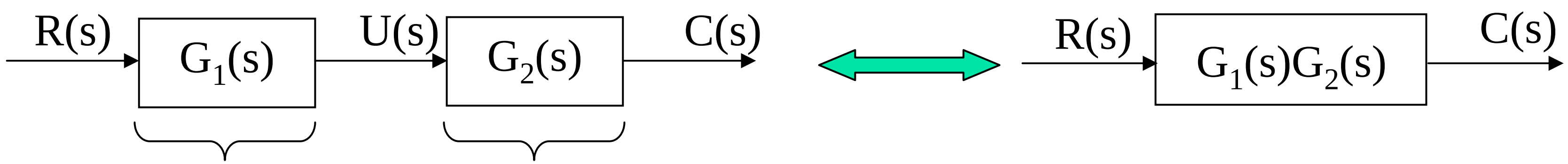
注意：

①虽然系统结构是从系统元部件的数学模型得到的，但结构图中的方块与实际的元部件并非一一对应 （上例中的电动机）。
②方框图的表示不是唯一的 。

三、结构图的等效变换和化简

1、结构图的三种基本运算：——串联、并联、反馈

（1）方框的串联（combining serial blocks）及运算

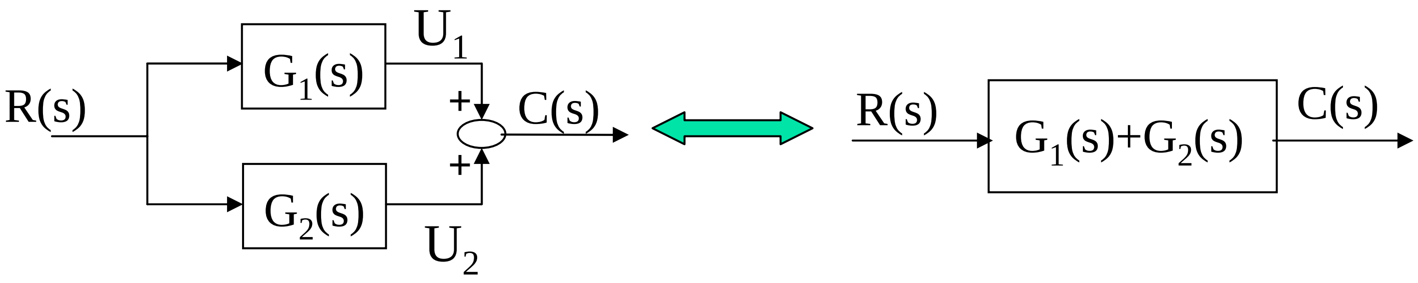


$U(s)=G_1(s)R(s)$　　$C(s)=G_2(s)U(s)$

$$C(s)=\underbrace{G_2(s)G_1(s)}_{G(s)}R(s)=G(s)R(s)$$

思考：多个环节串联？
结论：方框串联连接总传递函数等于各个方框传递函数的乘积。

（2）方框的并联（combining parallel blocks）及运算



$$U_1(s)=G_1(s)R(s)$$

$$U_2(s)=G_2(s)R(s)$$

$$C(s)=U_1(s)+U_2(s)$$

$$=(G_1(s)+G_2(s))R(s)$$

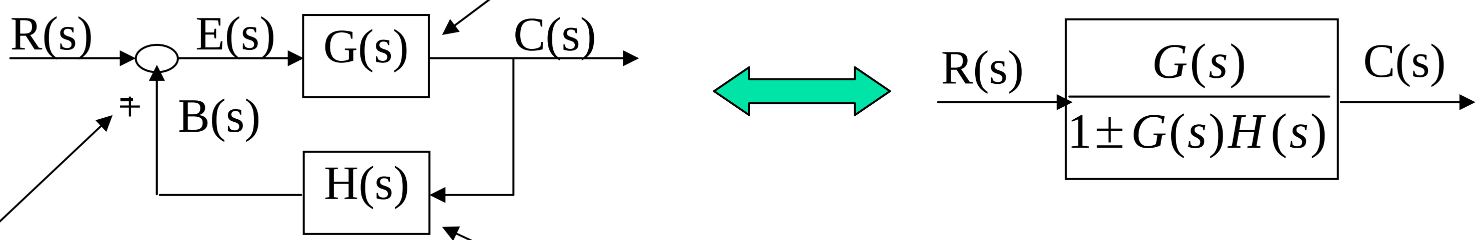
$$=G(s)R(s)$$

思考：多个环节并联？

结论：并联的总传递函数等于各个方框传递函数的代数和。

（3）反馈（feedback ）连接方框的运算

前向通道传函



"+"表示正反馈；
"-"表示负反馈。

反馈通路传函
H(s)=1称为单位反馈

$C(s)=G(s)E(s)$

$E(s)=R(s)\mp B(s)$

$B(s)=H(s)C(s)$

$C(s)=G(s)[R(s)\mp H(s)C(s)]$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1\pm G(s)H(s)}\xlongequal{\text{记为}}\Phi(s) \Longleftrightarrow \text{闭环传函}=\frac{\text{前向通路传函}}{1\pm\text{开环传函}}$$

我们称：
$\Phi(s)$为闭环传递函数
G(s)H(s) 为闭环系统的开环传递函数

式中："+"表示负反馈；"-"表示正反馈。

相应的概念： 闭环零、极点； 开环零、极点； … …

说明：

（1）在很多情况下，传函为分式，

设前向通道传函$G(s)=\dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}$

反馈通道传函$H(s)=\dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}$

有：$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}}{1\pm\dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}\cdot\dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}}$$

$$=\frac{B_1(s)\cdot A_2(s)}{A_1(s)\cdot A_2(s)\pm B_1(s)\cdot B_2(s)}$$

即：

$$\text{闭环传递函数}=\frac{\text{前向分子}\cdot\text{反馈分母}}{\text{分母乘积}\pm\text{分子乘积}}$$

一个很实用的结论。

式中："+"表示负反馈；"-"表示正反馈。

（2）定义：$\Phi(s)$的 分母=0 ⟺ $1\pm G(s)H(s)=0$

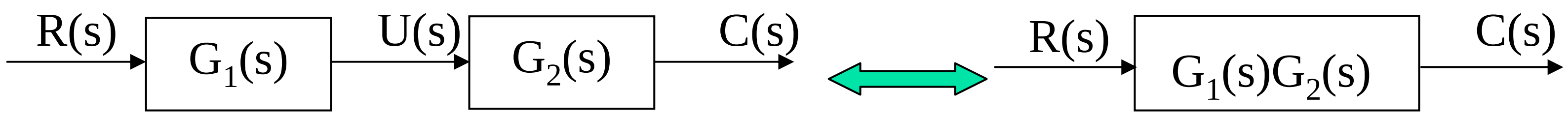
⟺ $A_1(s)\cdot A_2(s)\pm B_1(s)\cdot B_2(s)=0$

