第八章　含耦合电感和理想变压器的电路分析

本章学习耦合电感元件和理想变压器元件，它们属于多端元件。实际电路中，如收音机、电视机中使用的中周、振荡线圈，整流电路中使用的变压器等都是耦合电感元件与变压器元件。

§8－1 耦合电感的伏安关系

一、磁链和电感量

当 L 通过 i 产生磁通 j，对 N 匝线圈产生的磁链为：$y = Nj$，定义自电感：$L = \frac{y}{i} = N\frac{j}{i}$。

关联条件下，电感两端的电压：$u = N\frac{dj}{dt} = \frac{dy}{dt} = L\frac{di}{dt}$

二、互感：见 P.195 图 8－1

1．若线圈 1 中通以变化电流 i_1：

j_{11}：自感磁通；j_{21}：互感磁通(耦合磁通)

一般地，$j_{11} \ge j_{21}$。当 $j_{11} = j_{21}$，全耦合。

自感磁链：$y_{11} = N_1 j_{11} \quad \Rightarrow L_1 = \frac{y_{11}}{i_1}$ ~自感量

互感磁链：$y_{21} = N_2 j_{21} \quad \Rightarrow M_{21} = \frac{y_{21}}{i_1}$ ~互感量

2．若圈 2 中通以变化的电流 i_2：

j_{22}：自感磁通；j_{12}：互感磁通(耦合磁通)

一般地，$j_{22} \ge j_{12}$。当 $j_{22} = j_{12}$，全耦合。

自感磁链：$y_{22} = N_2 j_{22} \quad \Rightarrow L_2 = \frac{y_{22}}{i_2}$ ~自感量

互感磁链：$y_{12} = N_1 j_{12} \quad \Rightarrow M_{12} = \frac{y_{12}}{i_2}$ ~互感量

通过电磁场理论可以证明：$M_{12} = M_{21} = M \ge 0$

3．互感电压的产生

当线圈 1 通变化的电流 i_1，在线圈 2 产生互感磁链 y_{21}，从而产生感应电压，称为互感电压，记作：u_{21}。

$$u_{21} = \frac{dy_{21}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

u_{21} 与 y_{21} 之间符合右手螺旋法则。

同理，当线圈 2 通电流，在线圈 1 产生互感磁链 y_{12}，从而产生感

应电压，称为互感电压，记作：u_{12}。

$$u_{12}=\frac{d\psi_{12}}{dt}=M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

u_{12}与ψ_{12}之间符合右手螺旋法则。

注意：1) u_{12}、u_{21}的实际方向与两线圈的绕向有关；

2) 若感应线圈两端接上负载，将有电流流过。

三、耦合系数

由于互感磁通只是总磁通的一部分，互感磁通与自感磁通的比值<1。两线圈靠得越近，k就越接近于1。一般用$\frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}}$和$\frac{\varphi_{12}}{\varphi_{22}}$的几何平均值表征这一耦合程度，称为耦合系数$k$。

$$k=\sqrt{\frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}}\cdot\frac{\varphi_{12}}{\varphi_{22}}}=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$ (推导见 P.196)

$$\psi_{11}=L_1i_1\ ,\quad \psi_{21}=Mi_1;\quad \psi_{22}=L_2i_2\ ,\quad \psi_{12}=Mi_2$$

∴ $$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\le 1$$

当$k=1$时，称为全耦合；当$k=0$时，称为无耦合。

一般地：传输功率或信号(或变压器)，K 值越大越好；仪表间的磁场干扰，K值越小越好，必要时要加以屏蔽。

四、互感电压

对于两个相耦合的线圈，一个线圈的电流发生变化，将在另一线圈上产生感应电压，互感电压的大小为：

$$u_{21}=M\frac{di_1}{dt}\ ,\quad u_{12}=M\frac{di_2}{dt}$$

由于互感磁通与自感磁通有彼此加强或削弱两种情况，因此在同一线圈上的互感电压与自感电压可能彼此相加，也可能彼此相减。这与两个线圈的相对绕向、位置和电流参考方向有关。

当两个施感电流同时作用：$\begin{cases}u_1=u_{11}\pm u_{12}\\ u_2=u_{22}\pm u_{21}\end{cases}$

1、u_{21}与φ_{21}“关联方向”时：P.196 图 8－2A

有：

$$u_1=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2=L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

2、u_{12}与j_{12}“非关联方向”时：

有：
$$u_{21} = -M\frac{di_1}{dt}$$
$$u_{12} = -M\frac{di_2}{dt}$$

上式为
$$\begin{cases} u_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = -M\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

可见，列写 VAR 时，需要考虑 M 前的正负号。为简化分析(用原模型分析不方便，往往不知道线圈的绕向)，需要引入“同名端”的概念。

五、互感线圈的同名端

若两线圈分别加上变化的电流i_1及i_2： P. 197 图 8－2B

1) 当电流i_1和i_2分别从 1、2 端流入：图(a)

线圈 1 的磁通 $j_1 = j_{11} + j_{12}$

线圈 2 的磁通 $j_2 = j_{21} + j_{22}$

2) 当电流i_1和i_2分别从 1、$2'$端流入：图(c)

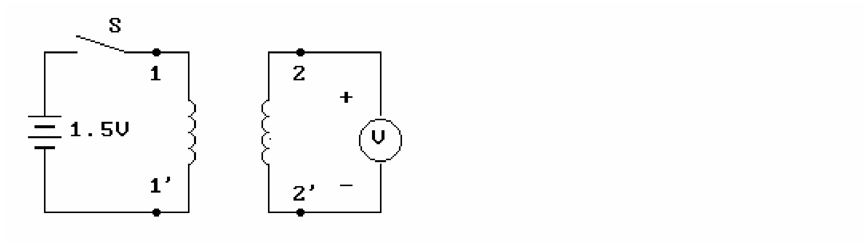
线圈 1 的磁通 $j_1 = j_{11} - j_{12}$

线圈 2 的磁通 $j_2 = j_{22} - j_{21}$

显然：当电流从 1 与 2 端(或$1'$与$2'$)流入时，产生的磁通相互增强；而当电流从 1 与$2'$端(或$1'$与 2)同时流入，产生的磁通相互削弱。为此，我们将 1 与 2 或$1'$与$2'$称为同名端，用“※”、“•”、“★”或“△”表示，而将 1 与$2'$、$1'$与 2 称为异名端。

