

# Advances and Existing Issues in Contact Model of Mechanical Joint Surface\*

Hongliang Tian, Dalin Zhu, Hongling Qin

College of Mechanical and Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang  
Email: thl19732003@yahoo.com.cn

Received: Oct. 18<sup>th</sup>, 2012; revised: Nov. 20<sup>th</sup>, 2012; accepted: Dec. 4<sup>th</sup>, 2012

**Abstract:** The basic concept about mechanical joint surface was introduced. More than 90% of damping in a machine tool comes from mechanical joint surface. There are many factors that affect the characteristics of mechanical joint surface, most of which are nonlinear. Some contact models in common use, for example statistical model, fractal model, finite element model and experimental model were relatively generally reviewed. Their advantage, existing issue and application range were discussed in detail. At last, some most basic problems unsatisfactorily solved were pointed out.

**Keywords:** Joint Surface; Contact Model; Contact Stiffness; Contact Damping

## 机械结合面接触模型的研究进展及存在的问题\*

田红亮, 朱大林, 秦红玲

三峡大学机械与材料学院, 宜昌  
Email: thl19732003@yahoo.com.cn

收稿日期: 2012年10月18日; 修回日期: 2012年11月20日; 录用日期: 2012年12月4日

**摘要:** 介绍了机械结合面的基本概念。一台机床 90%以上的阻尼来自机械结合面。影响机械结合面特性的因素众多, 且多为非线性性质。对机械结合面的几种常用接触模型如统计模型、分形模型、有限元模型、试验模型进行了比较全面的回顾和评述, 详细地论述了相应模型的优点、存在的问题和应用范围。最后指出了还没有妥善地解决好机械结合面一系列最基本的问题。

**关键词:** 结合面; 接触模型; 接触刚度; 接触阻尼

### 1. 引言

机床甚至各种机械为满足各种功能, 一般都不是一个连续的整体, 而是由各种零件按照一定的具体要求组合起来的。称零件、组件、部件之间相互接触的表面为机械结合面, 简称结合面或接触面。一台机床 60%~80%的刚度、90%以上的阻尼、55%的动柔度与 85%~90%的静变形量都来自结合面, 所以要想建立一个精确的结构动力学模型, 就必须准确了解结合面动态特性。然而进行结构结合面动态特性的研究一直是

动力学研究领域的难点之一, 目前仍没有一套比较成熟的理论与方法, 大多数情况下仍然是靠经验估计。因此如何准确辨识结构结合面参数便成为结构动态设计中的一项关键技术。本文对机械结合面的几种常用接触模型给予评述, 详细地论述了相应模型的优点、存在的问题和应用范围。

### 2. 机械结合面统计模型的研究进展

当两个固体表面接触时, 由于表面粗糙, 实际接触只发生在表观面积的极小部分上。实际表面上粗糙峰顶的形状通常是椭圆柱体, 由于椭圆柱体的接触区尺寸

\*基金项目: 国家自然科学基金(51275273)和三峡大学博士科研启动基金(KJ2012B013)资助。

远小于本身的曲率半径,因而单个粗糙峰可以近似为球体,两个平面的接触可近似为一系列高低不齐的球体相接触<sup>[1]</sup>。1966年 Greenwood 和 Williamson 提出了名义上平坦平面的接触模型<sup>[2]</sup>,简称 GW 模型。典型粗糙两表面的随机分布接触点的接触状态可分为:塑性接触类、弹性接触类和未参与接触类,如图 1 所示<sup>[3]</sup>。单峰与刚性粗糙平面的接触状态如图 2 所示,轮廓曲线在平均高度线上下两侧的面积相等。

