通信系统原理教程

第27讲 信息理论

通信教研室　杨春萍

本讲内容

- 离散信源的熵
- 离散信道模型
- 联合熵和条件熵
- 无噪声信道容量
- 信源编码
- 白色加性高斯噪声信道的容量

离散信源的熵

- 熵的定义：

  设：信源 X 能发出n个不同的消息$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$，则定义熵为信源的平均信息量 $H(X)$：

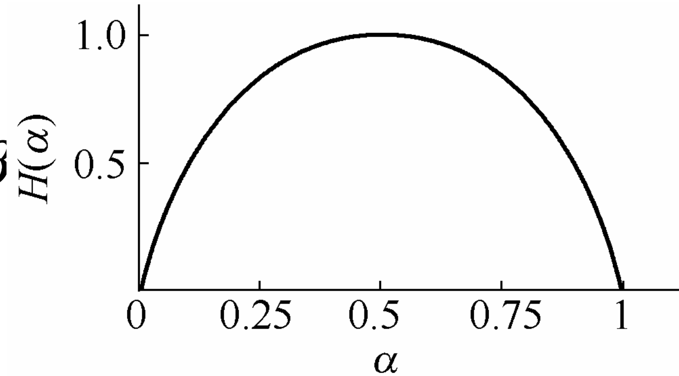
$$H(X)=E[I(x_i)]=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\log_2 P(x_i)$$

  式中，$I(x_i) = -\log_2 P(x_i)$ **(b)**

  - $I(x_i)$表示消息 x_i含有的信息量
  - 熵$H(X)$可以理解为信源的平均不确定度。

二进制信源的熵

- 设：信源仅有“0”和“1”两种消息。
  发送“1”的概率 ***P*(1) = α**，
  则 发送“0”的概率 ***P*(0) = 1 - α = β**
  信源的熵等于



$$H(\alpha) = -P(1)\log_2 P(1) - P(0)\log_2 P(0)$$
$$= -\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$$

- 若一个消息是一个码元，则熵***H*(α)**的单位：比特 / 码元
- ***H*(α)～ α**曲线
  - 当α = 1/2时，此信源的熵最大；这时的两个消息是等概率出现的，其不确定度最大。
  - 当$\alpha \neq$ 1/2时，一个消息比另一个消息更可能出现，因此不确定度减小。
  - 若α 或 β等于0，则不确定度为0。

n 进制信源的熵

- 设：信源有n种可能出现的消息，并用P_i表示第i个消息的出现概率，则由熵的定义可以写出此信源的熵

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i$$

- 熵的最大值：

令上式对P_k的导数等于0，求H的最大值。

由于 $P_n = 1 - (P_1 + P_2 + \cdots + P_i + \cdots + P_{n-1})$

故当P_k变时， 可仅使P_n随之变化，并保持其他P_i为常数。

于是得到 $$\frac{dH}{dP_k} = \frac{d}{dP_k}(-P_k \log_2 P_k - P_n \log_2 P_n)$$

利用求导数公式 $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e \frac{du}{dx}$$

上式变为 $$\frac{dH}{dP_k} = -P_k \frac{1}{P_k}\log_2 e - \log_2 P_k + P_n \frac{1}{P_n}\log_2 e + \log_2 P_n$$

或 $$\frac{dH}{dP_k} = \log_2 \frac{P_n}{P_k}$$

令 $$\frac{dH}{dP_k} = \log_2 \frac{P_n}{P_k}$$

等于0，就可以求出H的最大值。

当$P_k = P_n$，上式等于0。由于P_k是任意一个消息的出现概率，所以有

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = \frac{1}{n}$$

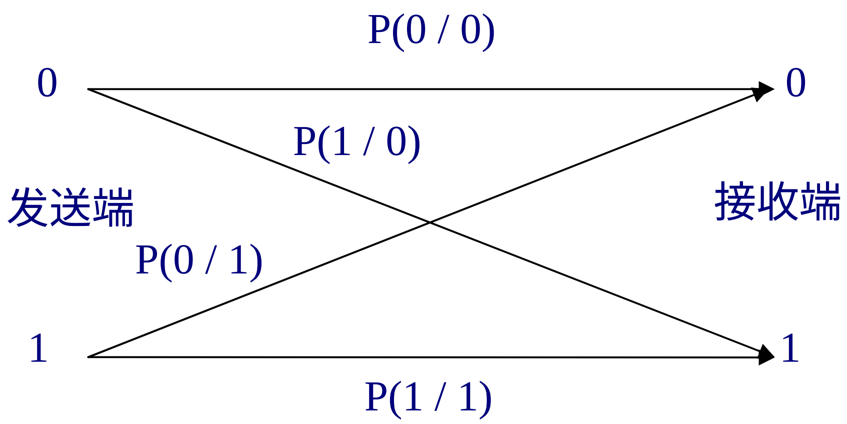
将上式代入 $H = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i$

