

PDE Toolbox 和最小二乘法在导热问题中的应用

Application of PDE Toolbox and Least Square Method in Heat Conduction of Metal

朱秋旻 陈晓平

(江苏大学电气信息工程学院,江苏 镇江 212013)

摘要: 设计金属加热的控制策略,首先要获得金属导热体的开环系统模型。针对一个带有矩形孔的金属薄板上的热传导问题,采用 PDE Toolbox 进行求解和仿真,并用最小二乘方法进行热传导系统的建模与仿真,以获得模型中的参数。将此参数与求解微分方程方法所得到的数据进行对比,结果表明,采用最小二乘法可以更清楚地了解金属板的外部特性,并获得输入输出信号的差分方程,而求解微分方程的方法则显示了金属板的内部特性,两种方法是等效的。

关键词: 热传导方程 边界条件 最小二乘算法 系统辨识 开环系统

中图分类号: TH811;TP15 **文献标志码:** A

Abstract: To design the control strategy for heating metal, the open loop system model of the metal heat conductor shall be obtained first. Aiming at the heat conduction issue of the metal sheet with rectangular hole, the solution and simulation are conducted by adopting PDE Toolbox; and modeling and simulation of the heat conduction system are completed with the least square method for getting parameters of the model. Comparing the data obtained from the model and resolving the differential equation, it is shown that by using the least square method, exterior characteristics of the metal sheet can be learnt more clearer, thus the difference equations of the input and output signals can be obtained, while the resolving method reveal its interior characteristics, both methods are equivalent.

Keywords: Heat conduction equation Boundary condition Least square method System identification Open loop system

0 引言

热传导方程式描述了一个区域内的温度如何随时间变化。由于许多模型没有解析解,因此必须以数值方法计算模型给出的定价^[1]。这里直接用 Matlab 软件求解,并给出图形。

法国科学家勒让德于 1806 年独立发现了最小二乘法(least square, LS)^[2]。从此,这个方法被广泛应用于各行各业的工程计算中。在 Matlab 中可以编写最小二乘法的应用程序进行系统参数辨识^[3]。

偏微分方程工具箱提供了研究和求解空间二维偏微分方程问题的一个强大而又灵活实用的环境^[4],用它可方便地求解热方程,得出金属体的内部特性。

1 热传导方程的解法

1.1 热传导方程介绍

热传导方程由热力学第一定律和傅里叶定律推导得到。为简单起见,现只讨论单纯热传导现象,并忽略

体积膨胀,同时假设金属板静止,可得到如下方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c_v} \nabla \cdot (\nabla T) = 0 \quad (1)$$

式中: T 为某时某点温度; t 为时间; λ 为导热率,通常为常数; ρ 为密度; c_v 为等体比热容; ∇ 为拉普拉斯算子。此公式表示某点温度随时间的变化与这一点温度的散度成正比。

由于抛物型偏微分方程标准形式为:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \quad (2)$$

令 $d=1$ 、 $c=k$ 、 $a=0$ 、 $f=0$,式(2)就成了所要求的热方程式(1)了。

方程边界条件一般有 Dirichlet 条件和 Neumann 条件两种,即:

$$hu = r \quad (\text{Dirichlet 条件})$$

$$\mathbf{n}(c \nabla u) + qu = g \quad (\text{Neumann 条件})$$

式中: h 为空间采样步长; u 为方程的未知函数; \mathbf{n} 为边界切面的法向量; h 、 r 、 c 、 q 、 g 都为已知函数或常数。

1.2 解金属板导热问题

考虑一个带有矩形孔的金属板上的热传导问题。板左边的温度保持在 100 °C,板右边热量从板向环境空气定常流动,其他边及内孔边界保持绝缘。

当初始板温 $t=0$ °C 时,则可概括为如下定解问题:

江苏省高校自然科学基金资助项目(编号:06KJD510038)。

修改稿收到日期:2010-07-22。

第一作者朱秋旻,男,1980年生,现为江苏大学控制理论与控制工程专业在读硕士研究生;主要从事系统辨识、模式识别方面的研究。

$$\begin{cases} d \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, u = 100 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -1, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{t=t_0} = 0, u|_{t=t_0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

上述问题中金属板域的外边界顶点坐标分别为 $(-0.5, -0.8)$ 、 $(0.5, -0.8)$ 、 $(0.5, 0.8)$ 、 $(-0.5, 0.8)$; 内边界顶点坐标分别为 $(-0.05, -0.4)$ 、 $(0.05, -0.4)$ 、 $(0.05, 0.4)$ 、 $(-0.05, 0.4)$ 。接着使用 Matlab 图形用户界面 (GUI) 求解这一问题。在 PDE Toolbox 窗口的工具栏中选择 Generic Scalar 模式, 然后经过区域设置、边界条件设置、方程类型设置、网格剖分、初值和误差设置, 可以得到此问题的数值解和解的图形。

部分 Matlab 程序如下。

```
[p,e,t] = initmesh('crackg'); // 网格初始化
u = parabolic(0,0:0.5:5,'crackb',p,e,t,1,0,0,1);
// 求解
pdeplot(p,e,t,'xydate',u(:,11),'mesh','off',...,'colormap','hot'); // 绘图
```

1.3 热传导方程的差分格式

热方程为偏微分方程, 求解它可用求解微分方程的数值方法。

考虑上述二维常系数热传导方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 & a > 0 \quad x \in (0,1) \quad t \in (0,T) \\ u(x,0) = \Phi(x) & x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in [0,T] \end{cases} \quad (4)$$

要求解这个方程, 常用差分格式的递推公式, 其分为古典显格式和古典隐格式两种。

1.3.1 古典显格式

取网格的空间步长为 $h = 1/N$, 时间步长为 τ 。在 (x_j, t_k) 处时间用向前差商, 空间用中心差商近似, 则可得古典显格式, 即:

$$u_{ij}^{k+1} = (1-4r)u_{ij}^k + r(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \quad (5)$$

式中: 局部截断误差为 $O(\tau + h^2)$, $r = \tau/h^2$ (网格比), 其中, O 表示高阶无穷小。当且仅当 $r < 1/4$ 时, 格式是稳定的。

1.3.2 古典隐格式

在 (x_j, t_{k+1}) 处时间用向后差商, 空间用中心差商近似, 则可得古典隐格式, 即:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) \quad (6)$$

式中: 局部截断误差为 $O(\tau + h^2)$, $r = \tau/h^2$, 隐格式对

任何网格比都是稳定的。

用差分方法同样可以在 Matlab 上求解热传导方程, 在键入程序后, 就可得到板上各点的温度值, 对于更复杂的问题, 此方法有明显的优势。

2 最小二乘原理与算法

2.1 最小二乘基本原理

最小二乘法 (LS) 是用于参数估计的数学方法, 它使数学模型在误差平方和最小的意义上拟合试验数据, 也是一种涉及较少数学基础而又被大量应用的一种基本方法。

最小二乘法提供一个估算方法, 用来得到一个在最小方差意义上与试验数据最好拟合的数学模型。由最小二乘法获得的估计在一定的条件下有最佳的统计特性, 即估计的结果是无偏的、一致的和有效的。

因为 LS 的原则是希望某个量 $S(0)$ 和 a 的值能使观测值和由模型的计算值之间的误差为最小, 所以各次观测误差可表示为:

$$v_i = S_i^*(t) - S_i(t) = S_i^*(t) - [S(0) + at_i] \quad (7)$$

式中: $i = 1, 2, \dots, l$ 。

整个观测过程的误差是由各次观测误差所组成的, 采用每个误差的平方和作为总误差:

$$J = \sum_{i=1}^N v_i^2(t) = \sum_{i=1}^N \{ S_i^*(t) - [S(0) + at_i] \}^2 \quad (8)$$