参与接触的粗糙峰点数、总电导(单位为西门子 S)、实际接触面积、总法向载荷、塑性指数分别为

$$m = \eta A_a F_0(d/\sigma) \quad (1)$$

$$G = 2\eta A_a \rho^{-1} R_i^{1/2} \sigma^{1/2} F_{1/2}(d/\sigma) \quad (2)$$

$$A_r = \sum_{i=1}^m A_{r_i} = \pi \eta A_a R_i \sigma F_1(d/\sigma) \quad (3)$$

$$F_n = \frac{4}{3} \eta A_a E' R_i^{1/2} \sigma^{3/2} F_{3/2}(d/\sigma) \quad (4)$$

$$\psi = \frac{E'}{H} \sqrt{\sigma/R_i} \quad (5)$$

式中,  $\eta$  是峰点密度,单位为点数/m<sup>2</sup>;  $A_a = ab$  是表观面积;  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  是综合粗糙度方差。

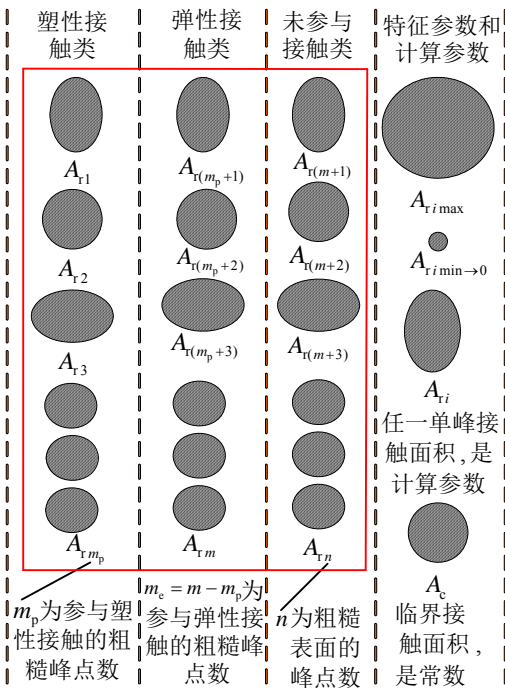


Figure 1. Three kinds of contact states and characteristic parameters  
图 1.3 类接触状态及特征参数

$$F_\alpha(d/\sigma) = \int_{d/\sigma}^{+\infty} (s-d/\sigma)^\alpha \varphi^*(s) ds,$$

$\varphi^*(s) = \sigma \varphi(\sigma s)$  是单峰高度的标准概率分布密度<sup>[7]</sup>, 单位为一,  $\varphi(z)$  是单峰高度的概率分布密度, 单位为 m<sup>-1</sup>。

1987年 Chang 等提出了弹塑性接触模型<sup>[8]</sup>,简称 CEB 模型。CEB 模型考虑了粘着力,扩充了 GW 模型。CEB 模型如图 3 所示。

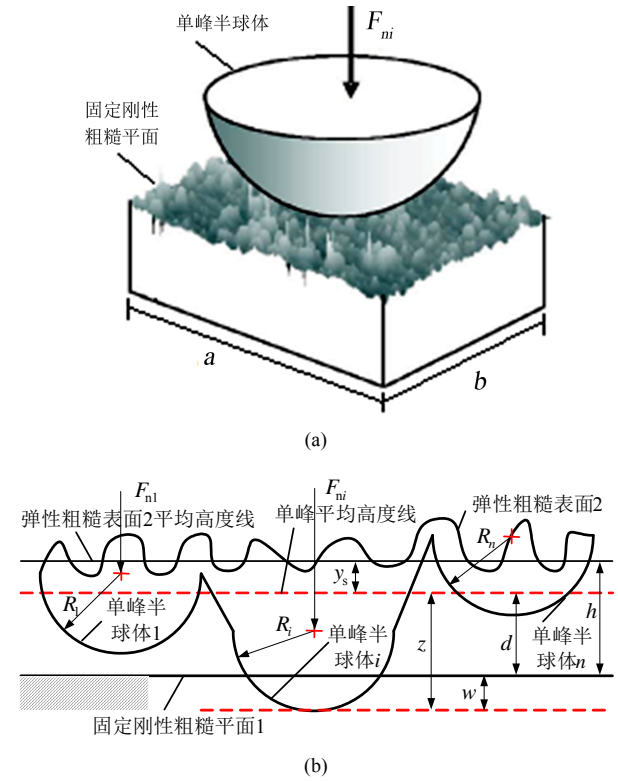


Figure 2. GW contact model<sup>[4-6]</sup>: (a) Magnified asperity; (b) Contact of an asperity with a rigid rough surface  
图 2. GW 接触模型<sup>[4-6]</sup>: (a) 放大后的 1 个单峰; (b) 单峰与刚性粗糙平面的接触