同名端的判定：

方法一：“直流法”。

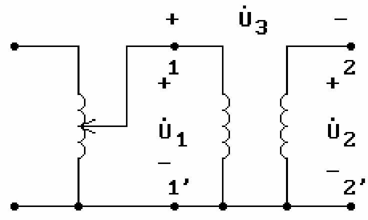


当 S 合上瞬间，电压表 V

1) 上正下负(正偏转) $\Rightarrow$ 1 与 2 为同名端

2) 上负下正(反偏转) $\Rightarrow$ 1 与$2'$为同名端

方法二：“交流法”。

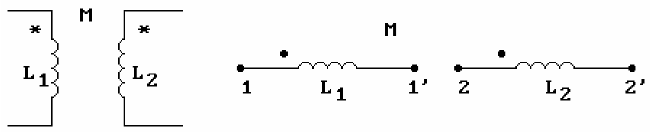


∵ $\dot{U}_3=\dot{U}_1-\dot{U}_2$

∴ **当有效值**$U_3\approx|U_1-U_2|\Rightarrow 1$**与** 2 **为同名端**

当有效值$U_3\approx U_1+U_2\Rightarrow 1$**与**$2'$**为同名端**

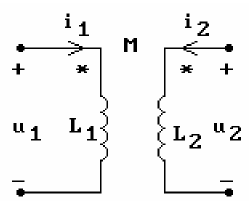
▲ 耦合电感(互感)的电路符号

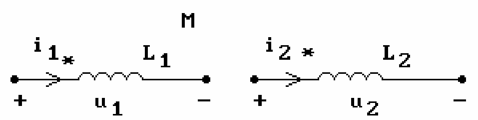


▲ 互感电压前的“＋”、“－”号的问题

当u_1**与**i_1**，**u_2**与**i_2**取关联方向，且两施感电流对同名端方向一致时，**M**前取“＋”号，反之取“－”号。**

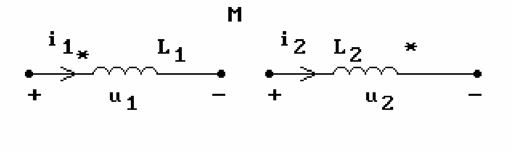
如：





$$\begin{cases}u_1=L_1\dfrac{di_1}{dt}+M\dfrac{di_2}{dt}\\ u_2=L_2\dfrac{di_2}{dt}+M\dfrac{di_1}{dt}\end{cases}$$

又如：



$$\begin{cases} u_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

若i_1，i_2**均为正弦量**，$i_1 \to \dot{I}_1$，$i_2 \to \dot{I}_2$

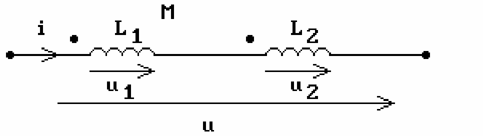
则
$$\left.\begin{aligned} u_1 \to \dot{U}_1 &= jwL_1\dot{I}_1 \pm jwM\dot{I}_2 \\ u_2 \to \dot{U}_2 &= jwL_2\dot{I}_2 \pm jwM\dot{I}_1 \end{aligned}\right\}$$

这里在$\dot{U}$**和**$\dot{I}$**参考方向关联下**，$\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$**同流入(出)同名端时**，M **前取"＋"，反之取"－"**。($wM = X_M$，**称为互感抗**)

六、互感线圈的串并联

1．**串联**

1) **顺接**



$$\begin{cases} u_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

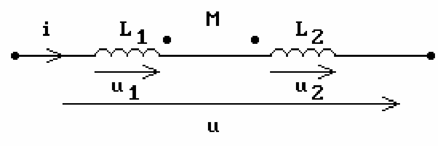
∴ $$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt} = L_{顺}\frac{di}{dt}$$

∴ **等效电感**$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M$

在正弦电路中

$$\dot{U}_1 = j(X_{L1} + X_M)\dot{I} = j(wL_1 + wM)\dot{I}$$
$$\dot{U}_2 = j(X_{L2} + X_M)\dot{I} = j(wL_2 + wM)\dot{I}$$
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = jw(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_M)\dot{I}$$

2) **反接**



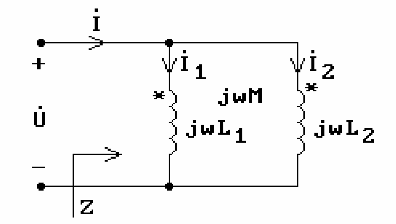
$$\begin{cases} u_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

∴ $u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2 - 2M)\dfrac{di}{dt} = L_{反}\dfrac{di}{dt}$

∴ **等效电感** $L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$

2、**并联**

1) **同侧(同名端相联)**

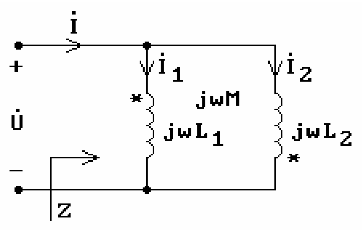


$$\begin{cases} \dot{U} = jwL_1\dot{I}_1 + jwM\dot{I}_2 \\ \dot{U} = jwL_2\dot{I}_2 + jwM\dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

∴ $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = jw\dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

∴ **等效电感** $L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

2) **异侧(异名端相联)**



$$\begin{cases} \dot{U} = jwL_1\dot{I}_1 - jwM\dot{I}_2 \\ \dot{U} = jwL_2\dot{I}_2 - jwM\dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

∴ $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = jw\dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

∴ 等效电感 $L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

总之，当两互感线圈并联时，等效电感：$L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$(**同侧取**“－”，**异侧取**“＋”)。

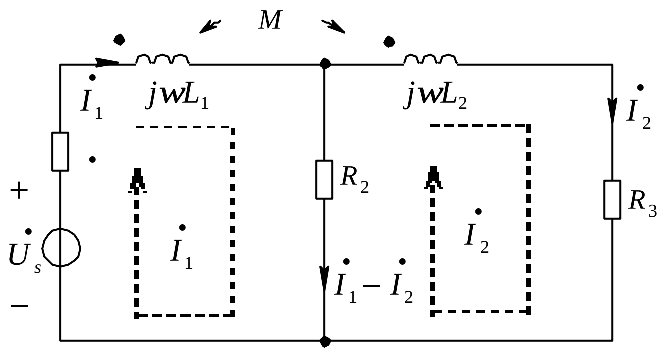
作业：P. 217　　8－1

§8－2　含耦合电感元件电路的计算方法

对于耦合电感上的电压计算，不但要考虑自感电压，还应考虑互感电压，所以含耦合电感电路的分析有它一定的特殊性。

一、含耦合电感电路的基本计算方法

图示电路中，L_1**与**L_2**间有互感**M**，求：**$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$。



