通信系统原理教程

第25讲 数字信号的最佳接收之三

通信教研室　杨春萍

本讲内容

- 数字信号的统计表述
- 数字信号的最佳接收准则
- 确知数字信号的最佳接收机
- 随相数字信号的最佳接收
- 起伏数字信号的最佳接收
- 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 数字信号的匹配滤波接收原理
- 最佳基带传输系统

数字信号的匹配滤波接收原理

8.8.1 数字信号的匹配滤波接收法

- 匹配滤波 － 用线性滤波器对接收信号滤波，使抽样时刻的输出信噪比最大。
- 设：$H(f)$ － 接收滤波器的传输函数；

  $h(t)$ － 接收滤波器的冲激响应；

  $s(t)$ － 接收信号；$S(f)$ － 接收信号的频谱密度；

  $n(t)$ － 高斯白噪声；

  $P_n(f) = n_0/2$ － 噪声双边功率谱密度;
- 若滤波器输入码元为 $x(t) = s(t) + n(t), \qquad 0 \le t \le T$

  则线性滤波器的输出为 $y(t) = s_o(t) + n_o(t)$

  式中，$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}df$
- 输出噪声功率：$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cdot \frac{n_0}{2}df = \frac{n_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$

- 在抽样时刻 t_0 上，输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_0 = \frac{|s_o(t_0)|^2}{N_o} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2}{\frac{n_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df}$$

- 求r_0的最大值 － 利用施瓦兹(Schwarz)不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

若 $f_1(x) = kf_2^*(x)$

成立（其中k为整数），则上式的等号成立。

令 $f_1(x) = H(f), \qquad f_2(x) = S(f)e^{j2\pi f t_0}$

则有

$$r_0 \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

当 $H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 时，上式的等号成立，r_0最大。

- $H(f)=kS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 给出最大信噪比r_0，它与信号频谱共轭匹配（除了常数因子外），故称之为匹配滤波器。
- 匹配滤波器的特性还可以用其冲激响应函数$h(t)$来描述：

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-\infty}^{\infty}kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}e^{j2\pi ft}df$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right]^*e^{-j2\pi f(t_0-t)}df$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi f(\tau-t_0+t)}df\right]s(\tau)d\tau$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\delta(\tau-t_0+t)d\tau=ks(t_0-t)$$

由上式可见，匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$就是信号$s(t)$的镜像$s(-t)$，但在时间轴上（向右）平移了t_0。

- 匹配滤波器应该是物理可实现的，即其$h(t)$应该满足条件：

$$h(t) = 0, \quad 当\ t < 0$$

即要求满足条件 $$s(t_0 - t) = 0, \quad 当\ t < 0$$

或满足条件 $$s(t) = 0, \quad 当\ t > t_0$$

- 上式的条件说明：滤波器输入信号码元$s(t)$在抽样时刻t_0之后必须为零。一般不希望在码元结束之后很久才抽样，故通常选择在码元末尾抽样，即选$t_0 = T$。故匹配滤波器的冲激响应可以写为 $h(t) = ks(T - t)$
- 这时，匹配滤波器输出信号码元的波形，可以写为

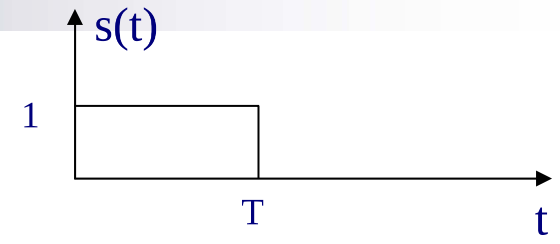
$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau = k\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(T-\tau)d\tau$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} s(-\tau')s(t-T-\tau')d\tau' = kR(t-T)$$

上式表明，匹配滤波器输波形是输入码元波形的自相关函数的k倍。

□【例8.1】设接收信号码元$s(t)$的表示式为

$$s(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T\\ 0, & 其他\,t\end{cases}$$