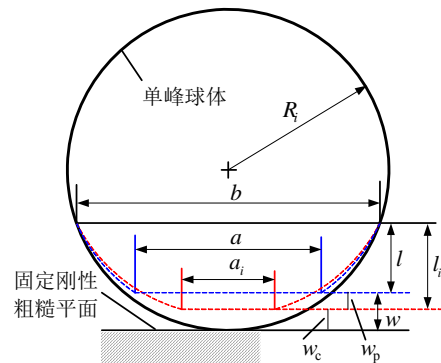


Figure 3. CEB model of volume conservation in plastic deformation  
图 3. 塑性变形时体积守恒 CEB 模型

接触变形量为临界变形量时球台的体积<sup>[9]</sup>为

$$V(a_i, b, l_i) = \pi K_1 w [3Rw_c + 6R(K_1 w + w_c) + K_1^2 w^2] / 6 \quad (6)$$

式中,  $l_i = K_1 w$ 。

任意塑性变形时球台的体积为

$$V(a, b, l) = \frac{1}{6} \pi (K_1 w - w + w_c) \left[ \frac{3a^2}{4} + 6R(K_1 w + w_c) + (K_1 w - w + w_c)^2 \right] \quad (7)$$

令式(6)与式(7)相等, 可得塑性变形时单峰的实际接触面积为

$$\pi a^2 / 4 = \pi R w \left\{ K_1 (2 - w_c / w) + 2(1 - w_c / w) w_c / w + \left[ K_1^3 - (K_1 - 1 + w_c / w)^3 \right] w / (3R) \right\} / (K_1 - 1 + w_c / w) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\text{当 } K_1 \text{ 很大时} \\ &\approx \pi R (2w - w_c) = \begin{cases} \pi R w_c & \text{当 } w = w_c \text{ 时} \\ 2\pi R w & \text{当 } w \text{ 很大时} \end{cases} \end{aligned}$$

GW 模型认为纯弹性变形时单峰的实际接触面积为  $\pi R w$ , 纯塑性变形时单峰的实际接触面积<sup>[10]</sup>趋近  $\pi e^2 \approx 2\pi R w$ ,  $e$  的标注见图 4(c)。可见 CEB 模型的式(8)至少在临界变形和完全塑性变形这 2 种极端情况下是成立的。

由式(8)可得实际接触面积、总法向载荷分别为

$$A_r = \sum_{i=m_p+1}^m A_{r_i} + \sum_{i=1}^{m_p} A_{r_i} = \pi \eta A_a R \int_d^{d+w_c} (z-d) \varphi(z) dz + \pi \eta A_a R \int_{d+w_c}^{+\infty} [2(z-d) - w_c] \varphi(z) dz \quad (9)$$

$$F_n = \frac{4}{3} \eta A_a E' R^{1/2} \int_d^{d+w_c} (z-d)^{3/2} \varphi(z) dz + \pi \eta A_a R K H \int_{d+w_c}^{+\infty} [2(z-d) - w_c] \varphi(z) dz \quad (10)$$

式中,  $H = K \sigma_{0.2}$  是较软材料的硬度, 单位为 Pa。

Kogut 和 Etsion<sup>[11]</sup> 基于 GW 模型改进了弹塑性接触、粘着力和摩擦模型, 简称 KE 模型。Jackson 和 Green<sup>[12]</sup> 提出了一种与 KE 模型类似的弹塑性接触模型, 该模型用材料的屈服强度代替材料的硬度, 因为材料的硬度会随着不断改变的接触几何条件和材料特性而变化。

