

# 第3章 非稳态导热

## 3 - 2 一维非稳态导热的分析解

第三类边界条件下大平壁、长圆柱及球体的加热或冷却是工程上常见的一维非稳态导热问题。

1. 无限大平壁对称冷却或加热问题的分析解
2. 长圆柱体和球体的冷却或加热问题

对于圆柱体和球体在第三类边界条件下的一维非稳态导热问题，分别在柱坐标系和球坐标系下进行分析，也可以求得温度分布的分析解，解的形式也是**快速收敛的无穷级数**：

$$\text{长圆柱：} \frac{\theta}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right) \exp \left( -\mu_n^2 Fo \right)$$

$$A_n = \frac{2}{\mu_n} \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \quad \mu_n \frac{J_1(\mu_n)}{J_0(\mu_n)} = Bi$$

$J_0$ 、 $J_1$  分别为0阶和1阶第一类贝塞尔（Bessel）函数，其值可以从附录16中查到。

球体：

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(\mu_n r / R)}{\mu_n r / R} \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right)$$

$$A_n = 2 \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}$$

$$1 - \mu_n \cot \mu_n = Bi$$

对于圆柱体和球体在第三类边界条件下的一维非稳态导热问题，解的形式也是 $Bi$ 、 $Fo$ 和 $r/R$ 的函数，

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(Bi, Fo, \frac{r}{R}\right) \quad Bi = \frac{hR}{\lambda}, \quad Fo = \frac{\alpha\tau}{R^2}$$

当  $Fo \geq 0.2$  时，圆柱和球体的一维非稳态导热过程也都进入**正规状况阶段**，分析解可近似地取无穷级数的第一项。平壁、圆柱和球体的近似结果可表示为

$$\frac{\theta}{\theta_0} = A \exp \left( -\mu_1^2 Fo \right) f(\mu_1 \eta), \quad \eta = \frac{x}{\delta} \text{ 或 } \eta = \frac{r}{R}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$$

$\bar{\theta}$  是时刻  $\tau$  物体的平均过余温度

$$\bar{\theta} = A \exp \left( -\mu_1^2 Fo \right) B$$

表 3-2 系数 A、B 及函数  $f(\mu_1 \eta)$  的表达式

几何形状	A	B	$f(\mu_1 \eta)$
平 板	$2 \frac{\sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$\frac{\sin \mu_1}{\mu_1}$	$\cos(\mu_1 \eta)$
圆 柱	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]}$	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1}$	$J_0(\mu_1 \eta)$
球	$2 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$3 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1^3}$	$\frac{\sin(\mu_1 \eta)}{\mu_1 \eta}$

表 3-2 中的  $J_0(\mu_1)$ 、 $J_1(\mu_1)$  称为第一类贝塞尔函数, 其值可从附录中查

$\mu_1$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$  的数值可近似由下面各式计算

$$\mu_1^2 = \left( a + \frac{b}{Bi} \right)^{-1} \quad (3-29a)$$

$$A = a + b(1 - e^{-cBi}) \quad (3-29b)$$

$$B = \frac{a + cBi}{1 + bBi} \quad (3-29c)$$

$$J_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (3-29d)$$

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

以上各式中的常数值列于下表：

表 3-3 式(3-29a)~(3-29c)中的常数

几何形体		无限大平板	无限长圆柱	球
特征值 $\mu_1$	$a$	0.402 2	0.170 0	0.098 8
	$b$	0.918 8	0.434 9	0.277 9
系数 $A$	$a$	1.010 1	1.004 2	1.000 3
	$b$	0.257 5	0.587 7	0.985 8
	$c$	0.427 1	0.403 8	0.319 1
系数 $B$	$a$	1.006 3	1.017 3	1.029 5
	$b$	0.547 5	0.598 3	0.648 1
	$c$	0.348 3	0.257 4	0.195 3