L_1**上的互感电压大小为：** $\dot{U}_{M1}=jwM\dot{I}_2$

同理 $\dot{U}_{M2}=jwM\dot{I}_1$

对回路 1 **和** 2 **列** KVL **方程：**

$$\begin{cases}R_1\dot{I}_1+jwL_1\dot{I}_1+jwM\dot{I}_2+R_2(\dot{I}_1-\dot{I}_2)=\dot{U}_s\\R_2(\dot{I}_2-\dot{I}_1)+jwL_2\dot{I}_2+jwM\dot{I}_1+R_3\dot{I}_2=0\end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases}(R_1+R_2+jwL_1)\dot{I}_1-(R_2-jwM)\dot{I}_2=\dot{U}_s\\-(R_2-jwM)\dot{I}_1+(R_2+R_3+jwL_2)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

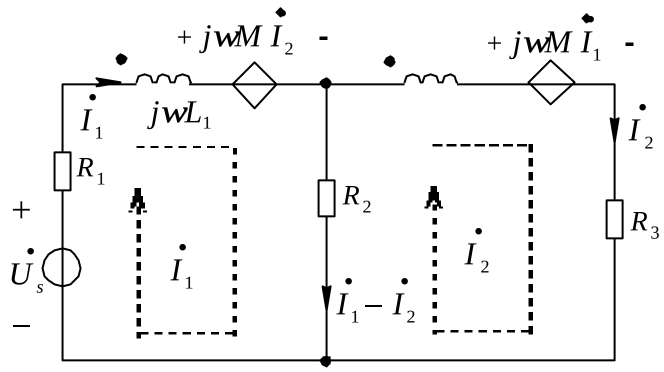
可以解出 $\dot{I}_1$**和**$\dot{I}_2$。

缺点：按上法容易漏 jwM **一项，或搞错前面的**“＋”、“－”**号。**

二、把互感电压作为受控源的计算方法

在正弦稳态分析时，可以把各互感电压作为受控源看待，<u>并在正确标定其极性后</u>，用正弦稳态分析方法进行分析。

总结：P.201 **中的划线。**



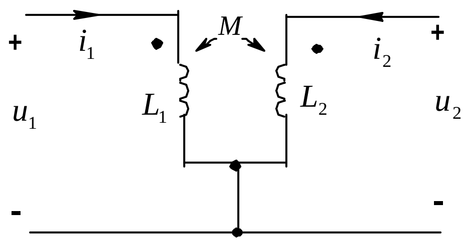
$$\begin{cases}(R_1+R_2+j\omega L_1)\dot{I}_1-R_2\dot{I}_2=\dot{U}_s-j\omega M\dot{I}_2\\-R_1\dot{I}_1+(R_2+R_3+j\omega L_2)\dot{I}_2=-j\omega M\dot{I}_1\end{cases}$$

即:

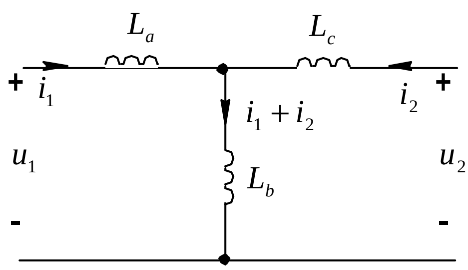
$$\begin{cases}(R_1+R_2+j\omega L_1)\dot{I}_1-(R_2-j\omega M)\dot{I}_2=\dot{U}_s\\-(R_2-j\omega M)\dot{I}_1+(R_2+R_3+j\omega L_2)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

这与前面方法的结果完全一样。

三、耦合电感的去耦等效电路(互感消去法)



(A)



(B)

当两耦合电感有一对公共端时(图 A)，**可以用三个无耦合的电感组成的** T **形网络来做等效替换，如图** B。

对 A **图**:

$$\begin{cases}u_1=L_1\dfrac{di_1}{dt}+M\dfrac{di_2}{dt}\\u_2=M\dfrac{di_1}{dt}+L_2\dfrac{di_2}{dt}\end{cases}\qquad(1)$$

而在图 B **中**:

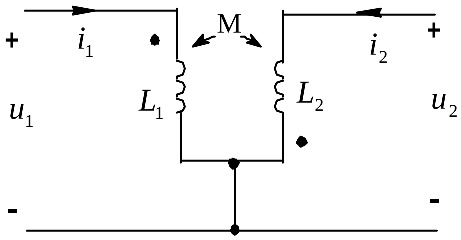
$$\begin{cases}u_1=L_a\dfrac{di_1}{dt}+L_b\dfrac{di_2}{dt}=(L_a+L_b)\dfrac{di_1}{dt}+L_b\dfrac{di_2}{dt}\\u_2=L_b\dfrac{di_1}{dt}+(L_b+L_c)\dfrac{di_2}{dt}\end{cases}\qquad(2)$$

根据等效电路的概念可知,应使(1)**式与**(2)**式两式前面的系数分别**

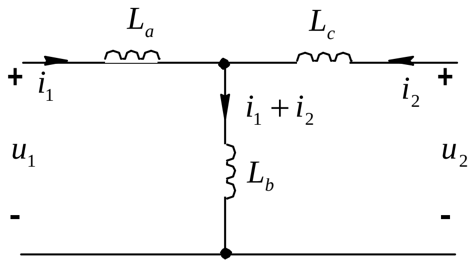
相等，即：

$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_b \\ M = L_b \\ L_2 = L_b + L_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = M \\ L_c = L_2 - M \end{cases}$$

上图 A 为公共点为同名端的耦合电感。如果公共端为异名端，如下图 C 所示，其去耦等效电路如图 D。



(C)