### 3. 机械结合面分形模型的研究进展

1991 年 Majumdar 和 Bhushan 利用 Weierstrass-

Mandelbrot 分形函数<sup>[13,14]</sup>

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi \gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}}; 1 < D < 2; \gamma > 1 \quad (11)$$

和单峰实际接触面积大于  $A_{r_i}$  的参与接触粗糙峰点数<sup>[15-17]</sup>

$$N(A_{r_j} \geq A_{r_i}) = (A_{r_{i\max}} / A_{r_i})^{D/2} \quad (12)$$

首次提出了具有尺度独立性的粗糙表面弹塑性接触分形模型<sup>[18]</sup>, 简称 MB 模型。单个粗糙峰不受外

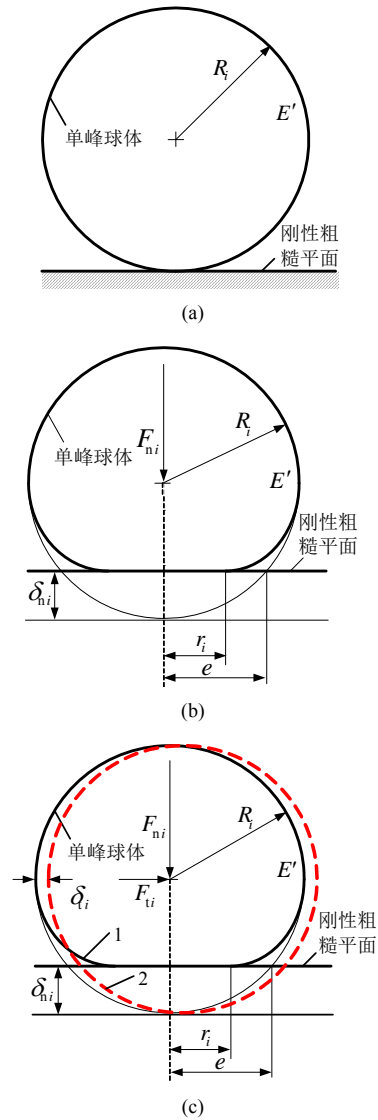


Figure 4. Hertzian elastic contact of single asperity: (a) Contact of asperity unaffected by external load; (b) Contact of asperity affected by normal load; (c) Contact of asperity affected by normal and tangential load<sup>[19-28]</sup>

图 4. 单个粗糙峰 Hertzian 弹性接触: (a) 不受外载荷单峰的接触; (b) 受法向载荷单峰的接触; (c) 受法向载荷和切向载荷单峰的接触<sup>[19-28]</sup>

载荷时, 单峰与刚性粗糙平面的接触状态如图 4(a)所示; 当受法向载荷时, 单峰与刚性粗糙平面的接触状态如图 4(b)所示; 当再受切向载荷时, 单峰与刚性粗糙平面的接触状态如图 4(c)所示, 此时单峰的形状由图示的实线位置 1 变为虚线位置 2。

Hertz 解<sup>[29,30]</sup>为

$$\delta_{ni} = \left\{ \frac{9}{16} \frac{1}{R_i} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 [F_{ni}(\delta_{ni})]^2 \right\}^{1/3} \quad (13)$$

$$r_i(\delta_{ni}) = \left[ \frac{3}{4} R_i \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) F_{ni}(\delta_{ni}) \right]^{1/3} \quad (14)$$

$$\delta_{ti} = \frac{3(1+\nu)(2-\nu) \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}{8r_i(\delta_{ni})} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{F_{ti}(\delta_{ti})}{\mu_s F_{ni}(\delta_{ni})} \right]^{2/3} \right\} \quad (15)$$

式中,  $F_{ni}(\delta_{ni})$  是作用在第  $i$  个接触粗糙峰上的法向载荷<sup>[31]</sup>;  $\delta_{ni}$  是第  $i$  个接触粗糙峰的法向接触弹性变形