为系统特征方程。

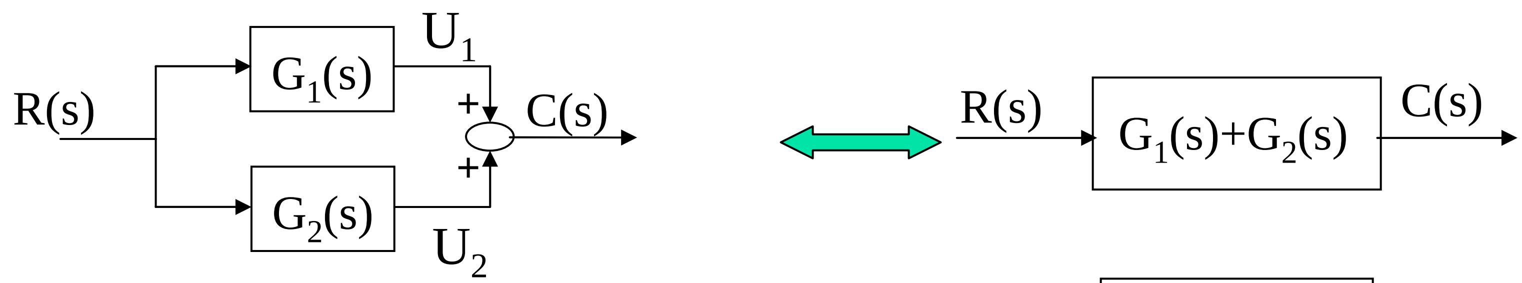
特征方程的根称为系统的特征根。

总结对照这三种基本运算：

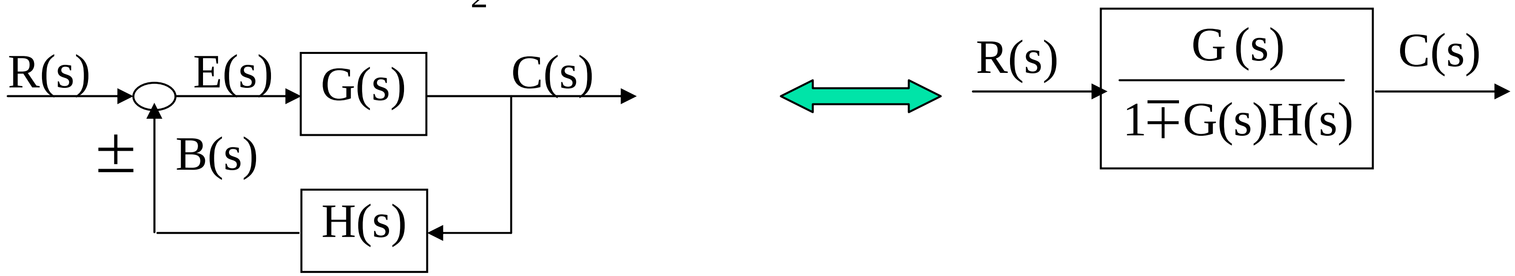
串联：



并联：



反馈：

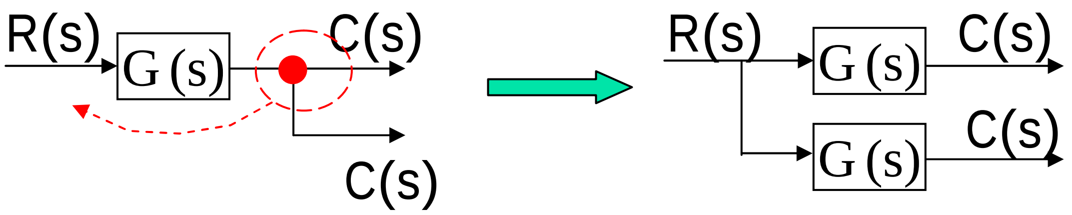


可以发现：他们的共同特点是消除了中间变量，使结构图简化。

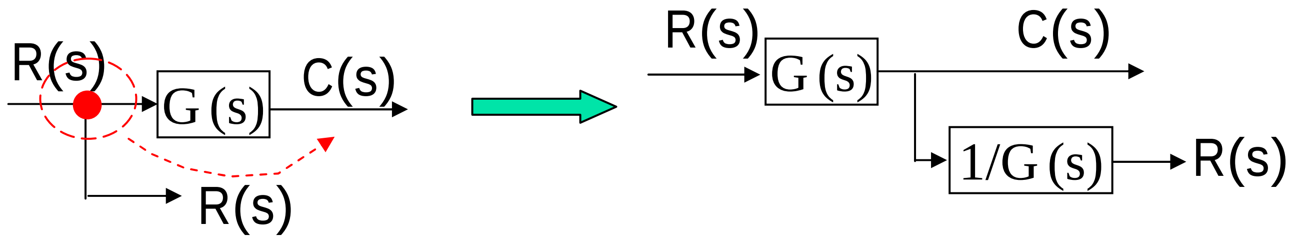
2、结构图变换

方框图变换就是要通过移动引出点、求和点等，使结构图中出现串联、并联或反馈，以便化简结构图。

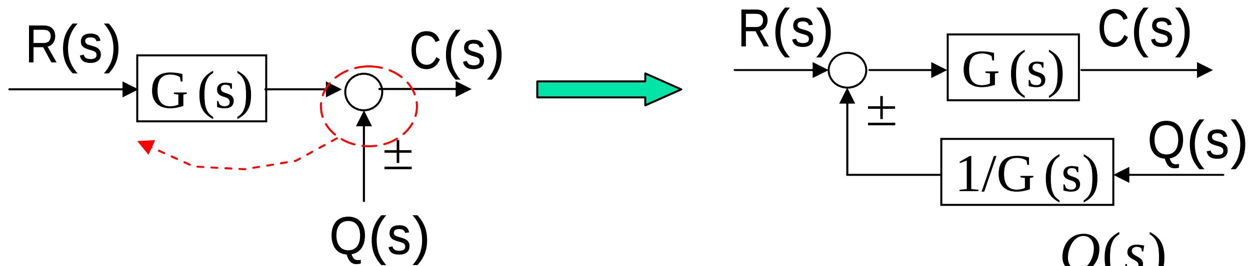
（1）引出点前移：



（2）引出点后移：

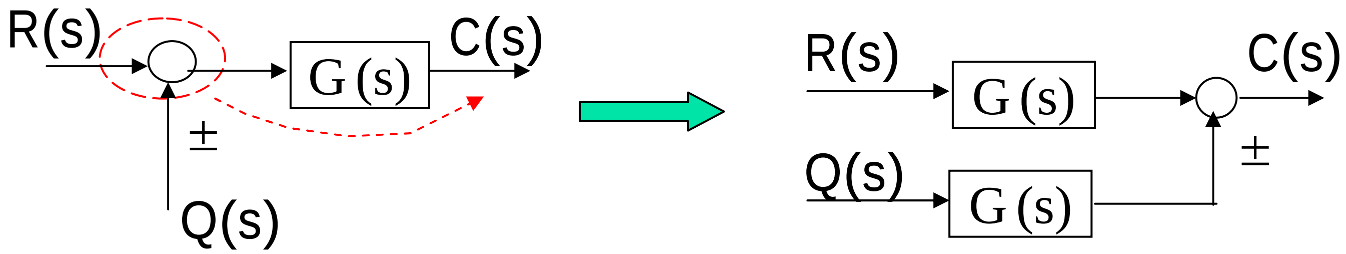


（3）比较点前移：



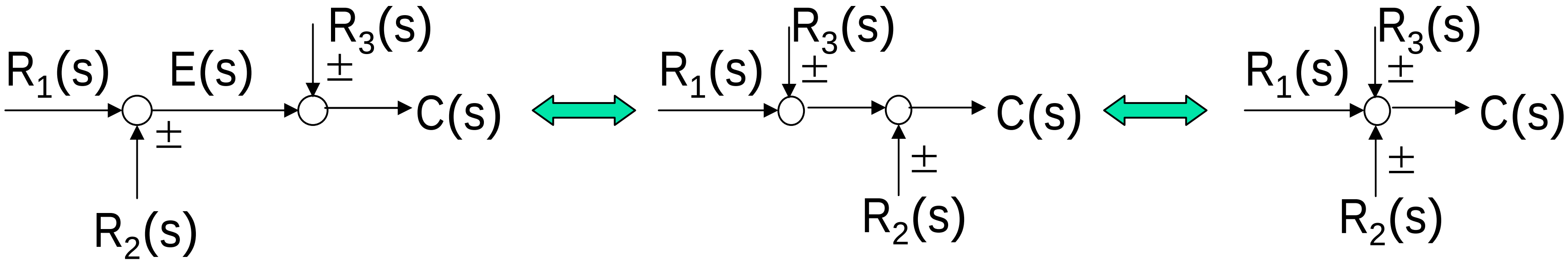
$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s) \iff C(s) = [R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$$