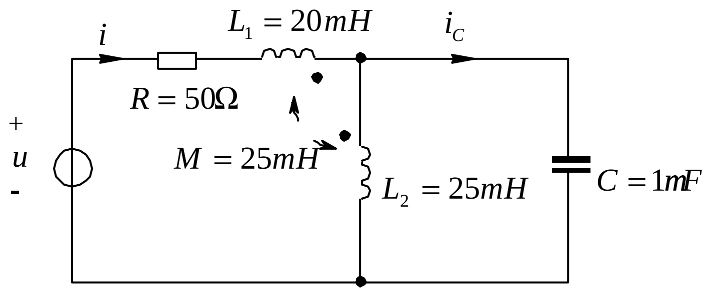


(D)

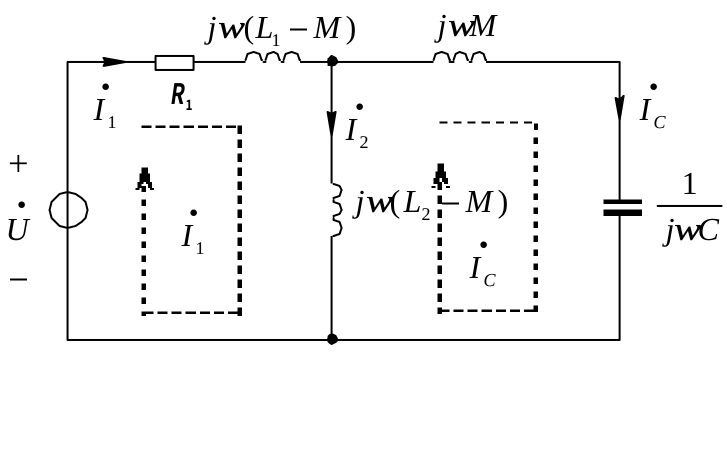
$$\begin{cases} L_a = L_1 + M \\ L_b = -M \\ L_c = L_2 + M \end{cases}$$

举例：

例： $u = 5000\sqrt{2}\cos 10^4 t \quad V$，**求各支路电流。**



解：去耦等效电路如下图：



$$\begin{cases}[R_1+jw(L_1-M)+jw(L_2-M)]\dot{I}_1-jw(L_2-M)\dot{I}_c=\dot{U}\\-jw(L_2-M)\dot{I}_1+[jw(L_2-M)+j(wM-\dfrac{1}{wC})]\dot{I}_c=0\end{cases}$$

得： $\dot{I}_c=0$

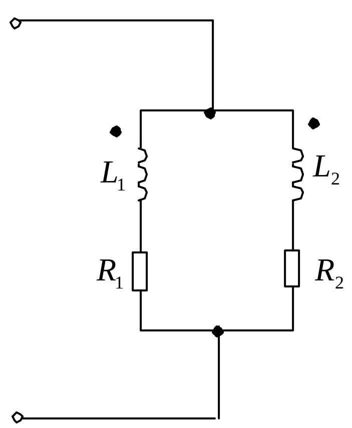
$\dot{I}_1=11.04\angle-83.6°\ A$

或用戴维南定理求(略)。

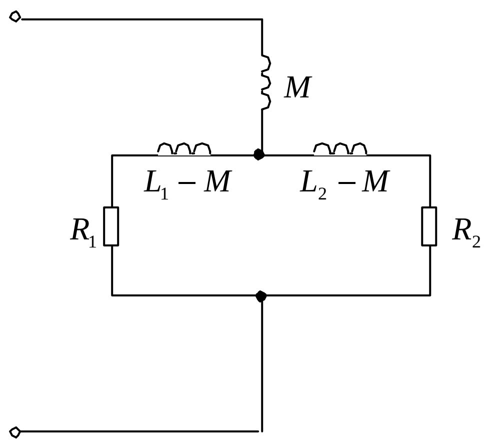
例：求图 a **电路的输入阻抗。**

利用互感消去法，可得图 b **所示去耦等效电路。这样，可根据一般混联的电路计算方法求得该电路的输入阻抗为：**

$$Z_i=jwM+\frac{[R_1+jw(L_1-M)]\times[R_2+jw(L_2-M)]}{R_1+R_2+jw(L_1+L_2-2M)}$$



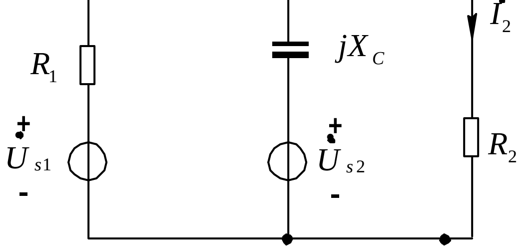
(a)



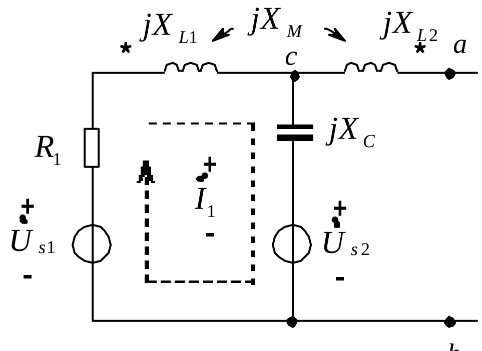
(b)

耦合线圈(即耦合电感)一般用L_1**、**L_2**和** M **来表征。分析含耦合电感元件电路时，必须考虑互感电压，故使用网孔电流法比较方便。对于有公共端钮的耦合电感常用去耦等效电路，把一个有互感的电路转化为一般无互感的电路来分析。**

例：图示电路，$\dot{U}_{s1}=12\angle0°V$， $\dot{U}_{s2}=10\angle53.1°V$， $R_1=4\Omega$， $R_2=5\Omega$， $X_c=-3\Omega$， $X_{L1}=6\Omega$， $X_{L2}=6\Omega$， $X_M=2\Omega$。**求流经**R_2**的电流**$\dot{I}_2$。



(a)



(*b*)