量;  $F_{ti}(\delta_{ti})$  是作用在第  $i$  个接触粗糙峰上的切向载荷;  $\delta_{ti}$  是第  $i$  个接触粗糙峰的切向变形量;  $\nu$  是泊松比;  $\mu_s$  是静摩擦因数。

第  $i$  个接触粗糙峰与刚性粗糙平面接触的法向接触刚度、切向接触刚度<sup>[32,33]</sup>分别为

$$k_{ni} = \frac{dF_{ni}(\delta_{ni})}{d\delta_{ni}} = \frac{2E_1E_2\sqrt{A_{ti}}}{\sqrt{\pi}[(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1]} \quad (16)$$

$$k_{ti} = \frac{4E_1E_2}{(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1} \frac{\sqrt{A_{ti}}}{\sqrt{\pi}(1+\nu)(2-\nu)} \left( 1 - \frac{F_{ti}}{\mu_s F_n} \right)^{1/3} \quad (17)$$

式中,  $A_{ti}$  是第  $i$  个参与接触粗糙峰的实际接触面积。

在闭区间  $[A_{ti}, A_{ti} + dA_{ti}]$  上参与接触粗糙峰点数为

$$-dN = \frac{D}{2} \frac{A_{ti}^{D/2}}{A_{ti}^{(D+2)/2}} dA_{ti} > 0 \quad (18)$$

式中,  $D$  是粗糙表面的分形维数;  $A_{ti\max} = \max_{1 \leq i \leq m} A_{ti}$ 。

作用在整个粗糙表面上的法向载荷为

$$F_n = \begin{cases} \frac{DK\sigma_{0.2}A_{ti\max}^{D/2}}{2-D} A_c^{(2-D)/2} + \frac{4\sqrt{\pi}DE_1E_2G^{D-1}A_{ti\max}^{D/2}}{(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1} \frac{A_{ti\max}^{1.5-D} - A_c^{1.5-D}}{3(3-2D)} & \text{当 } 1 < D < 1.5 \text{ 或 } 1.5 < D < 2 \\ 3K\sigma_{0.2}A_{ti\max}^{3/4} A_c^{1/4} + \frac{\sqrt{\pi}E_1E_2G^{1/2}A_{ti\max}^{3/4}}{(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1} \ln \frac{A_{ti\max}}{A_c} & \text{当 } D = 1.5 \end{cases} \quad (19)$$

式中,  $G$  是粗糙表面的分形粗糙度, 单位为  $m$ 。

整个粗糙表面的法向接触刚度、切向接触刚度分别为

$$k_n = \sum_{i=m_p+1}^m k_{ni} = \int_{A_c}^{A_{ti\max}} k_{ni}(-dN) = \frac{2DE_1E_2A_{ti\max}^{D/2}}{(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1} \frac{A_{ti\max}^{(1-D)/2} - A_c^{(1-D)/2}}{\sqrt{\pi}(1-D)} \quad (20)$$

$$k_t = \frac{4DE_1E_2A_{ti\max}^{D/2}}{(1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1} \left( 1 - \frac{F_t}{\mu_s F_n} \right)^{1/3} \frac{A_{ti\max}^{(1-D)/2} - A_c^{(1-D)/2}}{\sqrt{\pi}(1+\nu)(2-\nu)(1-D)} \quad (21)$$

式(19)~式(21)的无量纲形式分别为

$$F_n^* = \begin{cases} K\phi \left( \frac{D}{2-D} \right)^{(2-D)/2} A_t^{*D/2} A_c^{*(2-D)/2} + \frac{4\sqrt{\pi}D}{3(3-2D)} \left( \frac{2-D}{D} \right)^{D/2} G^{*D-1} A_t^{*D/2} \\ \times \left[ \left( \frac{2-D}{D} A_t^* \right)^{1.5-D} - A_c^{*1.5-D} \right] & \text{当 } 1 < D < 1.5 \text{ 或 } 1.5 < D < 2 \\ 3K\phi \left( \frac{A_t^*}{3} \right)^{3/4} A_c^{*1/4} + \sqrt{\pi}G^{*1/2} \left( \frac{A_t^*}{3} \right)^{3/4} \ln \frac{A_t^*}{3A_c^*} & \text{当 } D = 1.5 \end{cases} \quad (22)$$

