本章主要内容:

（1）傅立叶级数及周期信号频谱特点;
（2）傅立叶变换的概念;
（3）DFT的概念及其公式推导;
（4）频谱混迭现象及采样定理;
（5）时域有限化和频谱泄漏;
（6）抑制频谱泄漏、栅栏效应的措施
（7）DFT参数选择。

概 述

信号的频谱分析是揭示信号在频域特征的信号分析方法。

理论依据：由法国工程师傅立叶于1807年提出的，后人称为傅立叶分析理论。

6.1　傅立叶级数

6.1.1 傅立叶级数的基本思想

任一周期函数（信号）都可由基波及与基波频率成整数倍的幅值不同的三角函数合成，称之为傅立叶级数。

对非周期函数，若是时限的，则将函数以其持续时间为周期，对信号进行周期延拓，变成周期信号后，可用傅立叶级数展开。

6.1.2 傅里叶级数的数学基础

设 $y(t)$ 为一周期信号并满足狄里赫利条件，则可用傅立叶级数展开，展开形式分实数（三角函数）形式和复数形式。

(1)傅立叶级数的三角函数形式

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\omega_1 t+b_m\sin m\omega_1 t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(\omega_m t+\varphi_m)$$

$A_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2}$ 信号中的 m 次谐波分量的幅值;

$\varphi_m=\arctan(b_m/a_m)$ 信号中的 m 次谐波分量的初相角;

$A_m=A_m(\omega_m)$ 称为幅频谱;

$\varphi_m=\varphi_m(\omega_m)$ 称为相频

（2）傅立叶级数的复数形式

$$y(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{j\omega_m t}$$

式中 $c_m=\frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j\omega_m t}dt$ 为傅里叶级数系数，也称频谱系数。记为

$$Y(m\omega_1)=\frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j\omega_m t}dt$$

6.1.3 周期信号的频谱特点

（1） 离散性

（2） 谐波性

（3） 收敛性

6.2 傅立叶变换和非周期信号频谱

（1）由傅立叶级数推导出傅立叶变换公式

$$T \longrightarrow \infty \qquad \Delta f \longrightarrow 0$$

（2）非周期信号频谱的特点

离散谱 ⟶ *连续谱*

6.3 离散傅里叶变换（DFT）

6.3.1 基本概念

离散傅立叶变换是傅立叶变换CFT经过*时域和频域有限化和离散化*处理后导出的计算机系统分析信号频谱的公式。它实际来源于CFT。

6.3.2 离散傅立叶变换式的推导

在理解对信号在时域上*离散化和有限化*处理过程的基础上，加深对*采样定理、频谱泄漏、栅栏效应*等物理概念的理解，从而掌握对信号进行频谱分析时，各主要参数的选择方法。

先将CFT的正、逆公式合写为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt] e^{j2\pi ft} df \qquad (1)$$

对信号在时域上进行离散化:

$$t \to n \cdot T_S \qquad (n = 0, 1, \cdots N-1)$$

采样的长度是有限的，信号长度为:

$$L = (N-1) \cdot T_S \approx N \cdot T_S$$

频域上离散化:

$$f \to k \cdot \Delta f \qquad (k = 0, 1 \cdots N-1)$$

显然输出最高频率为:

$$F_S = (N-1) \cdot \Delta f \approx N \cdot \Delta f$$

其它:

$$dt \to T_s \qquad df \to \Delta f \qquad \int \to \sum_{k=0}^{N-1}$$

代入(1)式中得:

$$y(n,T_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{n=0}^{N-1} y(n \cdot T_S)e^{-j2\pi nk/N}]e^{j2\pi nk/N}$$

得正、逆离散傅立叶变换式:

DFT:

$$Y_K = Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cdot e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cdot W_N^{nk} \qquad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

IDFT:

$$y_n = y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} Y(k)\cdot e^{j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} Y(K)\cdot W_N^{-nk} \qquad (n = 0,1,\cdots N-1)$$