(4）比较点后移：

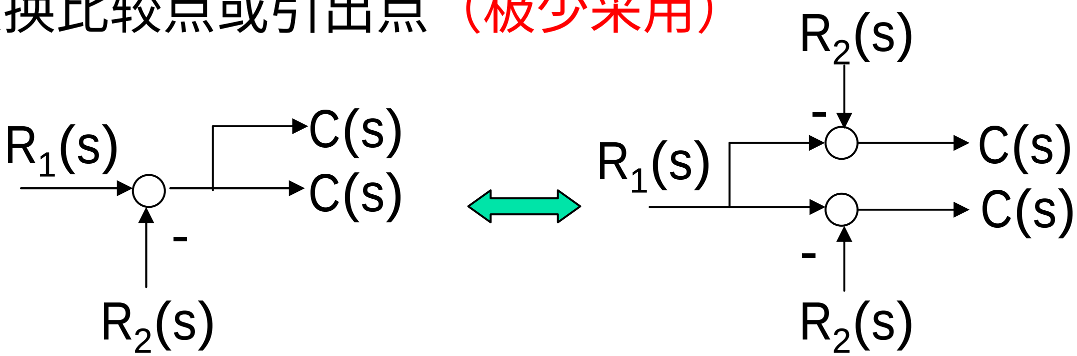


$$C(s)=[R(s)\pm Q(s)]G(s) \Longleftrightarrow C(s)=R(s)G(s)\pm Q(s)G(s)$$

(5) 比较点易位及合并



(6)交换比较点或引出点（极少采用）



3、结构图变换与化简

应该说，结构图的变换是手段；

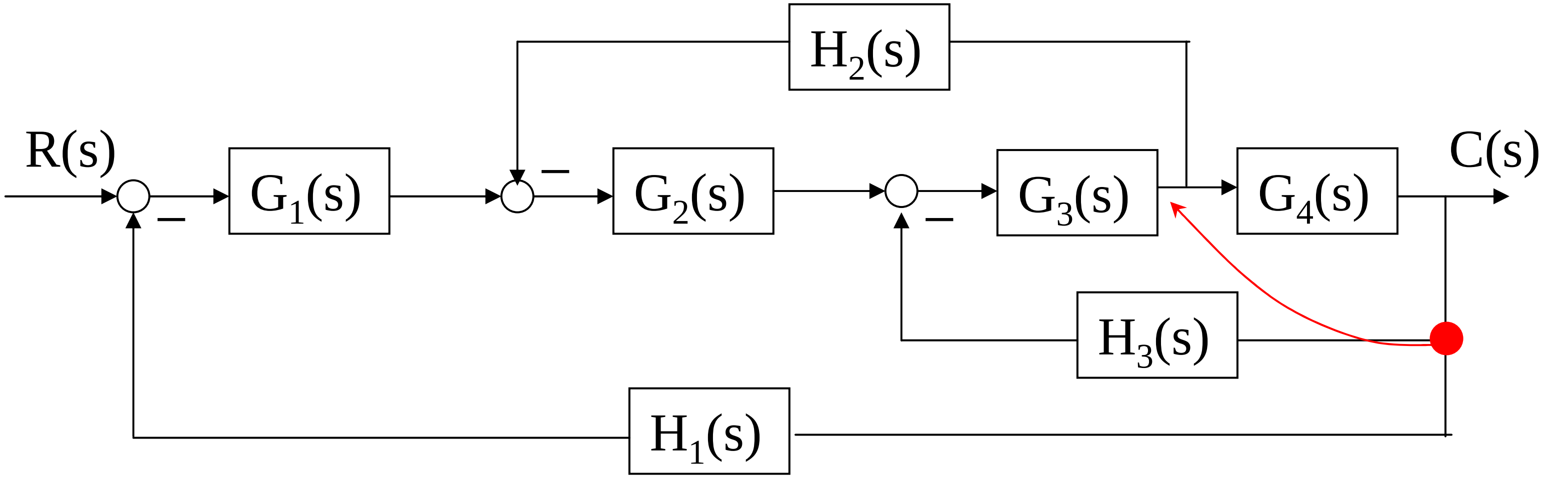
结构图的化简才是目的。

变换与化简的基本原则是：等效原则。

在结构图变换与化简过程中，我们只能减少（或增加）一些中间变量，但各变量之间的数学关系不能改变。

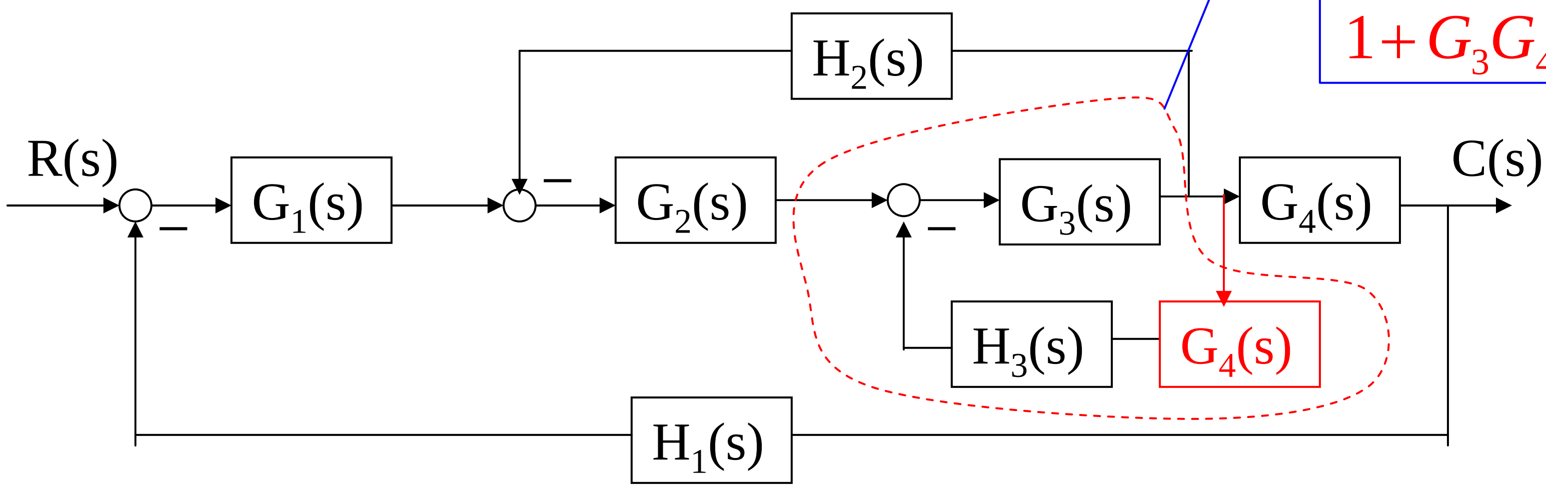
看两个例题

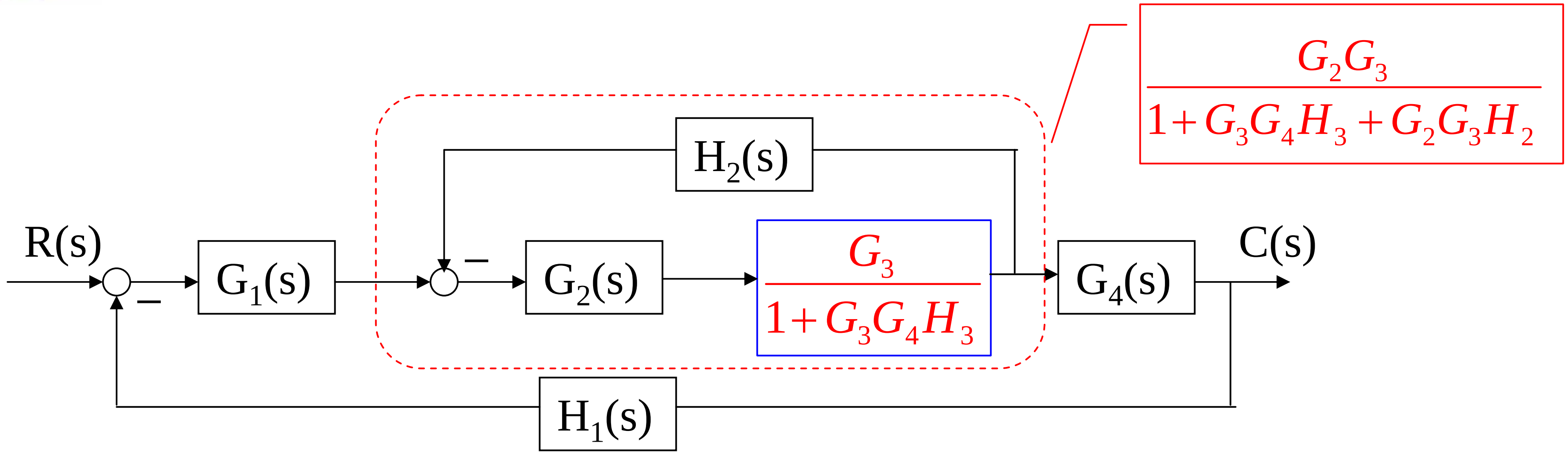
例2.7　已知系统结构图如下图所示，求$C(s)/R(s)$——教材P33图2-27例11