$$k_n^* = \frac{2(2-D)^{D/2} D^{(2-D)/2}}{\sqrt{\pi}(1-D)} A_r^{*D/2} \left[ \left( \frac{2-D}{D} A_r^* \right)^{(1-D)/2} - A_c^{*(1-D)/2} \right] \quad (23)$$

$$k_t^* = \frac{8(2-D)^{D/2} D^{(2-D)/2}}{\sqrt{\pi}(2-\nu)(1-D)} A_r^{*D/2} \left( 1 - \frac{F_t}{\mu_s F_n} \right)^{1/3} \left[ \left( \frac{2-D}{D} A_r^* \right)^{(1-D)/2} - A_c^{*(1-D)/2} \right] \quad (24)$$

式中,

$$F_n^* = \frac{F_n}{A_a} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$k_n^* = \frac{k_n}{\sqrt{A_a}} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$k_t^* = \frac{2(1+\nu)k_t}{\sqrt{A_a}} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$\phi = \sigma_{0.2} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

盛选禹等<sup>[34-36]</sup>根据 MB 模型采用 Hamilton 公式<sup>[37-39]</sup>使用 Tresca 屈服六边形条件<sup>[40]</sup>对静摩擦因数进行了预测。当粗糙表面承受法向载荷和切向载荷时, 静摩擦因数为

$$\mu_s = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)} \left[ A_r^* - \left( \frac{D}{2-D} \right)^{(2-D)/2} A_r^{*D/2} A_c^{*(2-D)/2} \right] \right. \\ & + \frac{32(2\nu-1)D}{3\sqrt{\pi}(6-3\nu)(3-2D)} \left( \frac{2-D}{D} \right)^{D/2} G^{*D-1} A_r^{*D/2} \\ & \times \left[ \left( \frac{2-D}{D} A_r^* \right)^{1.5-D} - A_c^{*1.5-D} \right] \Big] \div \left[ K\phi \left( \frac{D}{2-D} \right)^{(2-D)/2} \right. \\ & \times A_r^{*D/2} A_c^{*(2-D)/2} + \frac{4\sqrt{\pi}D}{3(3-2D)} \left( \frac{2-D}{D} \right)^{D/2} G^{*D-1} A_r^{*D/2} \\ & \left. \times \left[ \left( \frac{2-D}{D} A_r^* \right)^{1.5-D} - A_c^{*1.5-D} \right] \right] \\ & \text{当 } 1 < D < 1.5 \text{ 或 } 1.5 < D < 2 \\ & \left[ \frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)} \left[ A_r^* - \left( \frac{D}{2-D} \right)^{(2-D)/2} A_r^{*D/2} A_c^{*(2-D)/2} \right] \right. \\ & + \frac{8(2\nu-1)}{\sqrt{\pi}(6-3\nu)} G^{*1/2} \left( \frac{A_r^*}{3} \right)^{3/4} \ln \frac{A_r^*}{3A_c^*} \Big] \div [3K\phi \\ & \times \left( \frac{A_r^*}{3} \right)^{3/4} A_c^{*1/4} + \sqrt{\pi}G^{*1/2} \left( \frac{A_r^*}{3} \right)^{3/4} \ln \frac{A_r^*}{3A_c^*} ] \text{ 当 } D = 1.5 \end{aligned} \right. \quad (25)$$

MB 模型根据分形函数式(11)推导单峰顶曲率半径

$$R_i = \frac{A_{r_i}^{D/2}}{\pi^2 G^{D-1}} \quad (26)$$

不是常数, 但 GW 模型假定所有单峰顶曲率半径都等于同一个常数, 因此 MB 模型更符合实际。式(11)中的分形维数应满足  $1 < D < 2$ , 事实上式(11)是 1872 年 Weierstrass 提出如下函数<sup>[41]</sup>