得到H的最大值：$H = \log_2 n$

返回

离散信道模型

- 二进制无记忆编码信道的模型



- 信道的特性：由下列信道转移概率矩阵所完全确定

$$[P(Y/X)]=\begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{P(y_j/x_i)}$ 一 发送 $\boldsymbol{x_i}$，收到 $\boldsymbol{y_j}$ 的条件概率。

- 信道输入和输出概率关系

若输入概率矩阵为 $[P(X)]=[P(x_1) \quad P(x_2)]$

则由 $[P(Y)]=[P(X)]\ [P(Y/X)]$ 可以计算出 $[P(Y)]=[P(y_1) \quad P(y_2)]$

- 输入输出的联合概率矩阵$P(X, Y)$

将$[P(X)]$写成对角线形式： $[P(X)]=\begin{bmatrix} P(x_1) & 0 \\ 0 & P(x_2) \end{bmatrix}$

并与 $[P(Y/X)]=\begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix}$

相乘，得到联合概率矩阵$P(X, Y)$：

$$P(X,Y)=P(X)P(Y/X)=\begin{bmatrix} P(x_1) & 0 \\ 0 & P(x_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P(x_1)P(y_1/x_1) & P(x_1)P(y_2/x_1) \\ P(x_2)P(y_1/x_2) & P(x_2)P(y_2/x_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(x_1,y_1) & P(x_1,y_2) \\ P(x_2,y_1) & P(x_2,y_2) \end{bmatrix}$$

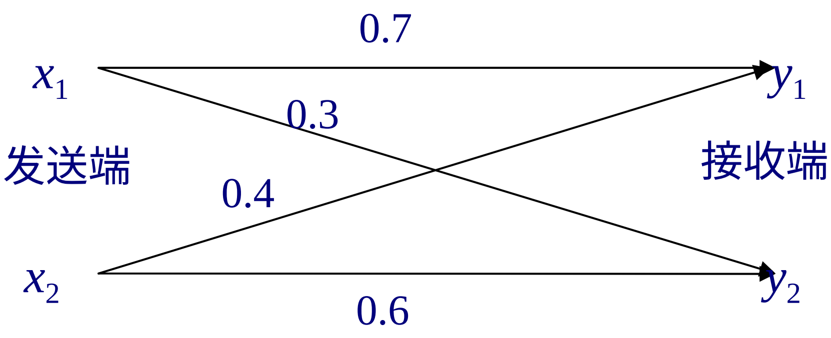
式中，

$P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j/x_i)$ — 发送 x_i 收到 y_j 的联合概率

- 例1：设有一个二进制信道，如图所示，

其转移矩阵为：

$$[P(Y/X)]=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$



若信道输入的概率为

$$P(x_1)=0.5 \quad 和 \quad P(x_2)=0.5$$

试求输出概率矩阵*P*(*Y*)和联合概率矩阵*P*(*X*, *Y*)。

[解] 输出概率矩阵:

$$P(Y)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.55 & 0.45\end{bmatrix}$$

联合概率矩阵:

$$[P(X,Y)]=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.35 & 0.15\\ 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

返回

返回

联合熵和条件熵

设：一信道有n个可能输入和m个可能输出，则可用输入概率$P(x_i)$，输出概率$P(y_j)$，转移概率$P(y_j/x_i)$和联合概率$P(x_i, y_j)$定义下列不同的熵函数：

- $$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i)$$ —信源的平均不确定度；
- $$H(Y) = -\sum_{i=1}^{m} P(y_j)\log_2 P(y_j)$$ —接收码元的平均不确定度；
- $$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 P(y_j/x_i)$$ —给定发送X后接收码元的平均不确定度；
- $$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 P(x_i/y_j)$$ —收到一个码元后发送码元的平均不确定度；
- $$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 P(x_i, y_j)$$ —整个通信系统的平均不确定度。
- 联合熵公式：$H(X,Y) = H(X/Y) + H(Y)$　$H(X,Y) = H(Y/X) + H(X)$