表 3-4 计算 $J_0(x)$ 的常数

$a$	$b$	$c$	$d$
0.996 7	0.035 4	-0.325 9	0.057 7



对于第三类边界条件下大平壁、长圆柱及球体的加热或冷却是工程上常见的一维非稳态导热问题，当 $Fo \geq 0.2$ 时，有以下2种算法：

(1) 用以上近似公式计算；

(2) 用诺模图（海斯勒图）计算。

当 $Fo < 0.2$ 时，用级数解计算。

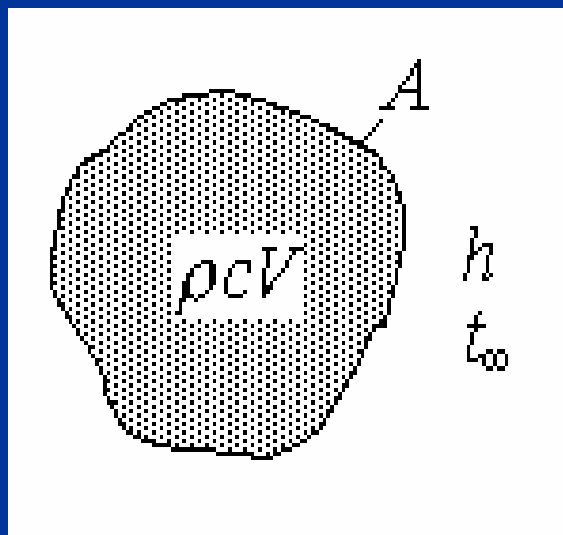
当然，无论 $Fo \geq 0.2$  还是  $Fo < 0.2$ ，都可以用数值计算方法计算。

# 第3章 非稳态导热

## 3-3 非稳态导热的集总参数法

当 $Bi \leq 0.1$ 时，物体内部的导热热阻远小于其表面的对流换热热阻，可以忽略，物体内部各点的温度在任一时刻都近似于均匀，物体的温度只是时间的函数。对于这种情况，只须求解物体温度随时间的变化规律以及物体放出或吸收的热量。

假设：一个任意形状的物体，体积为 $V$ ，表面面积为 $A$ ，密度 $\rho$ 、比热容 $c$ 及热导率 $\lambda$ 为常数，无内热源，初始温度为 $t_0$ 。突然将该物体放入温度 $t_\infty$ 恒定的流体中，物体表面和流体之间对流换热的表面传热系数 $h$ 为常数。假设该问题满足 $Bi \leq 0.1$ 的条件。



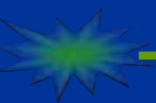
根据能量守恒，单位时间内物体热力学能的变化量应该等于物体表面与流体之间的对流传热量，

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = -hA(t - t_f) \quad \xrightarrow{\theta = t - t_f} \quad \rho c V \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho c V} d\tau \\ \tau = 0, \theta = \theta_0 = t_0 - t_f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^{\tau} \frac{hA}{\rho c V} d\tau$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho c V} \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$$

$$\Rightarrow \frac{hA}{\rho c V} = \frac{h(V/A)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\rho c (V/A)^2} \tau \quad \boxed{l = V/A} \quad = \frac{hl}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\rho c l^2} \tau = \frac{hl}{\lambda} \cdot \frac{a\tau}{l^2} = Bi_V \cdot Fo_V$$



$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi_V \cdot Fo_V} = \exp(-Bi_V \cdot Fo_V)$$

下角标  $V$  表示以  
 $l=V/A$  为特征长度

在 $0\sim\tau$ 时间内物体和周围环境之间交换的热量

$$Q_\tau = \rho c V (t_0 - t) = \rho c V (\theta_0 - \theta)$$
$$= \rho c V \theta_0 \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_0} \right) = \rho c V \theta_0 \left( 1 - e^{-Bi_V \cdot Fo_V} \right)$$

令  $Q_0 = \rho c V \theta_0$  ，表示物体温度从 $t_0$  变化到周围流体温度 $t_f$ 所放出或吸收的总热量，则上式改写为

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = 1 - e^{-Bi_V \cdot Fo_V}$$

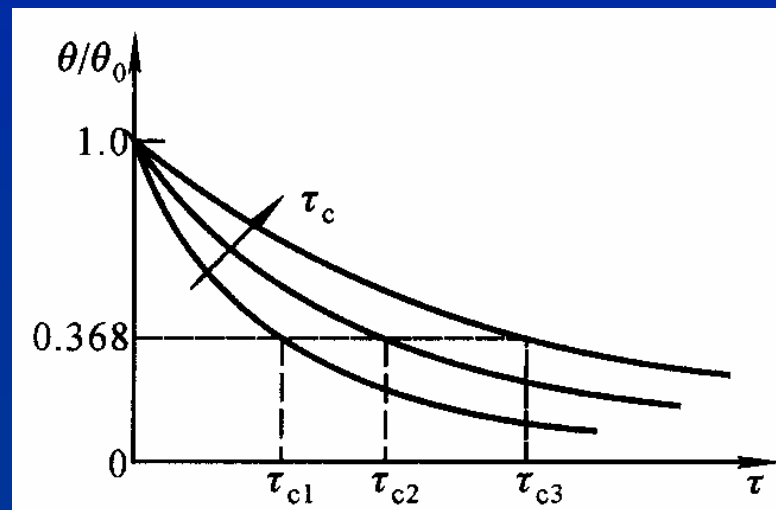
上述分析结果既适用于物体被加热的情况，也适用于物体被冷却的情况。

# 时间常数:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$$

$$\text{令 } \tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$$

$$\text{当 } \tau = \tau_c \text{ 时, } \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 0.368 = 36.8\%$$