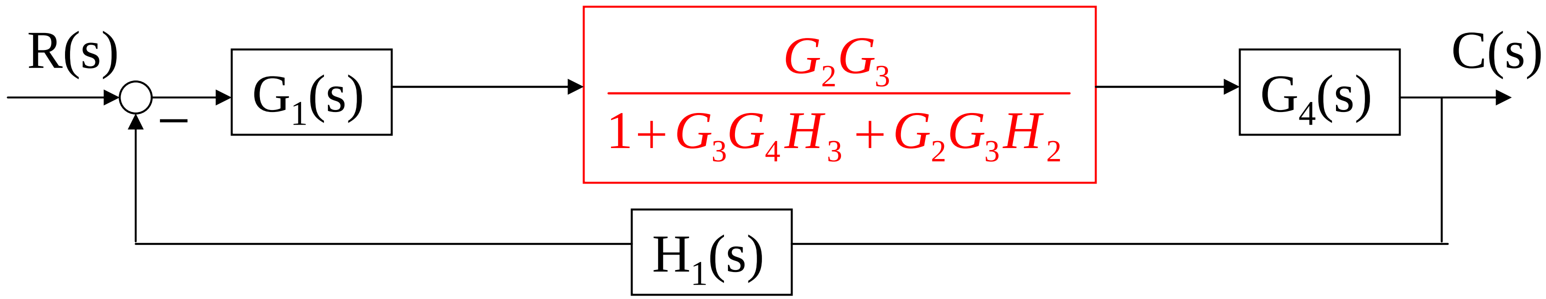


解：分析如何解除回路之间的交叉？

$$\frac{G_3}{1+G_3G_4H_3}$$

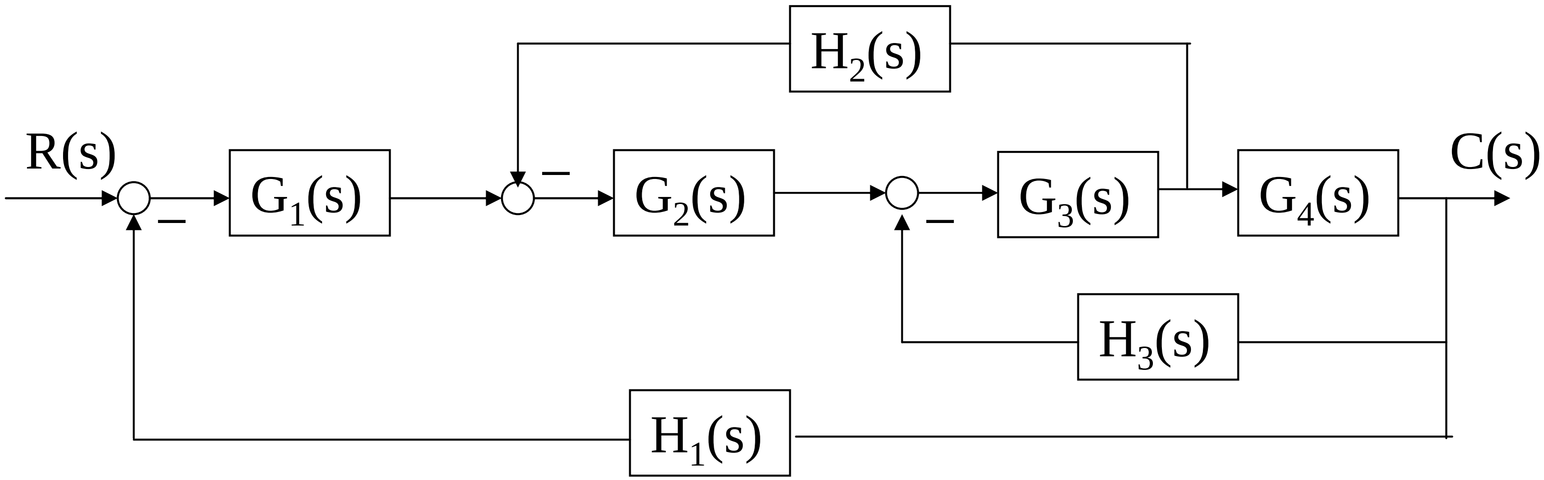






$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3}$$

仔细观察



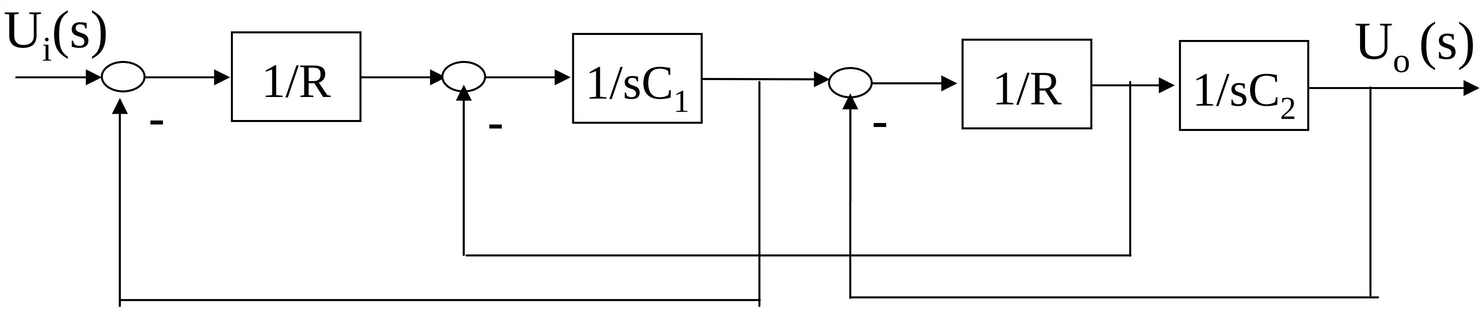
想一想：有没有其它的变换方法？

对照比较：$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3}$$

发现什么规律？

再看一例

例2.8 已知系统结构图如下图所示，求$U_o(s)$ / $U_i(s)$ ——前面例2.6



解：分析如何解除回路之间的交叉？

本题答案：$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{R^2C_1C_2s^2+(2RC_2+RC_1)s+1}$$

可由 $$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{C_1s}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{C_2s}}{1+\frac{1}{RC_1s}+\frac{1}{RC_1s}+\frac{1}{RC_2s}+\frac{1}{RC_1s}\cdot\frac{1}{RC_2s}}$$ 化简而成