无噪声信道容量

- 互信息量 ***I* (*X*; *Y*)**
  - 定义：在收到发送码元后，此发送码元的平均不确定度的下降量 $I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$

式中， ***H*(*X*)** — 信源的平均不确定度；

***H*(*X* / *Y*)** — 收到一个码元后发送码元的平均不确定度

上式可以改写为

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

  - 性质： $I(X;Y)\geq 0$
- 信道容量***C***
  - 定义：互信息量的最大值

$$C=\max[I(X;Y)]$$ （b/码元）

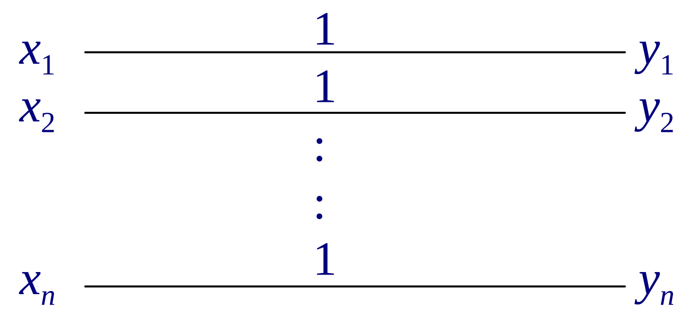
  - 性质：***C*** 仅是信道转移概率的函数；

C是一个码元能够传输的最大平均信息量。

- 例2：试求下图中的无噪声离散信道的容量。

【解】 由式

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$



无噪声离散信道

及式

$$H(X/Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i,y_j)\log_2 P(x_i/y_j)$$

可知，对于无噪声信道，

当 $i \neq j$ 时， $P(x_i, y_j) = 0$，$P(x_i / y_j) = 0$;

当 $i = j$ 时，$P(x_i / y_j) = 1$。

因此，$H(X / Y) = 0$，$I(X; Y) = H(X)$

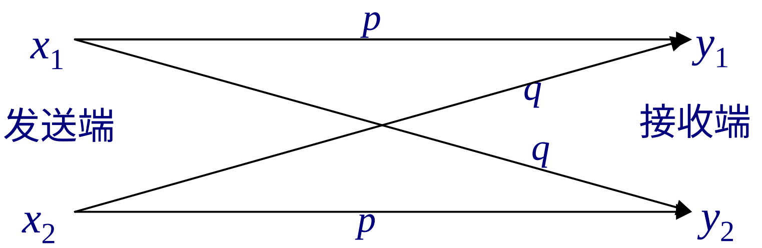
若信源中所有码元是等概率的，则信源的熵$H(X)$最大。

因此，

$$C=\max[I(X;Y)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2 n=\log_2 n$$

- 例3：试求图中二进制对称信道的容量。

其中$P(x_1)=\alpha$，$P(x_2)=1-\alpha$。



【解】根据信道容量的定义式，

需要求出

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

的最大值。

上式右端第二项为

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_i,y_j)\log_2 p(y_j/x_i)$$

将$P(x_1)=\alpha$，$P(x_2)=1-\alpha$和转移概率p, q代入上式，得出

$$H(Y/X)=-\alpha p\log_2 p-(1-\alpha)p\log_2 p-\alpha q\log_2 q-(1-\alpha)\log_2 q$$