即在  $\tau_c$  时刻，物体的过余温度达到初始过余温度的 36.8%。  $\tau_c$  称为**时间常数**，反映物体对环境温度变化响应的快慢，时间常数越小，物体的温度变化越快。

由  $\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$  可见，

影响时间常数大小的主要因素是：

物体的**热容量** $\rho c V$  和物体**表面的对流换热条件**  $hA$ 。



## 几点说明：

(1) **集总参数法**中的毕渥数 $Bi_V$ 与傅里叶数 $Fo_V$ 以 $l=V/A$ 为特征长度，不同于**分析解**中的 $Bi$ 与 $Fo$ ，

	分析解	集总参数法
无限大平壁	$Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$ $Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}$	$Bi_V = \frac{h\delta}{\lambda}$ $Fo_V = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}$
无限长圆柱	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$ $Fo = \frac{\alpha\tau}{R^2}$	$Bi_V = \frac{h(R/2)}{\lambda}$ $Fo_V = \frac{\alpha\tau}{(R/2)^2}$
圆球	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$ $Fo = \frac{\alpha\tau}{R^2}$	$Bi_V = \frac{h(R/3)}{\lambda}$ $Fo_V = \frac{\alpha\tau}{(R/3)^2}$

(2) 对于形状如平板、柱体或球的物体，只要满足  $Bi \leq 0.1$ ，就可以使用集总参数法计算，偏差小于5%。

**注意：**  $Bi \leq 0.1$  相当于  $Bi_v \leq 0.1M$

对平板： $M=1$ ；

对长圆柱： $M=1/2$ ；

对球体； $M=1/3$

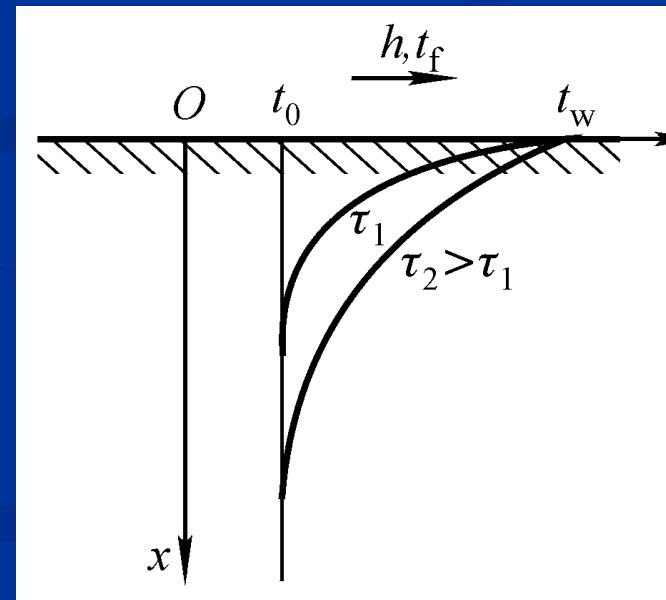
# 3 - 5 半无限大物体的非稳态导热

## 半无限大的概念

在一定的时间内，边界面处的温度扰动只能传播到有限深度，在此深度以外，物体仍保持原有状态（初始状态）。于是，在此时间内，可以把物体视为半无限大。

### 1. 第一类边界条件下半无限大物体的非稳态导热

假设半无限大物体具有均匀一致的初始温度 $t_0$ 、常物性、无内热源，表面温度突然升至 $t_w$ 并保持不变。选择坐标系如图，这是一维的非稳态导热问题。



# 数学模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, t = t_0 \\ x = 0, t = t_w \\ x \rightarrow \infty, t = t_0 \end{array} \right. \xrightarrow{\theta = t - t_w} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \theta = \theta_0 \\ x = 0, \theta = 0 \\ x \rightarrow \infty, \theta = \theta_0 \end{array} \right.$$

分析解：
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_w}{t_0 - t_w} = \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) = \operatorname{erf} \eta$$

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-x^2} dx \quad \text{高斯误差函数}$$