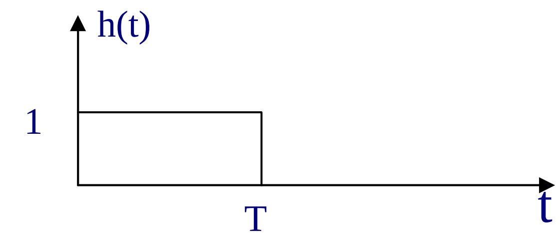


(a) 接收信号波形

试求其匹配滤波器的特性和输出信号码元的波形。

【解】$s(t)$的频谱为

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{j2\pi f}\left(1-e^{-j2\pi fT}\right)$$

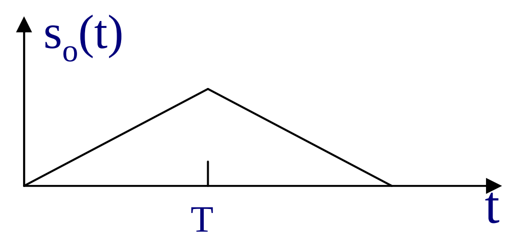


(b) 冲激响应

由式 $H(f)=kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$

令$k=1$，可得其匹配滤波器传输函数为

$$H(f)=\frac{1}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi fT}-1\right)e^{-j2\pi fT}$$



(c) 输出信号波形

由式 $h(t)=ks(t_0-t)$

令$k=1$，得到此匹配滤波器冲激响应为 $h(t)=s(T-t),\quad 0\le t\le T$

由 $s_o(t)=kR(t-T)$ 画出曲线如右。

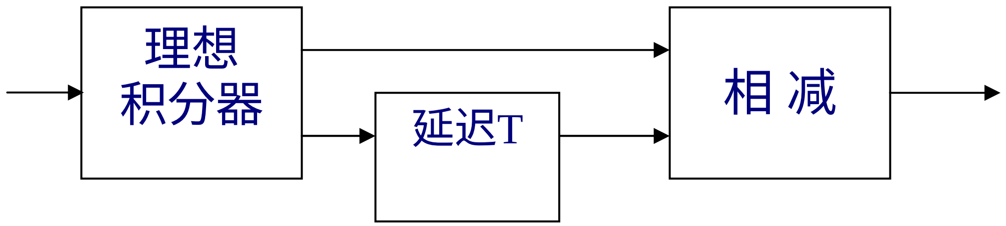
此匹配滤波器的方框图：由

$$H(f)=\frac{1}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi fT}-1\right)e^{-j2\pi fT}$$

∵(1 / j 2π *f*) － 是理想积分器的传输函数

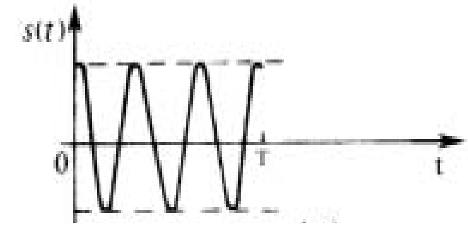
exp(-j 2π *f* *T*) － 是延迟时间为*T* 的延迟电路的传输函数

∴方框图如下：



【例8.2】 设接收信号s(t)的表示式为

$$s(t)=\begin{cases}\cos 2\pi f_0 t, & 0\le t\le T\\ 0, & 其他t\end{cases}$$



(a) 信号波形

试求其匹配滤波器的特性和输出信号码元的波形。

【解】∵s(t)的频谱密度为

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_0^T\cos 2\pi f_0 te^{-j2\pi ft}dt$$
$$=\frac{1-e^{-j2\pi(f-f_0)T}}{-j4\pi(f-f_0)}+\frac{1-e^{-j2\pi(f+f_0)T}}{-j4\pi(f+f_0)}$$

- 故其匹配滤波器的传输函数为

$$H(f)=S^*(f)e^{-j2\pi ft_0}=S^*(f)e^{-j2\pi fT}$$
$$=\frac{\left[e^{j2\pi(f-f_0)T}-1\right]e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f-f_0)}+\frac{\left[e^{j2\pi(f+f_0)T}-1\right]e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f+f_0)}$$

上式中，已令t_0 = T。

- 此匹配滤波器的冲激响应:

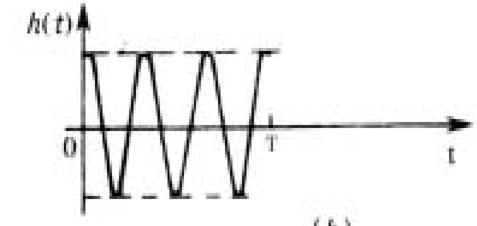
$$h(t) = s(T - t) = \cos 2\pi f_0 (T - t), \qquad 0 \le t \le T$$

为了便于画出波形图，令 $T = n / f_0$

式中，n = 正整数。这样，上式可以化简为

$$h(t) = \cos 2\pi f_0 t, \qquad 0 \le t \le T$$

$h(t)$的曲线示于右图。



(b) 冲激响应

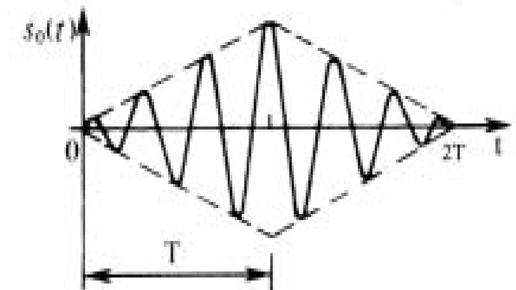
- 匹配滤波器输出波形可以由如下卷积公式求出

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

由于$s(t)$和$h(t)$在区间(0, T)外都等于零，故上式中的积分可以分为如下几段进行计算：$t < 0, \quad 0 \le t < T, \quad T \le t \le 2T, \quad t > 2T$

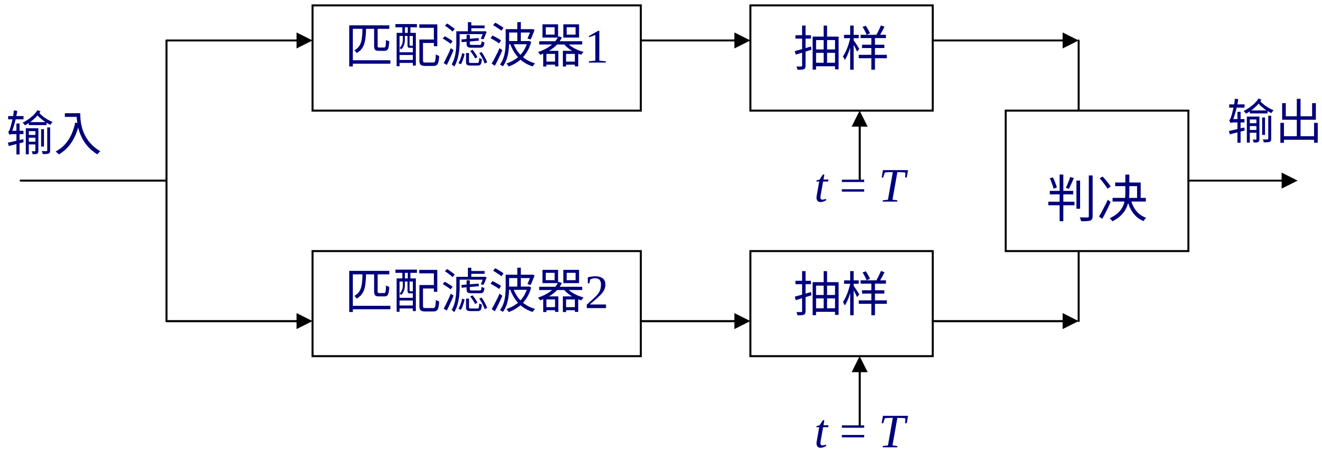
计算结果如下：

$$s_o(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \le t < T \\ \dfrac{2T - t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & T \le t \le 2T \\ 0, & \text{其他 } t \end{cases}$$