解：用戴维南定理，先求 a、b 处的开路电压，如图 b。

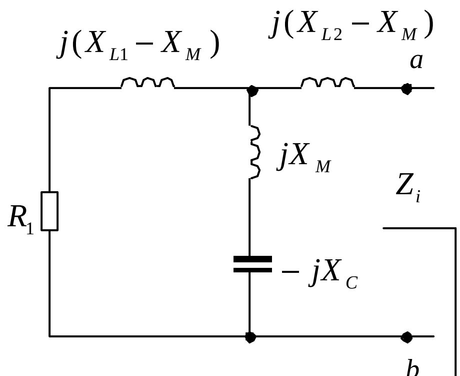
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_{s1}-\dot{U}_{s2}}{R_1+jX_{L1}+jX_c}=\frac{12\angle 0^\circ-10\angle 53.1^\circ}{4+j6-j3}$$

$$=\frac{12-(6+j8)}{4+j3}=-j2=2\angle -90^\circ\ \text{A}$$

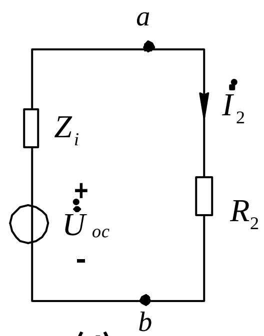
$$\dot{U}_{oc}=jX_M\dot{I}_1+jX_c\dot{I}_1+\dot{U}_{s2}=j2\times 2\angle -90^\circ-j3\times 2\angle -90^\circ+10\angle 53.1^\circ$$

$$=4+j8=8.94\angle 63.43^\circ\quad \text{V}$$

再求 ab 端口的入端阻抗。如果两互感线圈无公共节点，则必须用“加电压求电流”(端口激励——响应)的方法，本例两互感线圈有公共节点，采用互感消去法要简捷得多，去耦电路如下：



(*c*)



(*d*)

$$Z_i=j(X_{L2}-X_M)+\frac{[R_1+j(X_{L1}-X_M)](jX_M+jX_c)}{R_1+j(X_{L1}-X_M)+jX_M+jX_c}$$

$$=j4+\frac{(4+j4)(-j)}{4+j3}=0.16+j2.88\Omega$$

戴维南等效电路如图 d

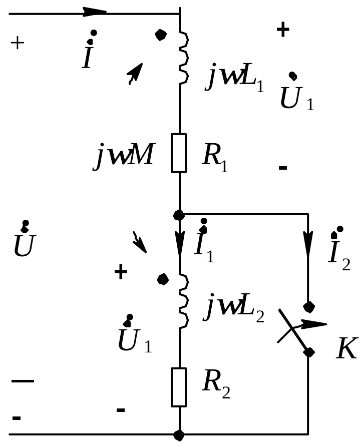
$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i+R_2}=\frac{8.94\angle 64.43^\circ}{0.16+j2.88+5}=1.51\angle 34.25^\circ\quad \text{A}$$

应当指出，在应用戴维南定理求解含互感的电路时，不可将有互感的两线圈分开，如本例中不能将(a)图中的 cb 处将网络分割开

来。

例：P. 218　 8－6

例：已知：$R_1=3\Omega$，$R_2=5\Omega$，$wL_1=7.5\Omega$，$wL_2=12.5\Omega$，$wM=6\Omega$，$\dot{U}=50\angle 0°V$。**求** K **打开和闭合时的** $\dot{I}$。



解：1) K **打开时，两个线圈顺接，故有**：

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R_1+R_2+jw(L_1+L_2+2M)}=\frac{50\angle 0°}{3+5+j(7.5+12.5+6)}=1.52\angle-75.96°\ \text{A}$$

2) K **闭合时**：
$$\begin{cases}\dot{U}=(R_1+jwL_1)\dot{I}+jwM\dot{I}_1\\ jwM\dot{I}+(R_2+jwL_2)\dot{I}_1=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\frac{\dot{U}}{(R_1+jwL_1)-\dfrac{(jwM)^2}{R_2+jwL_2}}=7.79\angle-51.50°\quad \text{A}$$

$$\dot{I}_1=3.47\angle 150.30°\ \ \text{A}$$

本题也可用互感消去法(课后练习)。

作业：P. 218　8－8、**思考** 8－9。

§8—3 空芯变压器电路的分析

一、空心变压器的结构与特点

1. **结构**：空心变压器是由两个绕在非铁磁材料制成的芯子上并具有互感的线圈组成。它没有铁心变压器产生的各种损耗，常用于高频电路。

2. **特点**：其耦合系数较小，属于松耦合。

二、分析方法

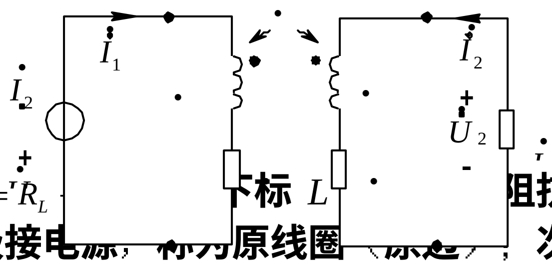
1、 支路法、网孔法。

2、 当两线圈“完全隔离时”，可加一根电流为“0”的线，再用互感消去法。如 P.208 例 8－7(2)。

3、反映阻抗法。

三、空心变压器电路的分析

空心变压器的电路如图：



这里：$Z_L = R_L +$ 下标 L 阻抗，并不表示副线圈的感抗。初级接电源，称为原线圈（原边），次级接负载，称为副线圈（副边）。

工作原理：经初、次级线圈间的耦合，能量由电源传递给负载，负载不直接与电源相连。

原边回路阻抗：$Z_{11} = R_1 + jwL_1$

副边回路阻抗：$Z_{22} = R_{22} + jX_{22} = R_2 + jwL_2 + Z_L = (R_2 + R_L) + j(wL_2 + X_L)$

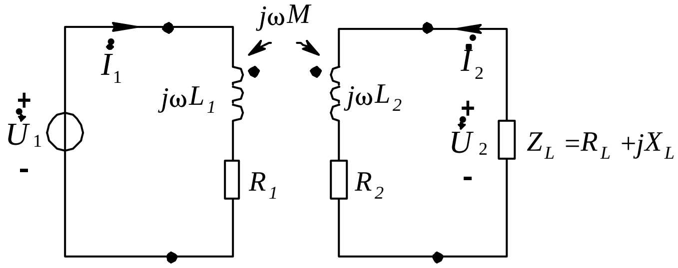
互感阻抗：$Z_M = jwM = jX_M$

列回路方程：
$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ Z_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