上式可以化简为

$$H(Y/X)=-p\log_2 p-q\log_2 q$$

将上式代入 $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

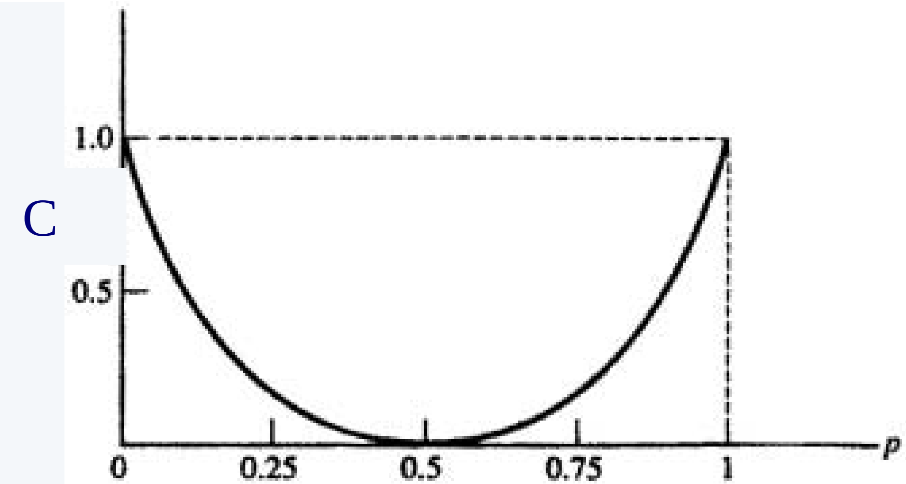
得到 $I(X;Y)=H(Y)+p\log_2 p+q\log_2 q$

$$I(X;Y)=H(Y)+p\log_2 p+q\log_2 q$$

当$H(Y)$为最大时，上式达到最大。$H(Y)$的最大值等于 1，故

$$C=\max[I(X;Y)]=1+p\log_2 p+q\log_2 q=1-H(p)$$

按照上式画出的曲线：



- 二进制对称信道的误码率P_e

$$P_e=\sum_{i=1}^{2}P(e/x_i)P(x_i)$$

式中，$P(e/x_i)$为给定输入x_i条件下的误码率，所以有

返回

$$P_e=qP(x_1)+qP(x_2)=q$$

上式表明无条件误码率P_e等于条件误码率$P(y_j/x_i)$，$i\neq j$。

信源编码

12.5.1无噪声信道编码原理

- 信源的信息速率R_s：

$$R_s = rH(X) \qquad (b/s)$$

式中， $H(X)$ — 信源的熵　（b/码元）；

r — 码元速率　（波特 = 码元/s）。

- 无噪声信道编码定理（香农第一定理）：

给定一个信道和一个信源，若此信源以小于信道容量C的速率R_s产生信息，则一定能够以某种方式对信源的输出编码，使得编码输出能够无差错地通过此信道传输；但是若信源输出速率R_s大于容量C，则不可能无差错地传输。

□ 例：

二进制信源 → 信源编码器 → 二进制信道 →

信源的码元速率：

r ＝ 3.5 码元/s

C = 1b/码元

S = 2 码元/s

SC = 2 b/s

- 设：有一个二进制信源，它有两个可能的输出*A*和*B*，

  $P(A) = 0.9, \quad P(B) = 0.1$

  信源输出的码元速率 $r = 3.5$ (码元/s)

  信道无误传输的码元速率 $S = 2$ (码元/s)

返回

则从例3可知，在$p = 1$时，信道容量 $C = 1$ （b / 码元）。

故现在信道的信息速率 = SC = 2 (b / s)

- 现在，$r > S$，所以信源的码元不能直接送入信道。
- 然而，信源的熵为 $H(X) = -0.1\log_2 0.1 - 0.9\log_2 0.9 = 0.469 \quad (b/码元)$

它相当于信源信息速率为 $rH(X) = 3.5(0.469) = 1.642 \quad (b/s)$

∵ 现在，信源的信息速率$rH(X)$ < 信道的信息速率SC，

∴ 有可能传输，但需要在传输之前作信源编码。

白色加性高斯噪声信道的容量

- 香农第二定理：给定一个容量为C_c的离散无记忆信道和一个正速率为R的信源，若 $R < C_c$，则必定有一种编码，当其足够长时，使信源的输出能以任意小的错误概率通过此信道传输。
- 对于白色加性高斯噪声的连续信道，它能够传输的最大信息速率由下式给出：

$$C_c = B\log_2(1+\frac{S}{N}) \qquad (b/s)$$

—— 香农-哈特莱(Shannon-Hartley)定律

式中， B — 信道带宽（Hz），

S/N — 信号噪声功率比。

C_c — 信道传输的最大信息速率 (b / s)。

- 容量C_c的特性

$$C_c = B\log_2(1+\frac{S}{N}) \qquad (b/s)$$

  - 保持C_c不变，带宽*B*和信噪比*S*/*N*可以交换。
  - 对于无噪声情况（S/N = ∞），只要带宽不为0，则容量C_c将是无穷大。
  - 在有噪声情况下，当$B \to \infty$时，C_c趋向于如下极限值：