所选的误差平方和函数 J 就是估计参数时所采用的性能指标。显然, J 越小越好, 即所选的 $S(0)$ 和 a 的值能使每个误差的平方和 J 的值最小。由于平方运算也称二乘运算, 因此称上述方法为最小二乘估计法。要使 J 达到极小值, 只需分别对 $S(0)$ 和 a 求偏导, 令它们等于 0。这样就可以得到关于 $S(0)$ 和 a 的两个估计表达式。

2.2 最小二乘的基本关系式

对于单输入单输出离散时间动态系统, 设 $u(k)$ 为输入, $y(k)$ 为输出, $z(k)$ 为量测输出, $v(k)$ 为白噪声, 其系统数学关系可用如下随机差分方程描述, 即:

$$\begin{cases} A(q^{-1})z(k) = B(q^{-1})u(k) + v(k) \\ A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n_a} \\ B(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_nq^{-n_b} \end{cases} \quad (9)$$

式(9)可以描述成如下最小二乘格式:

$$z(k) = \varphi(k)\theta + v(k) \quad (10)$$

$$\varphi(k) = [-z(k-1), \dots, -z(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)] \quad (11)$$

$$\theta(k) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T \quad (12)$$

利用数据序列 $\{u(k)\}$ 、 $\{z(k)\}$, 极小化下列准则函数。

$$J = \sum_{i=1}^l [z(k) - \Phi^T(k)\theta]^2 \quad (13)$$

在文献[3]中,根据所求解的问题的 J 不同,在不同场合下,函数 J 往往有不同的名称,它是一个标量。对 J 求导,令其等于 0 可得:

$$\hat{\theta} = (\Phi_l^T \Phi_l)^{-1} \Phi_l^T Z_l \quad (14)$$

式(14)就是所要求的参数估计式,从统计学的角度考虑。观测总次数 l 必须大大超过设定的未知参数的数目,此时由观测所提供的方程式的数目才能超过确定出方程组的唯一解所需的数目。

3 基于最小二乘算法的仿真

3.1 用积矩阵估计阶次

考虑干扰是白噪声的情况,令:

$$H_n = \begin{bmatrix} z(n) & \cdots & z(1) & u(n) & \cdots & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z(n+L-1) & \cdots & z(L) & u(n+L-1) & \cdots & u(L) \end{bmatrix} = [Z_n, U_n] \quad (15)$$

式中: L 为数据长度。利用积矩阵 $H(n) = \frac{1}{L} H_n^T H_n$, 可定义如下的行列式比:

$$DR^*(n) = \frac{\det[H(n)]}{\det[H(n+1)]} \quad (16)$$

当 n 从 1 开始逐一增加时,若上式值有明显的增加,则在显著增加处的 n 值就是模型的阶次。由仿真得出本文所讨论的问题的阶次大约在 2 的附近,所以本问题的差分方程模型的阶次选为 2。

3.2 模型的参数辨识

程序框图如图 1 所示。

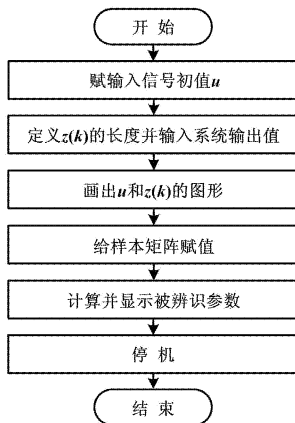


图 1 最小二乘法程序框图
Fig. 1 Block diagram of the LS

根据试验得到的数据,将本问题的模型阶次选为 2,并用线性差分方程来描述,可得:

$$z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + v(k) \quad (17)$$

式中: $v(k)$ 为服从正态分布的白噪声 $N(0,1)$; $z(k)$ 为金属板中心温度与初始温度(高于室温)之差; $u(k)$ 为 1,表示金属板两端加热源,为 -1,表示不加热源。输入信号采用 4 阶 M 序列,幅度为 1。则按式(17)构造 z_l 和 H_l ,数据长度 $L = 14$,加权阵取 I ,并利用式(14)计算参数估计值。