(c) 输出波形

□ 用匹配滤波器构成的接收电路方框图：



8.8.2 数字信号的相关接收法

- 设：匹配滤波器的冲激响应函数 $h(t) = ks(T - t)$

  匹配滤波器是物理可实现的：$h(t) = 0$，当 $t < 0$

  输入信号码元 $x(t)$ 限定在$(0, T)$

  则输出信号波形$y(t)$按照式 $s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$

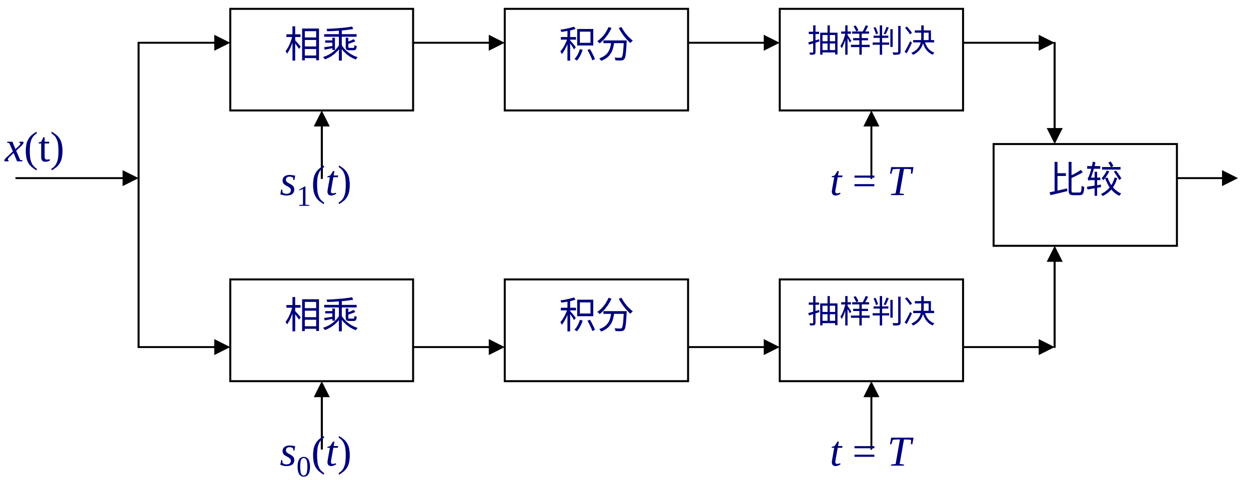
  可以写成：$y(t) = k\int_{t-T}^{t} x(u)s(T - t + u)du$

  在抽样时刻T，输出电压等于：$y(T) = k\int_{0}^{T} x(u)s(u)du$

  可以看出，上式中的积分是一种相关运算，即将输入$x(t)$与和$s(t)$作相关运算。只有输入信号$x(t) = s(t)$时，在时刻$t = T$才有最大的输出信噪比。

- 按照上述原理，可以得出相关接收法。

相关接收法方框图



相关接收法判决准则：

若 $\int_0^T x(u)s_1(u)du > \int_0^T x(u)s_0(u)du,$ 则判为收到 s_1

若 $\int_0^T x(u)s_1(u)du < \int_0^T x(u)s_0(u)du,$ 则判为收到 s_0

【例8.3】设有一个信号码元如例8.2中所给出的*s(t)*。试比较它分别通过匹配滤波器和相关接收器时的输出波形。

【解】根据 $y(T) = k\int_0^T x(u)s(u)du$

此信号码元通过相关接收器后，输出信号波形等于

$$y(t) = \int_0^t s(t)s(t)dt = \int_0^t \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 t dt = \int_0^t \cos^2 2\pi f_0 t dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t (1+\cos 4\pi f_0 t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8\pi f_0}\sin 4\pi f_0 t \approx \frac{t}{2}$$