思考：本例与前两例有何不同？

§2.4 信号流图与Mason公式

一、信号流图 ——表示信号之间相互关系的又一种图示方法。

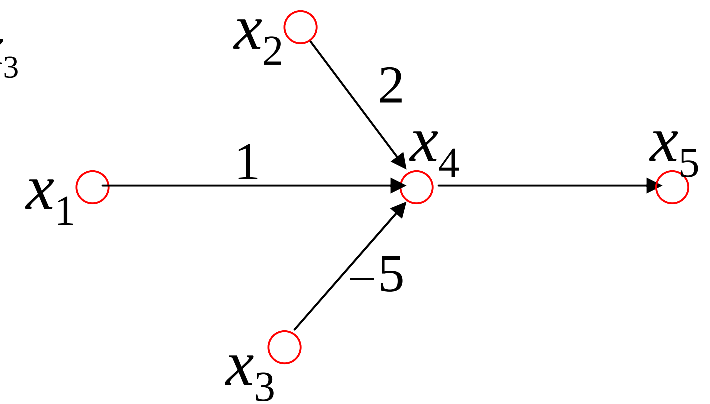
信号流图有两种符号——节点和支路。

节点——以小圆圈表示，用来表示信号，同时兼做求和号

支路——两节点之间的定向线段，相当于乘法器

例如：$x_4 = x_1 + 2x_2 - 5x_3$

$x_5 = x_4$



称：只有输出支路的节点为源节点(source nodes)，又称输入节点；

只有输入支路的节点为阱点(sink nodes) ，又称输出节点；

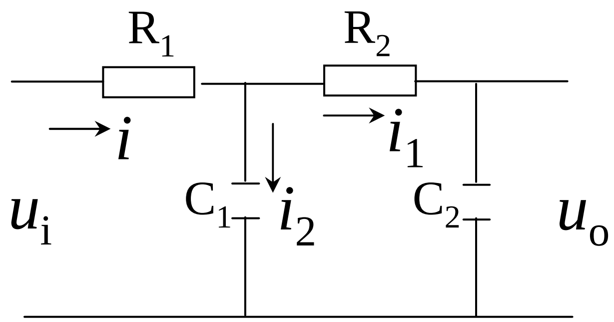
又有输入支路，又有输出支路的节点为混合节点；

显然，混合节点所代表的信号是所有指向它的信号的代数和。

二、信号流图的绘制

信号流图可由系统复域方程绘制，也可由系统结构图绘制而成。

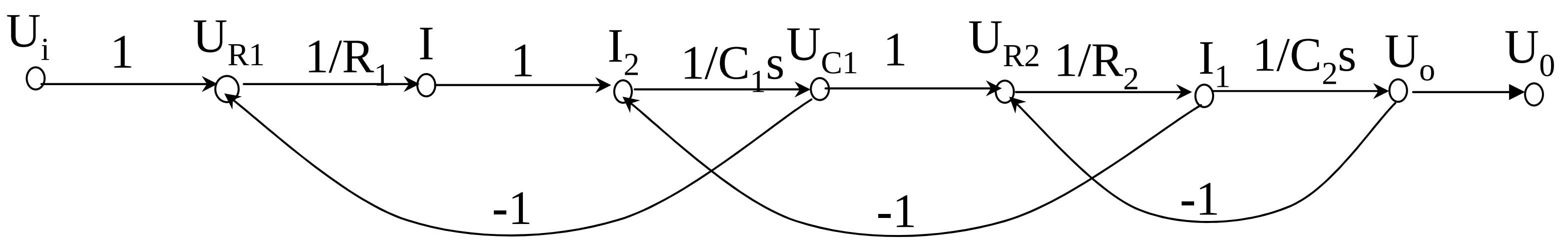
例2.9　网络如图。试绘制系统的信号流图。



解：列出系统方程为

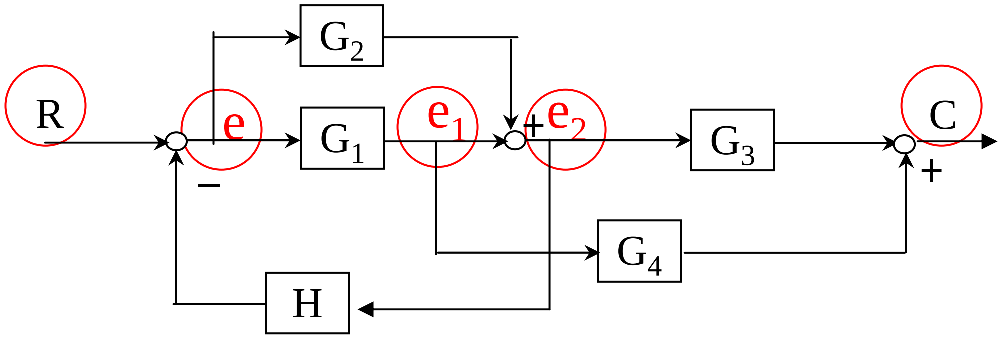
$$
\left.\begin{aligned}
&U_i - U_{C_1} = U_{R_1} \\
&I = \frac{U_{R_1}}{R_1} \\
&I_1 = I - I_2 \\
&I_2 = C_1 s U_{C_1} \\
&U_{C_1} = U_{R_2} + U_o \\
&U_{R_2} = I_1 R_2 \\
&U_o = \frac{1}{C_2 s} I_1
\end{aligned}\right\} \text{共8个变量}
$$