根据金属板的 ARMX 模块估计结构,由程序运行可得如图 2 所示的温度输出曲线和输入输出误差曲线。

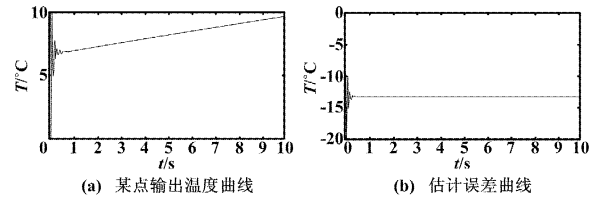


图 2 ARMX 模块估计输出曲线和误差曲线

Fig. 2 Output curve and error curve of ARMX estimated module

由图 2 可以看出,温床系统的估计输出曲线与量测温度值相符,且误差曲线也符合要求。

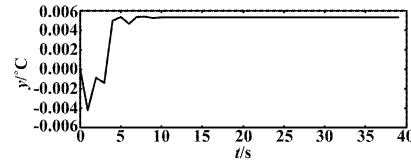


图 3 系统阶跃响应曲线

Fig. 3 Step response curves of the system

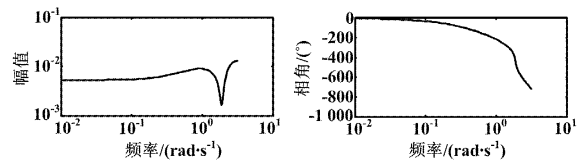


图 4 系统频率响应曲线

Fig. 4 Response curves of system frequency

图 3 给出了一定温度在阶跃功率输入下的输出变化,随时间输出温度趋于稳定,反映了金属板的热传导性质。从图 4 所示的频率响应曲线可以看出,在低频信号下输出有较好的稳定性,当外界有高频噪声时,采用 ARMX 模块估计就会出现较大的偏差。

4 结束语

从仿真结果看,本文所采用的方法能较好地描述金属板的内、外部特性,得到了所需系统模型,较好地

(下转第 31 页)

型相对应。

经多次试验,输出向量 Y 中各元素的取如下数值时,变压器的故障诊断准确率较高。

$$Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7]^T = [0.153 \ 4 \ 0.565 \ 8 \ 0.628 \ 2 \ 0.805 \ 8 \ 1.269 \ 2 \ 0.954 \ 6 \ 1.223 \ 1]^T$$

⑤ 求参数向量 θ ,按式(10)求出参数向量 θ ,即获得回归系数 a_i 和偏差 b 。

⑥ 诊断待检样本的故障类型,将待检样本按式(11)进行归一化处理,代入式(10)求得输出 f ,并寻找与 f 值最接近的 y_i ,则该样本的故障类型属于第 i 类。

3 故障诊断实例

在故障诊断实例中, c 和 σ 采用交叉验证法得到的最优参数对,即 $c = 50, \sigma^2 = 0.1$ 。

3.1 诊断实例 1

某主变压器用气相色谱分析油中溶解气体,测得各种气体浓度为 $c_{H_2} = 57, c_{CH_4} = 77, c_{C_2H_6} = 19, c_{C_3H_8} = 21, c_{C_4H_{10}} = 0$ (单位: $\mu L/L = \mu = 10^{-6}$),得出三比值编码为 021,诊断结果为中温过热。把此待检样本按上述步骤进行处理,得出 $f = 0.583 \ 2$ 。可以看出, $f = 0.583 \ 2$ 接近 $y_2 = 0.583 \ 2$,即可初步判断出变压器故障为低热。经过吊芯检查,发现为绝缘线过热。

3.2 诊断实例 2

两主变压器用气相色谱分析油中溶解气体,测得各种气体浓度为 $c_{H_2} = 36, c_{CH_4} = 30, c_{C_2H_6} = 10, c_{C_3H_8} = 93, c_{C_4H_{10}} = 7.1, c_{H_2} = 654, c_{CH_4} = 55, c_{C_2H_6} = 34, c_{C_3H_8} = 20, c_{C_4H_{10}} = 0$ (单位: $\mu L/L = \mu = 10^{-6}$)。第 1 组数据在三比值编码中未找到编码,第 2 组数据对应的编码为 010,故障为局放。