上式中，假定f_0很大，故结果近似等于$t/2$，即与 t 成正比。

输出波形：

只有当 $t = T$ 时，

两者的抽样值才相等。

返回

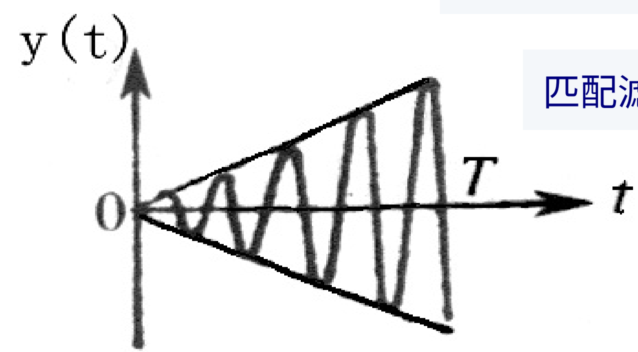
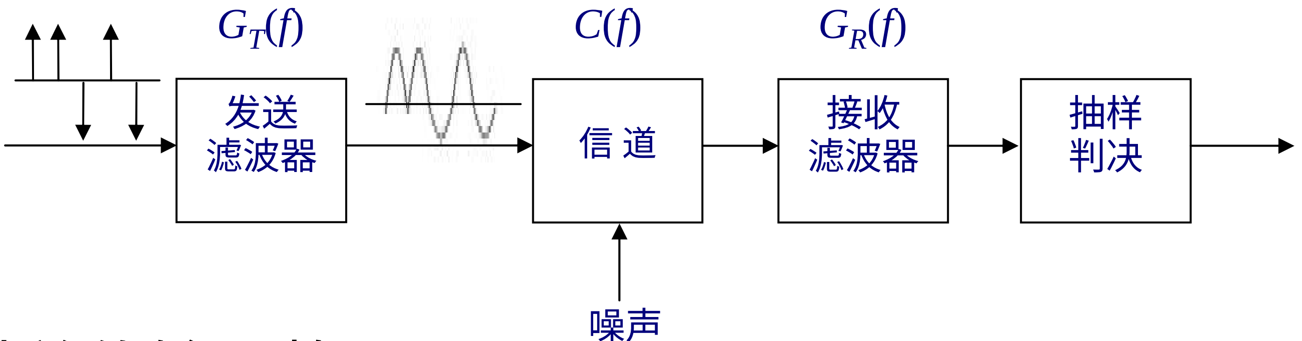


图8.8.6 匹配滤波和相关接收比较

最佳基带传输系统

- 基带传输系统



- 基带总传输函数：$H(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R(f)$

  式中， $G_T(f)$ － 发送滤波器的传输函数；

  $G_R(f)$ － 接收滤波器的传输函数；

  $C(f)$ － 信道的传输函数。

- 假设：信道具有理想特性，即假设$C(f) = 1$。于是有

$$H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$$

- 待解决的问题：如何设计$G_T(f)$和$G_R(f)$，使系统在加性白色高斯噪声条件下误码率最小。

用匹配滤波法接收时：

- 信号频谱 $S(f)$ = 发送滤波器的传输特性 $G_T(f)$
- 匹配滤波器的传输特性 $G_R(f)$ 应当是信号频谱 $S(f)$ 的复共轭:

$$G_R(f) = G_T^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

- ∵ $G_T(f) = H(f)/G_R(f)$　　$G_T^*(f) = H^*(f)/G_R^*(f)$

∴ $G_R(f)G_R^*(f) = H^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$

即，$|G_R(f)|^2 = H^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 或写成 $|G_R(f)|^2 = |H(f)|$