说明：本例直接写出的是复域模型，如果不便，也可以先写微分方程，再取拉氏变换，得到复域模型。



例2.10

已知系统框图，试绘制其信号流图。



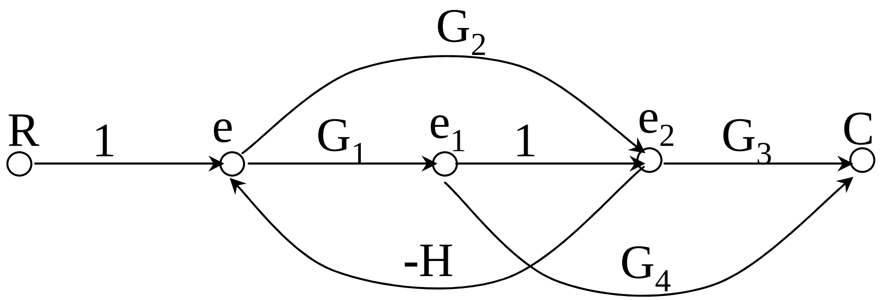
解：先选取节点——非唯一的

输入量R

输出量C

引出点

通常还包括求和号的输出（例13)



共5个变量

三、 梅森增益公式（Mason gain rule）

梅森增益公式：$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}p_k\Delta_k$

- P——系统总传递函数；
- n——前向通路总条数；
- p_k——第k条前向通路总增益；
- Δ——特征式

这里：

$$\Delta=1-\underbrace{\sum L_a}_{\text{单独回路增益}}+\underbrace{\sum L_bL_c}_{\text{每两个互不接触回路增益乘积}}-\underbrace{\sum L_dL_eL_f}_{\text{每三个互不接触回路增益乘积}}+\cdots$$

Δ_k—特征式的余子式。

即特征式中去掉与第k条前向通路相接触的回路增益项（包括回路增益的乘积项）后的余式。

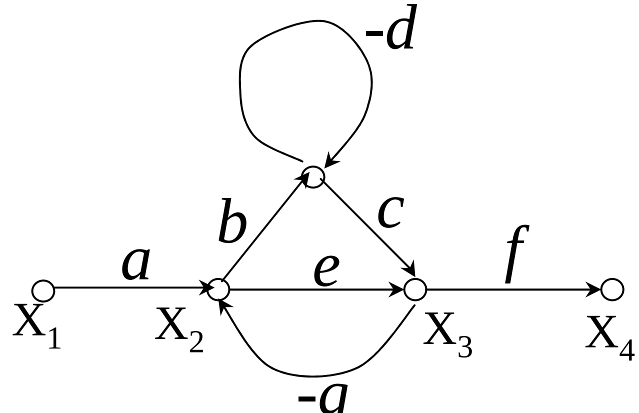
例2.11

利用梅森增益公式求总增益。

解：系统有3条回路：$L_1 = -d$

$L_2 = -eg$

$L_3 = -bcg$



L_1与L_2为互不接触回路：

$L_1 L_2 = egd$

$$\Delta = 1 + eg + bcg + d + egd$$

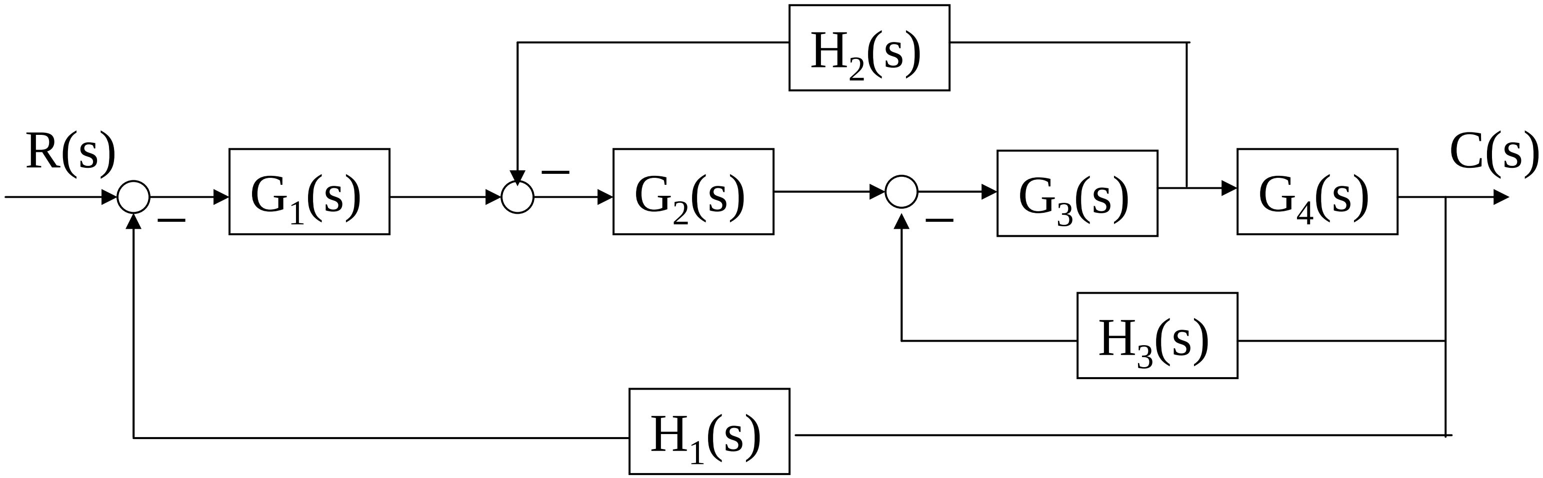
系统有2条前向通路：$p_1 = aef$　　$\Delta_1 = 1 + d$