思考

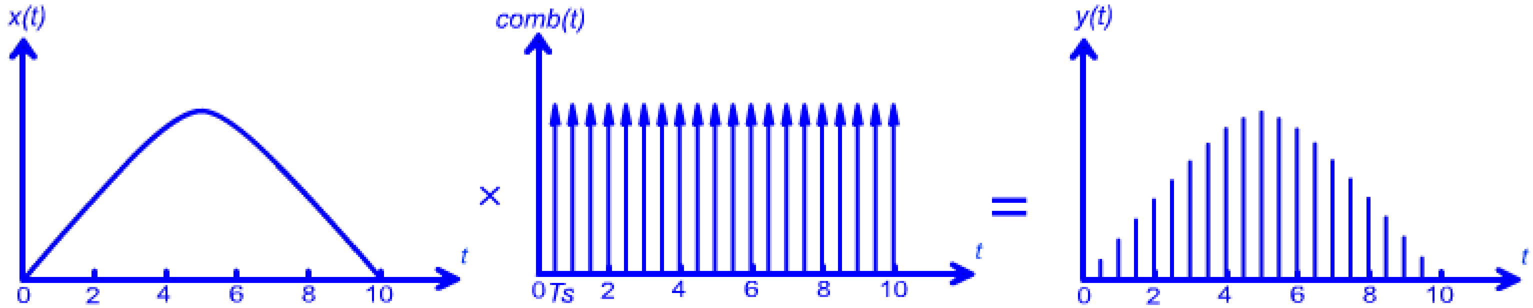
（1）原连续信号在时域离散化后所得信号与原信号的频谱是否一致？都相应发生那些变化？ *采样周期如何选择？*