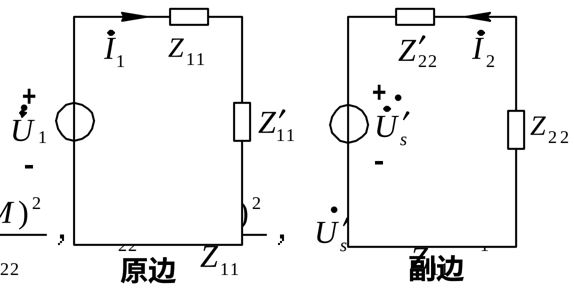
联立求解得：

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_{22}\dot{U}_1}{Z_{11}Z_{22} + (wM)^2} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + \dfrac{(wM)^2}{Z_{22}}}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{Z_M\dot{U}_1}{Z_{11}Z_{22} + (wM)^2} = -\frac{\dfrac{Z_M}{Z_{11}}\dot{U}_1}{Z_{22} + \dfrac{(wM)^2}{Z_{11}}}$$



于是有等效电路：



其中：$Z'_{11}=\frac{(wM)^2}{Z_{22}}$，　Z_{11} ，$\dot U'_s$

结论：

1、　次级回路接负载后对初级回路的影响相当于在初级回路中串联阻抗$\frac{w^2M^2}{Z_{22}}$。令$Z'_{11}=\frac{(wM)^2}{Z_{22}}$，称为次级回路阻抗在初级回路中的反映阻抗。

$$Z'_{11}=\frac{(wM)^2}{R_{22}+jX_{22}}=\frac{w^2M^2}{|Z_{22}|^2}(R_{22}-jX_{22})=\frac{w^2M^2}{|Z_{22}|^2}R_{22}-j\frac{w^2M^2}{|Z_{22}|^2}X_{22}=R'_{11}+jX'_{11}$$

其中：$R'_{11}=\frac{w^2M^2}{|Z_{22}|^2}R_{22}$，　$X'_{11}=-\frac{w^2M^2}{|Z_{22}|^2}X_{22}$ 分别为次级回路阻抗在初级回路中的反映电阻和反映电抗。次级回路的电阻反映到初级回路仍为电阻，R'_{11} 必为正；次级回路的电抗反映到初级回路仍为电抗，但符号相反，即：如果次级回路为感抗，反映到初级回路为容抗；如果次级回路为容抗，反映到初级回路为感抗(容感互变)。P. 206

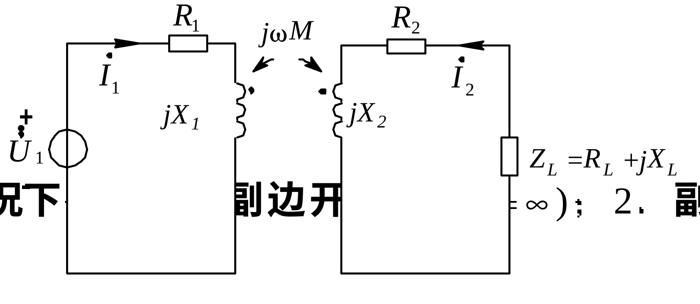
2、　在图示参考方向下，由于次级回路为$\dot I_2=-\frac{\frac{Z_M\dot U_1}{Z_{11}}}{Z_{22}+\frac{(wM)^2}{Z_{11}}}$，所以在计算次级电流$\dot I_2$时，初级电流产生的互感电压可以用一个等效电压源来替代。如图 8－17(c)，其等效电源电压为：

$$\dot U'_s=-\frac{Z_M}{Z_{11}}\dot U_1=-\frac{jwM}{Z_{11}}\dot U_1$$

在次级回路增加了一个阻抗$Z'_{22}=\frac{(wM)^2}{Z_{11}}$，称为初级回路阻抗在次级回路内的反映阻抗，它相当于等效电源内阻抗。

★ 建立了反映阻抗的概念，空心变压器的计算可对初级、次级回路分别计算，而不必建立方程联立求解。

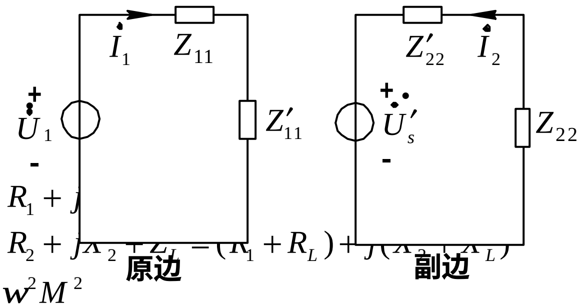
例：



在下列情况下　副边开　∞)；2．副边短路(即

$Z_L = 0$)；3．**副边接电容** C。**求原边线圈的输入阻抗** Z_i。

解：**原、副边等效电路如下**：



图中：$Z_{11} = R_1 + jX_1$

$$Z_{22} = R_2 + jX_2 + Z_L = (R_1 + R_L) + j(X_2 + X_L)$$

$$Z'_{11} = \frac{w^2M^2}{Z_{22}}$$

1．**当** $Z_L = \infty$，**则** $Z_{22} = \infty$。 $\therefore\ Z'_{11} = \frac{w^2M^2}{Z_{22}} = 0$

$Z_i = Z_{11} = R_1 + jX_1$，**即副边开路对原边阻抗大小无影响**。

2．**当** $Z_L = 0$，**则** $Z_{22} = R_2 + jX_2$。

$$Z'_{11} = \frac{w^2M^2}{Z_{22}} = \frac{w^2M^2}{R^2+X^2}R_2 - j\frac{w^2M^2}{R^2+X^2}X_2$$

$$\therefore\ Z_i = Z_{11} + Z'_{11} = [R_1 + \frac{w^2M^2R_2}{R^2+X^2}] + j[X_1 - \frac{w^2M^2X_2}{R^2+X^2}]$$

3．**当** $Z_L = -j\frac{1}{wC}$，$Z_{22} = R_2 + jX_2 - j\frac{1}{wC} = R_2 + j(X_2 - \frac{1}{wC})$

$$Z_i = \left[R_1 + \underbrace{\frac{w^2M^2R_2}{R_2^2+X_2^2}}_{R'_1}\right] + j\left[X_1 - \underbrace{\frac{\left(X_2 - \frac{1}{wC}\right)w^2M^2}{R_2^2 + \left(X_2 - \frac{1}{wC}\right)^2}}_{X'_1}\right]$$