$p_2 = abcf$　　$\Delta_2 = 1$

于是总增益X_4/X_1为：$$P = \frac{aef(1+d) + abcf}{1 + eg + bcg + d + egd}$$

例2.12

已知系统结构图如下图，用**Mason**公式求$C(s)/R(s)$——教材P33图2-27



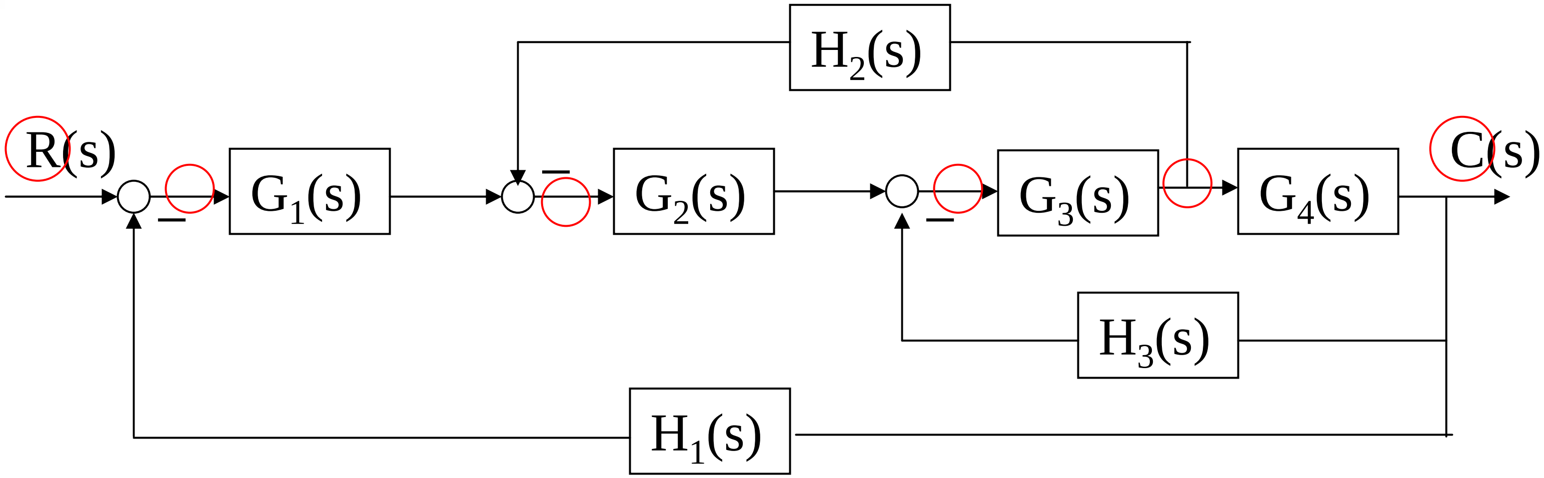
解：回路有： $L_1 = -G_1G_2G_3G_4H_1$　　前向通路有：$P_1 = G_1G_2G_3G_4$

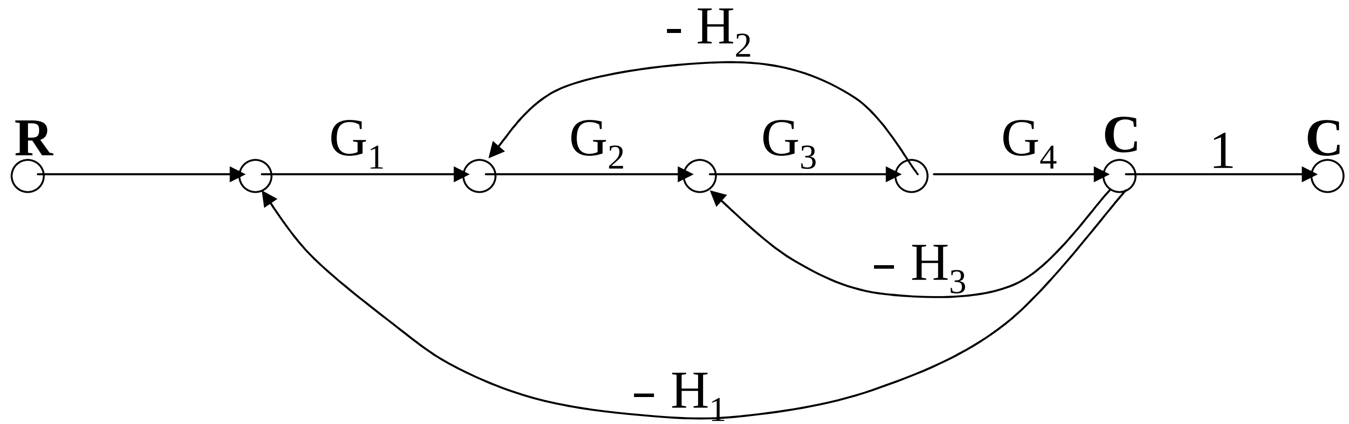
$L_2 = -G_2G_3H_2$　　$\triangle_1 = 1$

$L_3 = -G_3G_4H_3$

无不接触回路

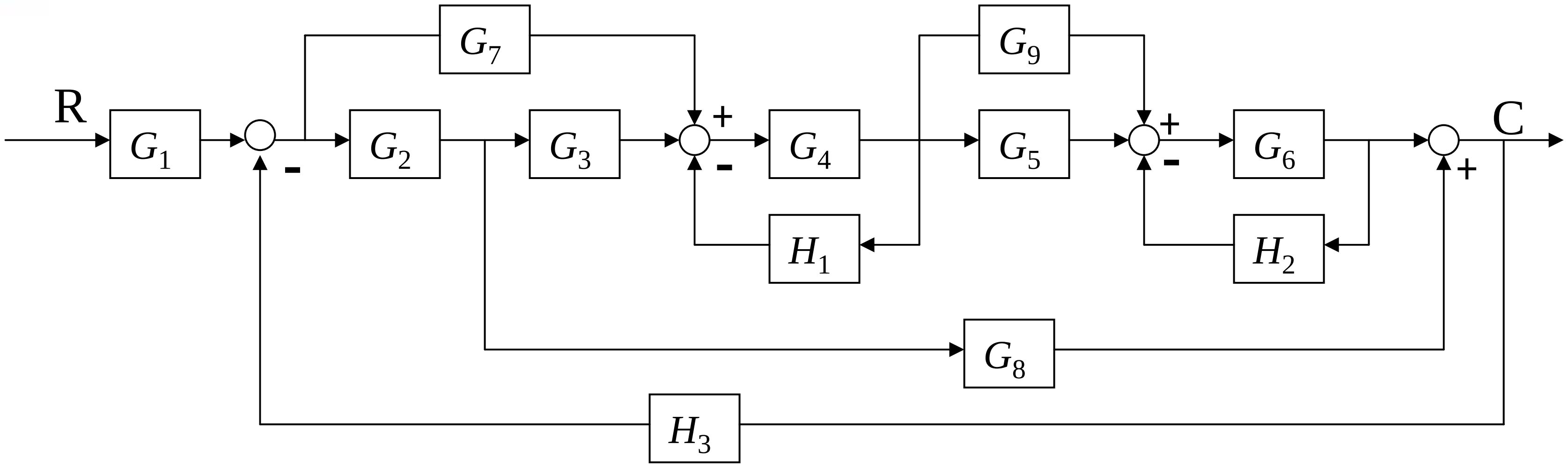
于是总传函：
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3}$$