（2）对信号进行时域有限化处理后所得信号频谱会发生那些变化？

采样长度L如何选择？

6.4 频谱混迭与采样定理

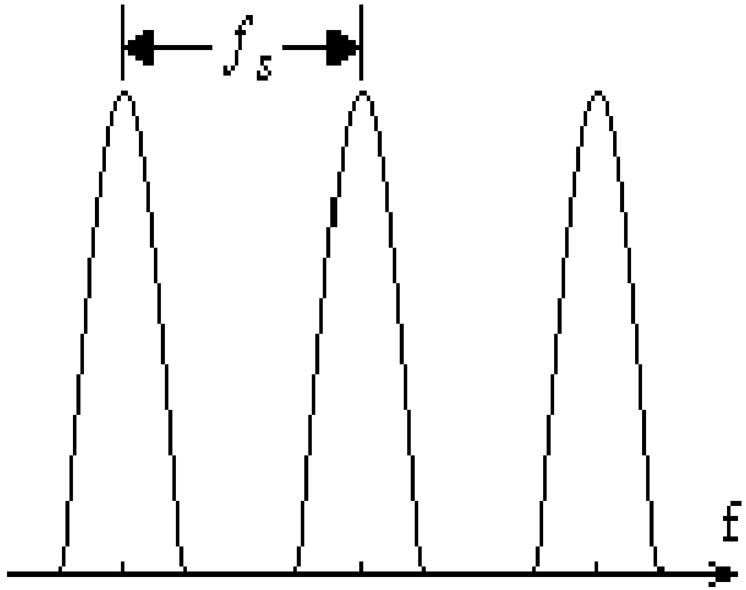
6.4.1 频谱混迭



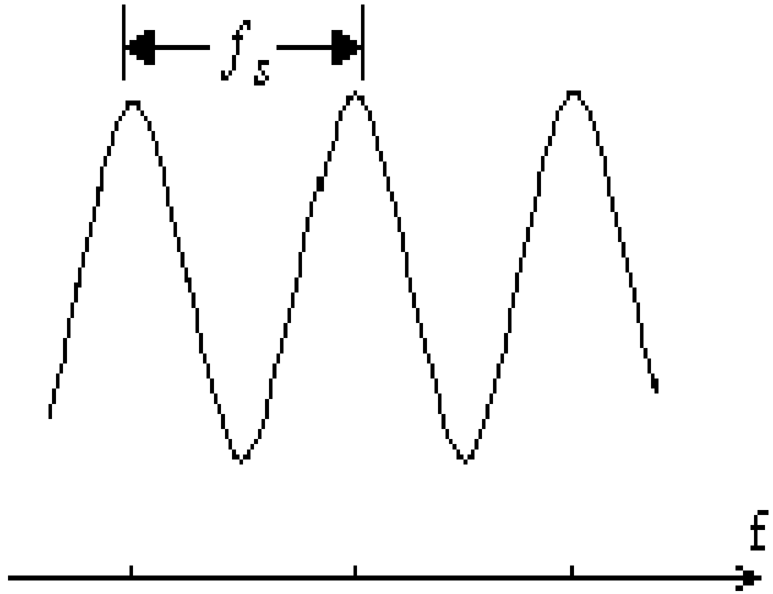
$$y(t)=comb(t)\cdot x(t)$$

$$Y(f)=comb(f)*X(f)$$

频谱为原信号频谱的周期延拓，延拓周期为采样频率的倒数。



（a）无混叠象（ $f_s \geq 2F_{\max}$ ）



（b）频谱混叠（ $f_s < 2F_{\max}$ ）

香农采样定理

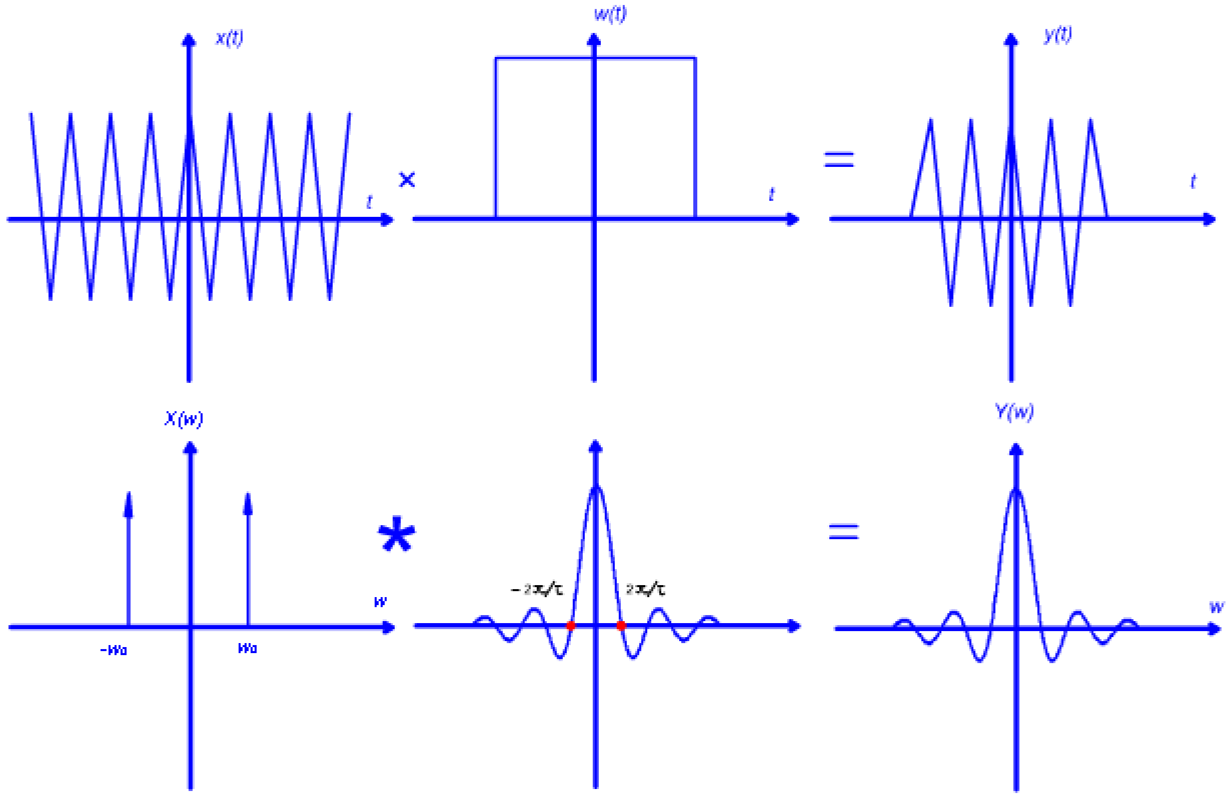
（1）信号经采样后，其频谱为原信号频谱的周期延拓，延拓的周期为$1/T_S$，且在幅值上为原信号频谱幅值的$1/T_S$倍。