应用 LS-SVM 算法诊断得到第 1 组数据对应的输出值为 1.034 5,近似等于 $y_6 = 0.954 \ 6$,诊断出变压器故障为高热;第 2 组数据对应的输出值为 1.220 4,最接近于 $y_7 = 1.223 \ 0$,可知变压器故障为局放。经实际

调查,二者均与实际相符。

4 结束语

最小二乘支持向量机是支持向量机的一种,具有支持向量机的优点。本文在测定变压器油中溶解气体组分的基础上构造输入输出样本对,对该数据进行归一化处理后,应用最小二乘支持向量机的算法进行回归参数和偏差的计算,从而建立故障诊断的模型,并进一步进行故障诊断。该方法在一定程度上弥补了三比值法的不足。

整个分析诊断过程耗时短并且简单可靠,实例诊断结果表明,该方法的有效性和可靠性比三比值诊断方法都有很大的提高,能对现场分析诊断起到较好的指导作用。

参考文献

- [1] 孙才新,陈伟根,李检,等. 电气设备油中气体在线监测与故障诊断技术[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [2] Suykens J A K, Debrabanter J, Lukas L, et al. Weighted least squares support vector machines: robustness and spares approximation[J]. Neurocomputing, 2002, 48(1): 85-105.
- [3] 陈启买,陈森平. 基于核函数的支持向量机样本选取算法[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(10): 2266-2269.
- [4] 郭俊,周建中,张勇传,等. 基于改进支持向量机回归的日径流预测模型[J]. 水力发电, 2010, 36(3): 12-15.
- [5] 陈永刚. 基于最小二乘支持向量机的 PG9171E 型燃气轮机气耗特性建模研究[J]. 华电技术, 2010, 32(5): 14-17.
- [6] 陈跃华,曹广益,翁一武. MCFC/燃气轮机联合发电系统的最小二乘支持向量机方法建模[J]. 上海交通大学学报:自然科学版, 2007(5): 774-777.
- [7] 阎威武,邵惠鹤. 支持向量机和最小二乘支持向量机的比较及应用研究[J]. 控制与决策, 2003, 18(3): 358-360.
- [8] 杨奎河,单甘霖,赵玲玲. 基于最小二乘支持向量机的汽轮机故障诊断[J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 775-778.
- [9] 胡宏伟,周晓军,庞茂. 基于 LS-SVM 的火电厂给水泵组状态趋势预测研究[J]. 传感技术学报, 2007, 20(5): 1139-1143.
- [10] 于国荣,夏自强. 混沌时间序列支持向量机模型及其在径流预测中应用[J]. 水科学进展, 2008, 19(1): 116-122.
- [4] 侯媛彬,汪海,王立琦. 系统辨识及其 MATLAB 仿真[M]. 北京:科学出版社,2004.
- [5] Iserles A. 微分方程数值分析基础教程[M]. 刘晓艳,刘学深,译. 北京:清华大学出版社,2005.
- [6] Hou Yuanbin. A decoupling control method with improving genetic algorithm[C] // Proceedings of 2002 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, China, 2002: 2112-2115.
- [7] 周彤. 含有不确定因素的模型检验及其非伪概率估计[J]. 控制理论与应用, 1996(2): 145-152.

(上接第 28 页)

解决了上面提出的问题,可以满足实际的要求。在更复杂的环境中,还应对噪声和信号进行分析,以便更精确地获得系统模型的其他数据。

参考文献

- [1] 王竹溪. 热力学[M]. 2 版. 北京:北京大学出版社,2005.
- [2] John F. Partial differential equations[M]. Springer, 1982.
- [3] 陆君安,安涛,谢进,等. 偏微分方程的 MATLAB 解法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2001.