高斯误差函数的数值可从书后的附录17中查到。

从误差函数表可查出

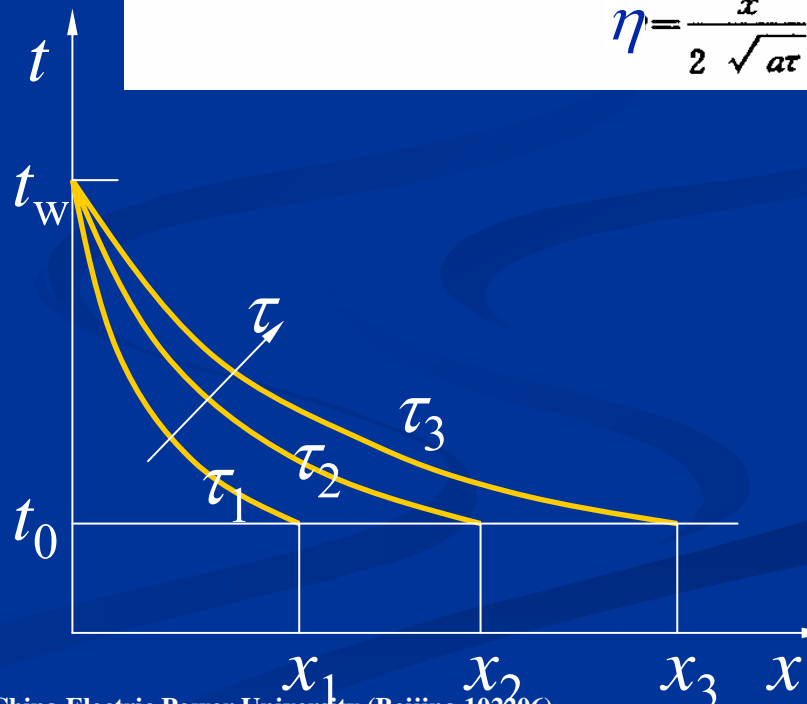
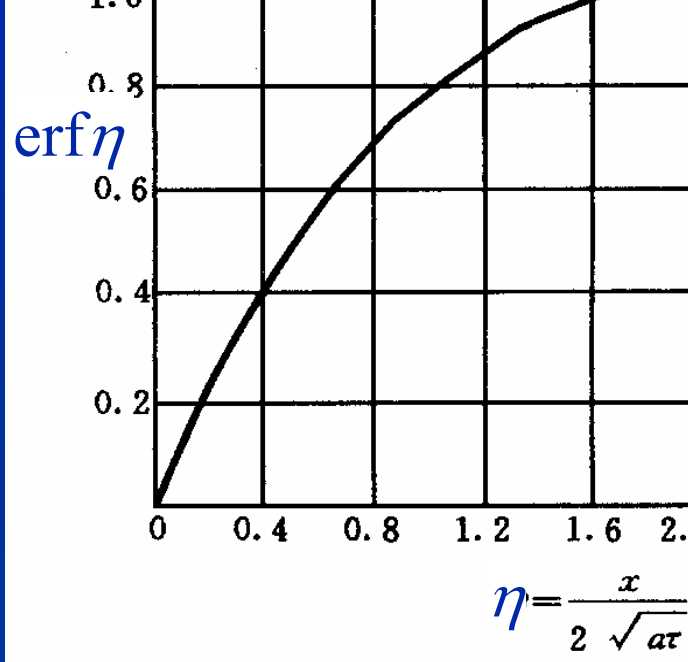
当  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 2$  时，

$$\theta/\theta_0 = \text{erf } \eta = 0.9953 \approx 1$$

说明以下两点：

(1) 在  $\tau$  时刻， $x \geq 4\sqrt{a\tau}$  深处的温度尚未变化，仍为  $t_0$ ， $x$  也称为**穿透深度**。

(2) 当  $\tau \leq x^2/16a$  时，深度  $x$  处的温度保持不变，时间  $x^2/16a$  称为深度  $x$  处的**惰性时间**。



根据傅里叶定律，半无限大物体内任意一点在  $\tau$  时刻的热流密度为

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right)$$

表面 ( $x=0$ ) 在  $\tau$  时刻的热流密度为

$$q_w = \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} = (t_w - t_0) \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{\pi \tau}}$$

在  $0 \sim \tau$  时间间隔内，流过单位表面积的热量为

$$Q = \int_0^\tau q_w d\tau = 2(t_w - t_0) \sqrt{\lambda \rho c} \sqrt{\tau / \pi}$$

可见，在温差一定的情况下， $\sqrt{\lambda \rho c}$  越大，通过表面的热量越多， $\sqrt{\lambda \rho c}$  称为吸热系数，反映物体从与其接触的高温物体的吸热能力。

# 第3章 小结

重点掌握以下内容：

- (1) 非稳态导热的特点；
- (2) 非稳态导热的数学描述（数学模型）；
- (3) 无限大平壁冷却或加热问题分析解（温度场）的特点及影响因素( $Fo$ 、 $Bi$ )；
- (4) 求解非稳态导热问题集总参数法；
- (5) 半无限大物体非稳态导热问题的数学描述及温度场的特点。

作业：3 - 11 , 3 - 16