（2）若连续信号的最高频率为F_{max}则当$f_S < 2F_{max}$时，频域波形会产生混叠。

6.5 时域有限化与频谱泄漏

6.5.1 频谱泄漏产生的原因

以余弦信号为例，说明对一个非时限信号进行有限化处理所引起的泄漏问题。



对余弦信号有限化得到信号的频谱为中心频率分别在 $\pm\omega_0$ 处的两个sinc函数的叠加。

- 截短（有限化处理），就等于将该序列乘以一个矩形窗:

$$y(t) = w(t)\cos(\omega_0 t)$$

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

- 利用欧拉公式，可进一步表示为:

$$y(t) = \frac{w(t)}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

- 根据频移特性可得:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

频谱泄漏所带来的问题

（1）频域曲线产生很多“皱纹”，*频率分量增加;*

（2）如信号为两幅值一大一小频率很接近的余弦波形合成，当其中一个小幅值余弦波的主瓣落入大幅值余弦波的第一负旁瓣内时，其主瓣将被“*吞没*”。因而会产生*分析误差;*

频谱泄漏现象的实验演示

6.5.2 抑制频谱泄漏的措施

（1）选择采样长度为信号周期的整数倍;

（2）选择合适的窗函数;

理想情况：窗函数频谱的主瓣宽度约小，旁瓣衰减越快越好;

（3）加长采样长度;

6.6 栅栏效应

（1）DFT 输出谱线的间隔;

$$\Delta f = \frac{1}{L} = \frac{1}{N \times Ts}$$

L — 采样长度; N — 采样点数; T_S — 采样周期

（2）L过小，使得输出谱线间隔过大;

（3）抑制措施：增大采样长度L;

6.7 DFT 参数选择原则

（1）根据采样定理选择采样周期T_s

（2）根据频谱分辨力的要求选择采样长度L:

$$L = N \times T_S$$

（3）若是周期信号，调节L使其为信号周期的整数倍

（4）使采样点数N 满足2的幂次方，以实现FFT运算;

例 题

信号 $x(t)$ 由三个正弦组成，其频率分别是 $f_1 = 2Hz$ $f_2 = 2.02Hz$ $f_3 = 2.08Hz$ 即：$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t)$ 用DFT分析信号频谱，试确定相关参数。

解：为使不发生频谱混叠，根据采样定理得：

$$f_s \geq 2 \times 2.08 = 4.16Hz$$

选定 f_s = 10Hz，即 T_s = 0.1s 进行采样。欲分辨出三个频率，则频谱分辨率必须满足：

$$\Delta f \leq (2.02 - 2) = 0.02Hz$$

于是采样长度最小为:

$$L \geq \frac{1}{\Delta f} = 50s$$

采样点数 N 即为:

$$N = L \times f_s = 50 \times 10 = 500$$

为了能应用FFT算法，采样点数 N 可选为512。

本章小结

（1）DFT的概念及其公式推导;

（2）频谱混迭现象及采样定理;

（3）时域有限化和频谱泄漏;

（4）抑制频谱泄漏、栅栏效应的措施

（5）DFT参数选择。