$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3}$$

例2.13　已知系统结构图如下图，用Mason公式求$C(s)/R(s)$



系统回路：$L_1= -G_4 H_1$

$L_2= - G_6 H_2$

$L_3= - G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$

$L_4= - G_2 G_3 G_4 G_9 G_6 H_3$

$L_5= - G_7 G_4 G_5 G_6 H_3$

$L_6= - G_7 G_4 G_9 G_6 H_3$

$L_7= - G_2 G_8 H_3$

两个不接触回路乘积：$L_1 L_2$与$L_1 L_7$与$L_2 L_7$

三个不接触回路乘积：$L_1 L_2 L_7$

前向通道：$P_1=G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$

$\triangle_1=1$

$P_2=G_1 G_2 G_8$

$\triangle_2=1-(L_1+ L_2)+ L_1 L_2$

$P_3=G_1 G_7 G_4 G_5 G_6$

$\triangle_3=1$

$P_4=G_1 G_7 G_4 G_9 G_6$

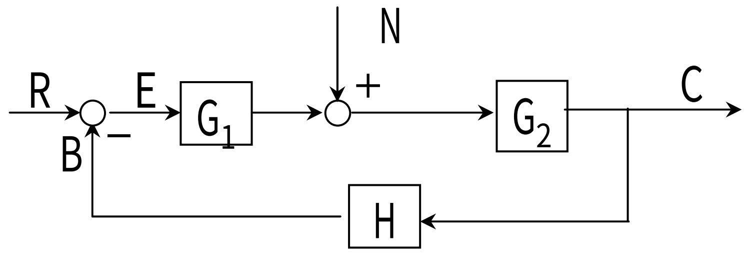
$\triangle_4=1$

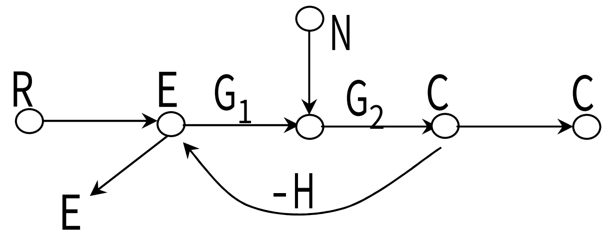
$P_5=G_1 G_2 G_3 G_4 G_9 G_6$

$\triangle_5=1$

§2.5 典型反馈控制系统传递函数的几个基本概念

典型的反馈控制系统如下图





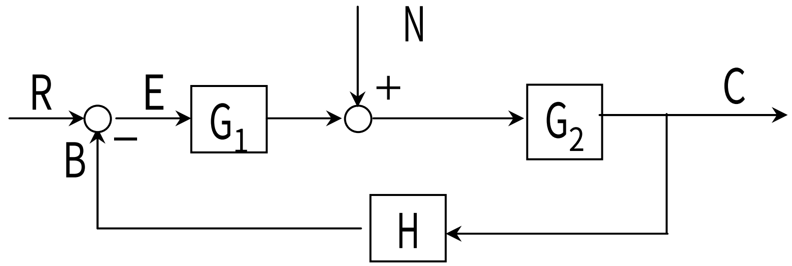
系统外作用： R(s)——系统输入

N(s)——扰动信号

系统输出： C(s)

系统误差： E(s)

1．输入R(s)作用下的闭环传递函数



令N(s)=0 $\quad \Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$

2．扰动N(s)作用下的闭环传递函数

令R(s)=0 $\quad \Phi_N(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}=\dfrac{G_2}{1+G_1G_2H}$

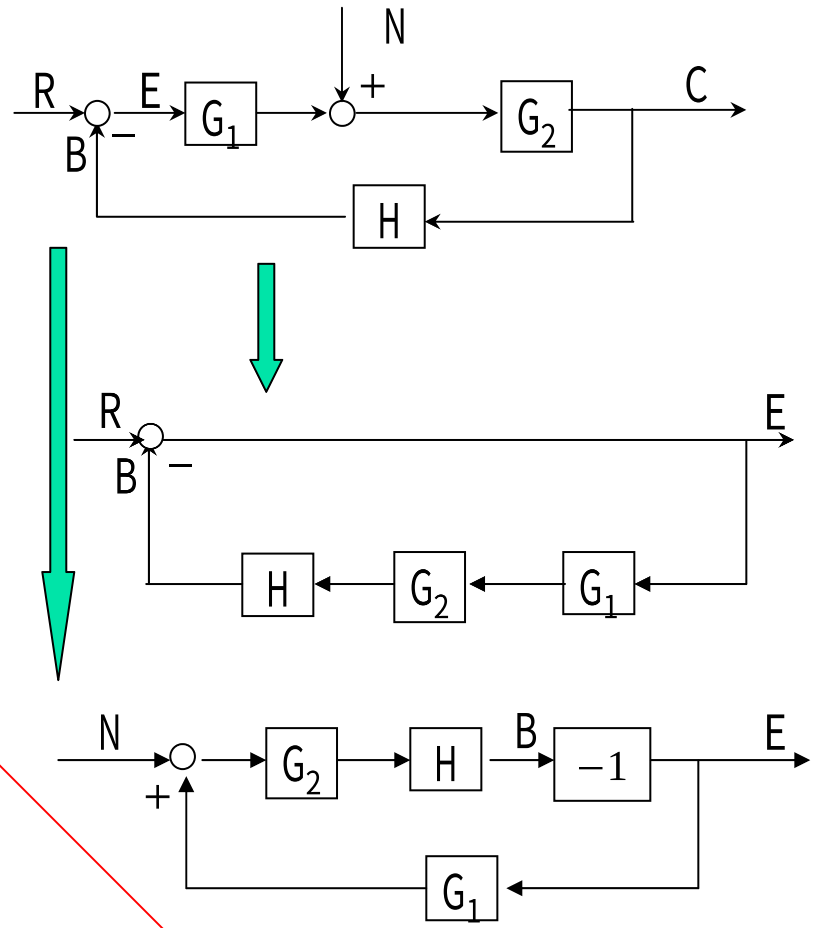
3．两输入同时作用下，系统总输出

$$C(s)=\Phi_N(s)N(s)+\Phi(s)R(s)=\frac{1}{1+G_1G_2H}\left(G_1G_2R+G_2N\right)$$

4．误差传递函数 (是指以误差E(s)作为输出量的传递函数)

$$E(s) \sim R(s) \quad \rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(s)$$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1G_2H}$$



$$E(s) \sim N(s) \quad \rightarrow \frac{E(s)}{N(s)} = \Phi_{eN}(s)$$

$$\Phi_{eN}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2H}{1+G_1G_2H}$$

可由Mason公式得到

本章小结：

实际系统 $\xrightarrow{\text{分析法}}$ 方程组

- 方程组 → 代入消元，得到微分方程或传递函数
- 方程组 → 绘出结构图
  - 绘出结构图 → 结构图变换与化简
  - 绘出结构图 → Mason公式
- 方程组 → 绘出信号流图 → Mason公式

控制系统传递函数获得途径：

- 由系统各元部件运动方程
- 由结构图
- 由信号流图

课外阅读：（P39）2.4 脉冲响应

结论： 控制系统的单位脉冲响应的拉普拉斯变换等于其闭环传递函数