显然：$R'_1 \ge 0$。**它吸收的功率即副边吸收的有功功率**；X'_1 **与** $X_2 - \frac{1}{wC} = X_{22}$ **异号**，**即** X_{22} **为感性阻抗时**，X'_1 **为容性阻抗**；X_{22} **为容性阻抗时**，X'_1 **为感性阻抗**。**这里若取** C **使** $\frac{1}{wC} > X_2$，**则** $X'_1 > 0$，**那么就将副边的容抗反映到原边成了感抗**。

例：P. 206 **例** 8－6 (**反映阻抗法**)

例：P. 208 **例** 8－7 (**互感消去法，划线**)

例：P. 218 **习题** 8－10

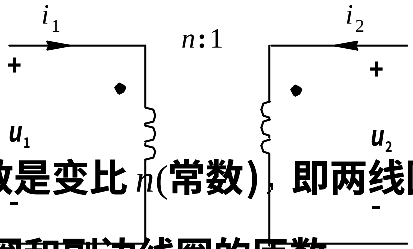
作业：P. 218 8－9，8－11。

§8—4　理想变压器

一、理想变压器的伏安关系

1．电路符号

理想变压器是一种理想化的互感耦合元件，电路符号为：



唯一的参数是变比 n**(常数)，即两线圈的匝数比**，$n=\dfrac{N_1}{N_2}$，N_1、N_2**分别为原边线圈和副边线圈的匝数。**

2．理想化条件

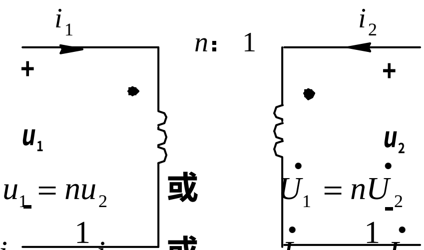
1) **变压器本身无损耗；**

2) **耦合系数** $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1$ **(全耦合)；**

3) L_1、L_2、M **均无限大，且有** $L_1/L_2=n^2$**。**

3．理想变压器的伏安特性

在图示电压电流参考方向及同名端下，总满足如下约束关系：



$u_1=nu_2$　**或**　$\dot{U}_1=n\dot{U}_2$

$i_1=-\dfrac{1}{n}i_2$　**或**　$\dot{I}_1=-\dfrac{1}{n}\dot{I}_2$

下面利用理想化条件推导这组约束关系。由理想化条件(1)**可知，原、副边均无电阻；由理想化条件**(2)**知：** $\varphi_{12}=\varphi_{22}$，$\varphi_{21}=\varphi_{11}$，**从而原边线圈、副边线圈的中磁通链分别为：**

$$\psi_1=\psi_{11}+\psi_{12}=N_1(\varphi_{11}+\varphi_{12})=N_1(\varphi_{11}+\varphi_{22})=N_1\varphi$$

$$\psi_2=\psi_{22}+\psi_{21}=N_2(\varphi_{22}+\varphi_{21})=N_2(\varphi_{22}+\varphi_{11})=N_2\varphi$$

式中： $\varphi=\varphi_{11}+\varphi_{22}$ **是线圈的总磁通，也称为主磁通。**

∵　$u_1=\dfrac{d\psi_1}{dt}=N_1\dfrac{d\varphi}{dt}$，　$u_2=\dfrac{d\psi_2}{dt}=N_2\dfrac{d\varphi}{dt}$

∴　$\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{N_1}{N_2}=n$

即：　$u_1=nu_2$　**或**　$\dot{U}_1=n\dot{U}_2$

由 $u_1=L_1\dfrac{di_1}{dt}+M\dfrac{di_2}{dt}$，**得：**　$\dfrac{u_1}{L_1}=\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{M}{L_1}\dfrac{di_2}{dt}$　　(*)

在全耦合时，有：

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\dfrac{N_1\boldsymbol{j}_{11}}{i_1}}{\dfrac{N_2\boldsymbol{j}_{22}}{i_2}}=\frac{\dfrac{N_1^2\times N_2\times\boldsymbol{j}_{21}}{i_1}}{\dfrac{N_2^2\times N_1\times\boldsymbol{j}_{12}}{i_2}}=\frac{N_1^2M_{21}}{N_2^2M_{12}}$$

∵ $M_{21}=M_{12}$

∴ $\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{N_1^2}{N_2^2}=n^2$ **或** $\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}=n$

∵ **全耦合时**，$k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1$； ∴ $M=\sqrt{L_1L_2}=\dfrac{1}{n}L_1$

∴ $\dfrac{M}{L_1}=\dfrac{1}{n}$

代入(*)式，得： $\dfrac{u_1}{L_1}=\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{1}{n}\dfrac{di_2}{dt}$

两边积分： $$\frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t}u_1(x)dx=\int_{-\infty}^{i_1}di_1+\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{i_2}di_2=i_1+\frac{1}{n}i_2$$

当$L_1\to\infty$**时,有**： $i_1+\dfrac{1}{n}i_2=0$

∴ $i_1=-\dfrac{1}{n}i_2$ **或** $\dot{I}_1=-\dfrac{1}{n}\dot{I}_2$

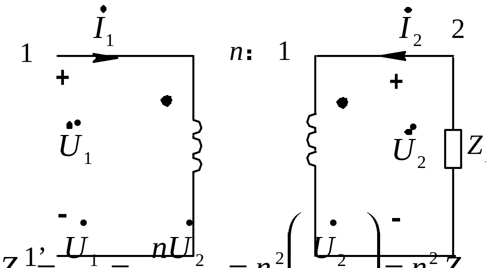
4. **理想变压器功率平衡方程**

$u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)=0$（**见** P. 210 **例** 8－9 **上面的文字**）

例：P. 210 **例** 8－9

二、理想变压器的阻抗变换性质

理想变压器除了可以用来变换电压和电流，还可以用来变换阻抗。如图所示，当副边接负载Z_L**时，从原边看进去的输入阻抗将是** ：



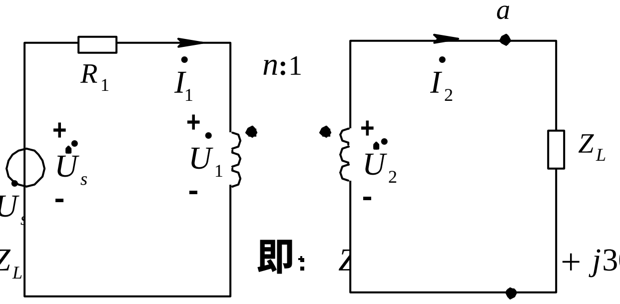
$$Z_1=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{n\dot{U}_2}{-\dfrac{1}{n}\dot{I}_2}=n^2\left(\frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2}\right)=n^2Z_L$$