$$\lim_{B\to\infty} C_c \approx 1.44\frac{S}{n_0} \qquad (b/s)$$

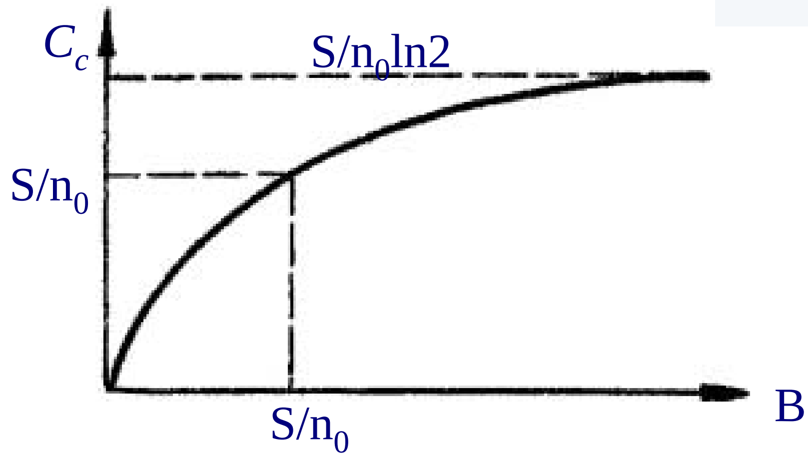
【证】令$x = S/n_0B$，代入 $\lim_{B\to\infty} C_c = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)$

得到 $$\lim_{B\to\infty} C_c = \lim_{B\to\infty}\frac{S}{n_0}\frac{Bn_0}{S}\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right) = \lim_{B\to\infty}\frac{S}{n_0}\log_2(1+x)^{1/x}$$

