

考试科目: \_\_\_\_\_ (826) 信号处理与系统 \_\_\_\_\_ 共 2 页

★★★★ 答题一律做在答题纸上, 做在试卷上无效。★★★★

注意: 本试卷中,  $u(t)$  和  $u[n]$  分别为连续和离散时间单位阶跃信号;  $\delta(t)$  和  $\delta[n]$  分别为连续和离散时间单位冲激信号。

一、(30 分)

一线性常系数微分方程为:

$$y''(t) - \alpha y'(t) - \beta y(t) = \gamma x(t) + x(t)$$

其中  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  均为常数。

(a) 设该方程表示一因果线性时不变系统的输入输出关系。已知: 当  $t \geq 0_-$ , 输入信号

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \text{ 时, 系统的全响应为 } y(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} - 4e^{-3t} \quad (t \geq 0_-)。$$

(i) 确定  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$ , 及初始条件  $y(0_-) = I_0$  和  $y'(0_-) = I_1$  的值; (10 分)

(ii) 求系统的零输入和零状态响应; (10 分)

(b) 由(a)部分所得上述方程中的系数, 求该微分方程在  $x(t) = e^{-4t}u(t)$  时的全解。 (10 分)

二、(20 分)

(a) 已知  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(j\omega)$ , 试用  $X(j\omega)$  表示信号  $y(t) = \int_{-\infty}^{\alpha-\beta t} x(\tau)d\tau$  的傅里叶变换, 其中  $\alpha, \beta$  均为常数, 且  $\beta \neq 0$ 。 (10 分)

(b)  $y[n]$  是一系统在输入为  $x[n]$  时的输出。设  $X(e^{j\Omega})$  和  $Y(e^{j\Omega})$  分别为  $x[n]$  和  $y[n]$  的 DTFT, 且满足:

$$Y(e^{j\Omega}) = 3X(e^{j\Omega}) + e^{-j2\Omega}X(e^{j\Omega}) + \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

(i) 该系统是 LTI 吗? 给出理由; (5 分)

(ii) 求出该系统的时域输入-输出关系。 (5 分)

三、(30 分)

设  $y(t)$  为一个 LTI 系统在输入为  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  下的输出, 其中  $x_1(t)$  是固定但未知的。已知: (i) 当  $x_2(t) = u(t)$  时,  $y(t) = 4e^{-3t}u(t)$ ; (ii) 当  $x_2(t) = -2u(t)$  时,  $y(t) = e^{-3t}u(t) - 3u(t)$ 。

(a) 确定该系统的单位冲激响应  $h(t)$ ; (10 分)

(b) 求出当系统在输入为  $x_1(t)$  下的输出; (10 分)

(c) 确定所有可能的  $x_1(t)$ 。 (10 分)



四、(30分)

(a) 设  $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4})$ , 计算该信号的离散时间傅里叶级数(DTFS)系数; (10分)

(b) 设  $x_0(t)$  为任意信号, 证明: 对任意常数  $T_0 > 0$ , 信号  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0)$  是周期的; (5分)

(c) 令  $x_0(t) = e^{-t}u(t)$ 。有一个 LTI 系统, 其频率响应为

$$H(j\omega) = e^{-j2\omega} [u(\omega + 1.5\omega_0) - u(\omega - 1.5\omega_0)], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

求(b)部分  $x(t)$  输入至该 LTI 系统时的输出信号  $y(t)$ 。 (15分)

五、(20分)

图-1 所示为一个抽样恢复系统:

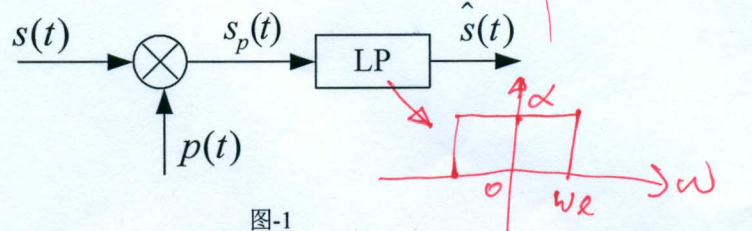


图-1

其中,  $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s)$ , LP 是一个带宽为  $\omega_c$ , 幅度为  $\alpha$  的理想低通滤波器。设  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  为频谱分别限制于  $\omega_1$  和  $2\omega_1$  的低频信号。试就下列情况分别确定满足  $\hat{s}(t) = s(t)$  的 LP 系统的频率响应。

(a)  $s(t) = x_1(t) + 2x_2(2t)$ ;  $\rightarrow$  (10分)

(b)  $s(t) = x_1(t)x_2(t)$ 。 (10分)

六、(20分)

(a) 设  $p$  为任意实数,  $\alpha$  为任意复数且  $\alpha^*$  为其复共轭。证明

$$F(z) = \frac{z^p(1 - \alpha^*z)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

为全通滤波器。 (10分)

(b) 如果一个滤波器  $G(z)$  的零极点均在单位圆  $|z|=1$  内, 则该滤波器称为最小相位系统。已知

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} - 6z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

求一个二阶最小相位滤波器  $H_{\min}(z)$ , 使得  $|H(e^{j\Omega})| = |H_{\min}(e^{j\Omega})|, \forall \Omega$ 。 (10分)