即副边负载经过理想变压器，折合到原边的负载变为n^2Z_L**。可见，改变**n**，可在原边得到不同的入端阻抗。在工程中，常用理想变压器变换阻抗的性质来实现匹配，使负载获得最大功率。**

当$n>1$，**阻抗变换后增大**；

当$n<1$，**阻抗变换后减小。**

例：**图示电路，已知**$U_s=220V$， $R_1=100\Omega$， $Z_L=3+j3\Omega$， $n=10$。**求**：$\dot{I}_2$。



解：**设**：U

法一：**将**Z_L　　　**即**：Z　　　$+j300\ \Omega$

$$\therefore \quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}_s}{R_1+Z_L'}=\frac{220\angle 0^\circ}{100+300+j300}=0.44\angle -36.9^\circ \text{ A}$$

图示参考方向下：$\dot{I}_1=\dfrac{1}{n}\dot{I}_2$

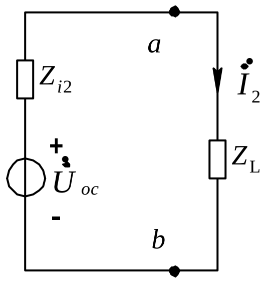
$$\therefore \quad \dot{I}_2=n\dot{I}_1=4.4\angle -36.9^\circ \text{ A}$$

法二：**戴维南定理。移去**Z_L**，副边线圈开路，**$\dot{I}_2=0$

$$\therefore \quad \dot{I}_1=\frac{1}{n}\dot{I}_2=0$$

$$\therefore \quad \dot{U}_1=\dot{U}_s$$

$$\therefore \quad \dot{U}_{oc}=\frac{1}{n}\dot{U}_1=\frac{1}{10}\times 220\angle 0^\circ=22\angle 0^\circ \text{ V}$$



除源，从副边看：$Z_{i2}=(\dfrac{1}{n})^2R_1=1\Omega$

$$\therefore \quad \dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{i2}+Z_L}=\frac{22\angle 0^\circ}{1+3+j3}=4.4\angle -36.9^\circ \text{ A}$$

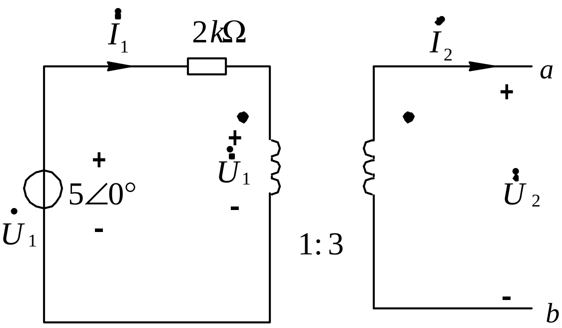
例：P. 211 **例** 8－10　(**两种方法求**$\dot{I}_2$～**变换阻抗法和戴维南等效电路法**)

例：P. 212 **例** 8－11

例：**求下列情况下，图示电路中的**$\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ **和** $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 。

1) ab **两端短路**；

2) ab **两端开路**。



解：1) $\because$ $\dot{U}_{ab}=0$， $\therefore$ $\dot{U}_1$

$\therefore$ $\dot{I}_1=\dfrac{5\angle 0°}{2000}=2.5\ mA$

$\therefore$ $\dot{I}_2=n\dot{I}_1=\dfrac{1}{3}\times 2.5=0.833\ mA$

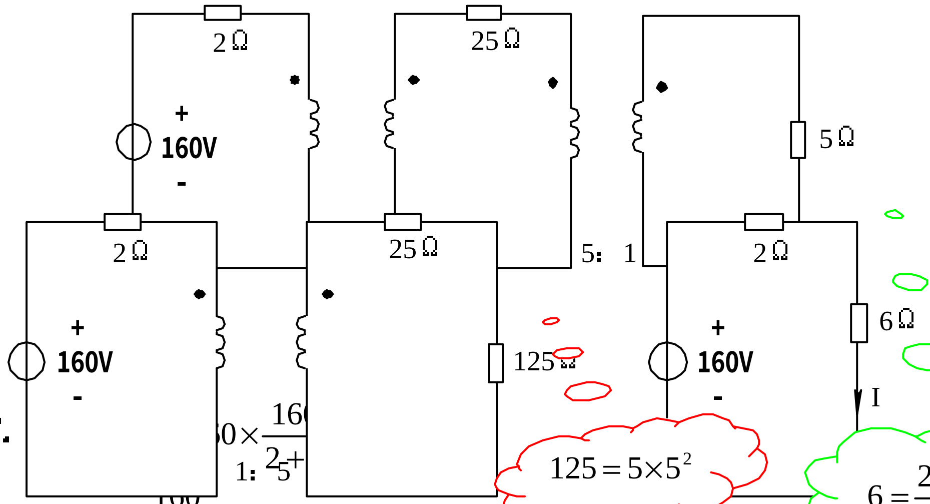
2) $\dot{I}_2=0$ $\therefore$ $\dot{I}_1=0$

$\therefore$ $\dot{U}_1=5\angle 0°\ \ \mathrm{V}$

$\therefore$ $\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=n$， $\dot{U}_1=n\dot{U}_2=\dfrac{1}{3}\dot{U}_2$， $\dot{U}_2=3\dot{U}_1=15\ \ \mathrm{V}$

例：**图示电路，求**5Ω**电阻的功率及电源发出的功率。**

解：



$$125 = 5 \times 5^2$$

$$6 = \frac{25+125}{5^2}$$

∴

$$I = \frac{160}{2+6} = 20\ \text{A}$$

$$P_{5\Omega} = \left(\frac{160}{5+3}\right)^2 \times 5 = 400 \times 5 = 2000\ \text{W}$$

$$3 = \frac{2\times 5^2 + 25}{25}$$

作业：　P. 219　8－12