因为当$x \to \infty$时，$\ln(1+x)^{1/x} \to 1$，所以上式变为

$$\lim_{B\to\infty} C_c = \frac{S}{n_0\ln 2} \approx 1.44\frac{S}{n_0}$$

- C_c与B的关系：按照右式画出 $C_c = B\log_2(1+\frac{S}{N}) \qquad (b/s)$

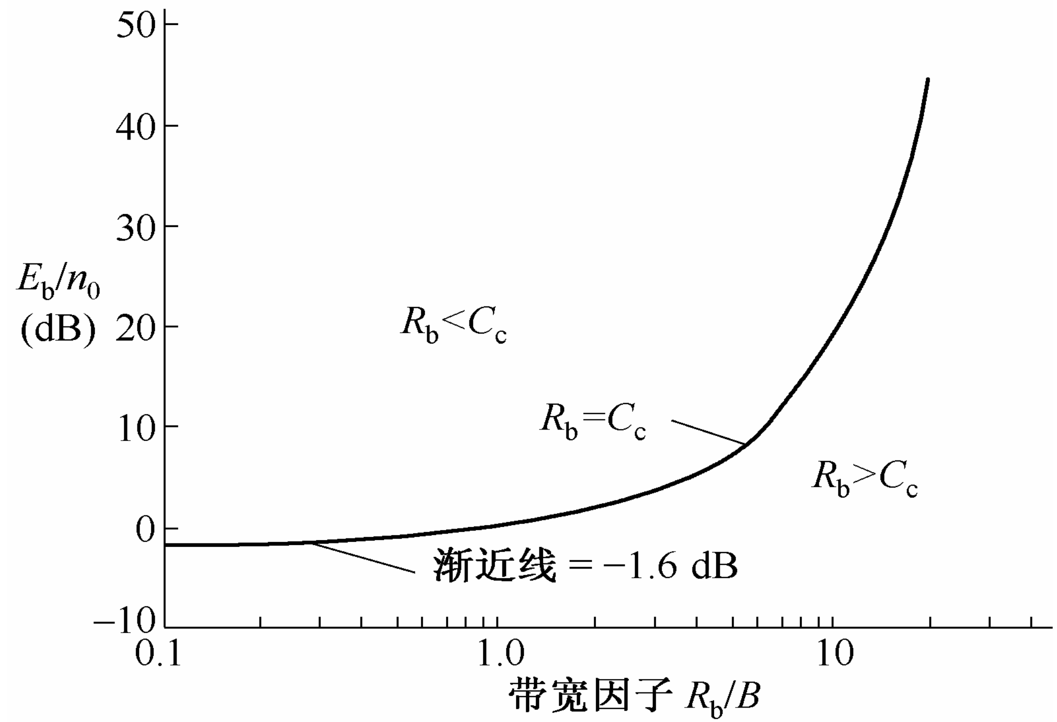


- C_c与E_b/n_0的关系：当以速率$R_b = C_c$ 传输时，
  码元能量：$E_b = ST_b = S/R_b = S/C_c$
  式中，$T_b = 1/C_c$ — 每比特的持续时间
  将上式代入式：
  得出当$B \to \infty$时，$\lim\limits_{B\to\infty} C_c = \frac{S}{n_0 \ln 2}$

$$C_c = \frac{1}{\ln 2}\frac{S}{n_0} = \frac{1}{\ln 2}\frac{E_b C_c}{n_0}$$ 或 $$\frac{E_b}{n_0} = \ln 2 \approx -1.6 \qquad dB$$

上式表明，对于$R_b = C_c$ 的理想情况，当$B \to \infty$时，仅需 $E_b/n_0 = -1.6$ dB就能实现无误传输。

- E_b/n_0与C_c/B的关系曲线：



  - 在$R_b < C_c$区域，能够得到任意小的错误概率（工作区）
  - 在$R_b > C_c$区域，不能使错误概率达到任意小
  - 若信源比特率R_b一定，且带宽B足够大，使$B>>R_b$，则仅需E_b/n_0略大于-1.6 dB就可以工作在$R_b < C_c$区域。—功率受限工作状态。
  - 若带宽受限制，使R_b>>B，则需要很大的E_b/n_0值才能工作在$R_b < C_c$区域。　　一带宽受限工作状态 。

□信噪比和带宽关系

- 设：原始信号的带宽为B_1，在以信噪比S_1/N_1传输时，其最大信息传输速率R_1为

$$R_1 = B_1 \log_2(1+\frac{S_1}{N_1})$$

将此信号调制（或）编码后，若仍保持原来的信息传输速率R_1，但是带宽变成B_2，所需信噪比变成S_2/N_2，则应有

$$R_1 = B_2 \log_2(1+\frac{S_2}{N_2})$$

将上两式合并，得到

$$B_1 \log_2(1+\frac{S_1}{N_1}) = B_2 \log_2(1+\frac{S_2}{N_2})$$

或

$$\left(1+\frac{S_1}{N_1}\right) = \left(1+\frac{S_2}{N_2}\right)^{B_2/B_1}$$

当信噪比很大时，上式变为

$$\left(\frac{S_1}{N_1}\right) = \left(\frac{S_2}{N_2}\right)^{B_2/B_1}$$

信噪比的改善和带宽比B_2/B_1成指数关系。

- 带宽B和比特能量E_b的关系

由香农-哈特莱定律公式

$$C_c = B\log_2(1+\frac{S}{N}) = B\log_2(1+\frac{E_b/T_b}{n_0 B}) = B\log_2(1+\frac{E_b}{n_0})$$

看出：因n_0可以认为是常数，所以增大带宽B，可以换取E_b的减小，即带宽和比特能量之间也同样有交换关系。

- 例4：设1帧黑白电视图像由30万个像素组成，每个像素能取10个亮度电平，并且这10个亮度电平是等概率出现的。若每秒发送25帧图像，要求图像信噪比达到30 dB，试求所需传输带宽。

【解】因为每个像素以等概率取10个可能电平，所以每个像素的信息量等于 $I_P = \log_2 10 = 3.32 \quad (b/pix)$

而每帧图像的信息量I_f等于 $I_f = 300,000 \times 3.32 = 996,000$

因为每秒有25帧图像，故要求信息传输速率为

$$996,000 \times 25 = 24,900,000 = 24.9 \times 10^6 \quad (b/s)$$

信道容量C_c必须不小于此值。由于要求信噪比为30 dB，故将这些数值代入式 $C_c = B\log_2(1+\frac{S}{N}) \quad (b/s)$

得出 $24.9 \times 10^6 = B\log_2(1+1000) \approx B\log_2 1000 = 9.96B$

即要求 $B = (24.9 \times 10^6)/9.96 = 2.5 \quad (MHz)$

返回