最后得到要求接收匹配滤波器满足的条件为

$$|G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

由于上式没有限定接收滤波器的相位条件，所以可以选为

$$G_R(f) = H^{1/2}(f)$$

由式 $G_T(f) = H(f)/G_R(f)$

得到发送滤波器的传输特性为 $G_T(f) = H^{1/2}(f)$

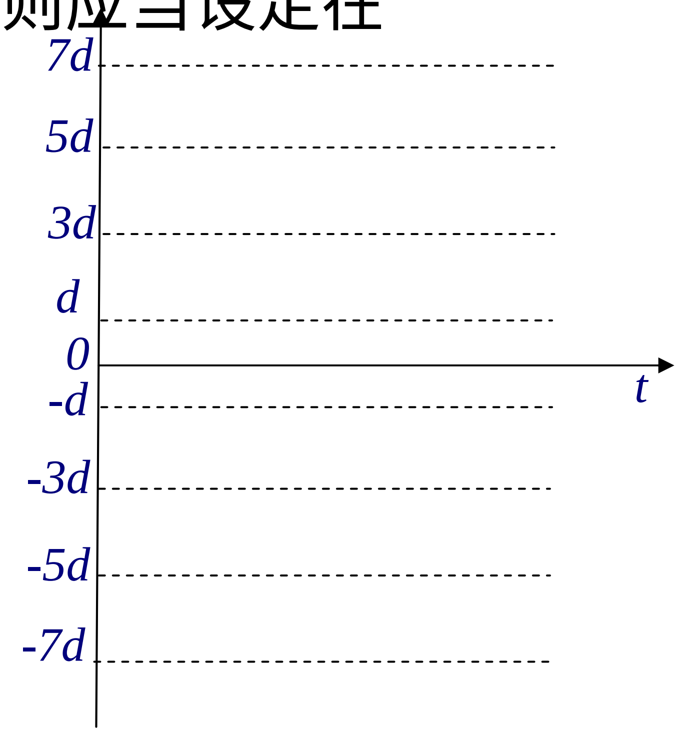
□ 最佳系统的误码率性能

- 设：基带码元为*M*进制多电平信号，即码元有*M*种电平：

$$\pm d,\ \pm 3d,\ \cdots,\ \pm (M-1)d$$

- 在接收端，判决电路的判决门限值则应当设定在

$$0,\ \pm 2d,\ \pm 4d,\ \cdots,\ \pm (M-2)d$$



- 错误概率：$P_e = \left(1 - \dfrac{1}{M}\right) P\left(\left|\xi\right| > d\right)$

  式中，ξ是噪声的抽样值，而

  $$P\left(\left|\xi\right| > d\right)$$

  是噪声抽样值大于*d*的概率。

- 将 $P\left(\left|\xi\right| > d\right)$

  计算结果，代入P_e公式，得到

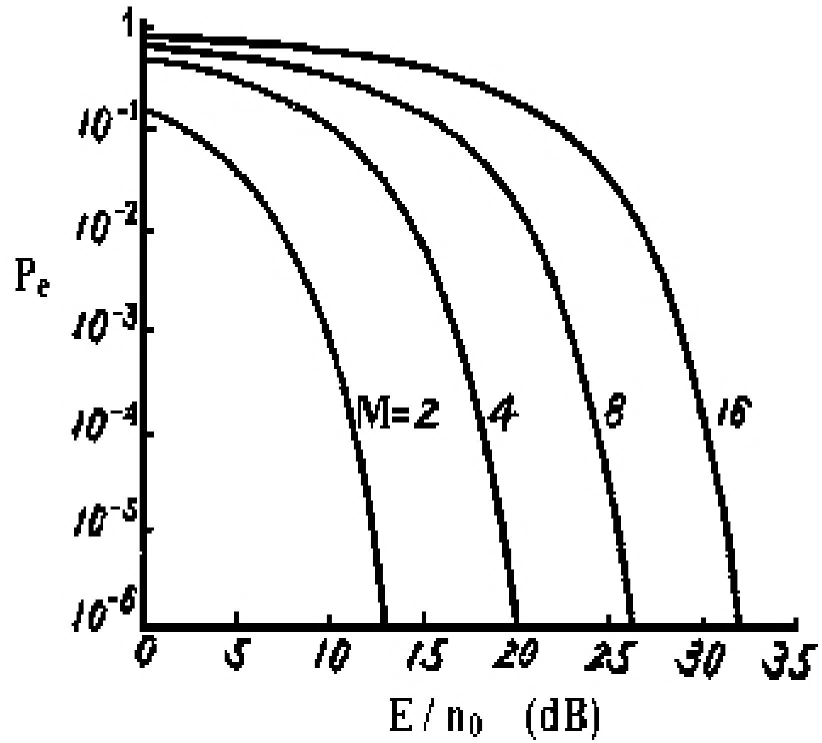
  误码率最终表示式为

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) erfc\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) erfc\left[\left(\frac{3}{M^2 - 1} \cdot \frac{E}{n_0}\right)^{1/2}\right]$$

- 当M＝2时，$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{E/n_0}\right)$

返回

- 上式是在理想信道中，消除码间串扰条件下，二进制双极性基带信号传输的最佳误码率。
- 误码率曲线：



由此图可见，当误码率较低时，为保持误码率不变，若M值增大到2倍，信噪比大约需要增大7 dB。