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(2\pi b^k x); \quad 0 < a < 1 < b; \quad ab \geq 1 \quad (27)$$

的特例。陈辉等<sup>[42]</sup>采用式(11)模拟  $D = 2.5$  的单粗糙表面和  $D_1 = 2.1$ 、 $D_2 = 2.9$  的双分形表面, 所以他们得到 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数能很好地实现对分形表面模拟的结论是很可疑的<sup>[43]</sup>。在塑性载荷时 MB 模型忽略了各粗糙单峰间的相互作用力, Pullen 和 Williamson<sup>[44]</sup>考虑了这种相互作用力。

#### 4. 机械结合面有限元模型的研究进展

多项式运算简便, 随着项数的增多, 可以逼近任何一段光滑的函数曲线, 在有限单元法中单元上任意一点的位移函数一般采用多项式作为近似函数<sup>[45]</sup>。1994 年张杰和童忠钊<sup>[46]</sup>提出了理想结合面和矩形结合面元<sup>[47-51]</sup>的建模方法, 矩形结合面元 e 如图 5 所示, e 在  $Oxy$  平面内, 1234 为上子结构的下表面 e1, P 点为矩形 1234 的中心, 5678 为下子结构的上表面 e2。

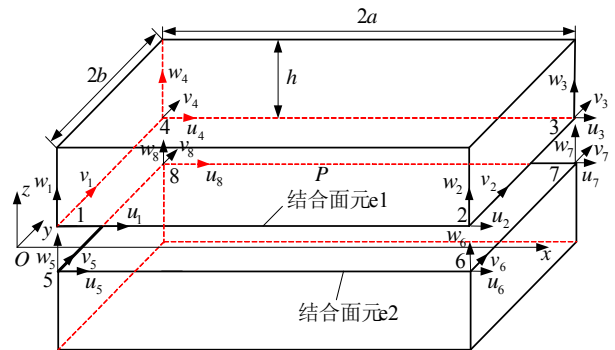


Figure 5. 4-node rectangle joint element e  
图 5.4 结点矩形结合面元 e

结点  $i$  的直角坐标、位移坐标、速度坐标分别为  $(x_i, y_i, z_i)$ 、 $(u_i, v_i, w_i)$ 、 $(\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i)$ 。e 上的位移函数、速度函数分别为

$N =$

$$\left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x-x_p}{a} \right) \left( 1 - \frac{y-y_p}{b} \right) \mathbf{I}_6 \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x-x_p}{a} \right) \left( 1 - \frac{y-y_p}{b} \right) \mathbf{I}_6 \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x-x_p}{a} \right) \left( 1 + \frac{y-y_p}{b} \right) \mathbf{I}_6 \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x-x_p}{a} \right) \left( 1 + \frac{y-y_p}{b} \right) \mathbf{I}_6 \right]$$

$$\delta^e = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_5 \ v_5 \ w_5 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_6 \ v_6 \ w_6 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_7 \ v_7 \ w_7 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ u_8 \ v_8 \ w_8]^T$$

弹性应力、阻尼应力分别为

$$\sigma = S\mathbf{f} \quad D = d\dot{\mathbf{f}} \quad (29)$$

当 e 发生了微小的虚位移时，相应的结点虚位移为  $\delta^{*e}$  [52]，虚位移函数为  $\mathbf{f}^*$ 。e 在结点力  $\mathbf{F}^e$  作用下，由虚位移原理得

$$(\delta^{*e})^T \mathbf{F}^e = \iint_D (\mathbf{f}^*)^T S\mathbf{f} dx dy + \iint_D (\mathbf{f}^*)^T d\dot{\mathbf{f}} dx dy \quad (30)$$

式中， $D = \{(x, y) | x_p - a \leq x \leq x_p + a, y_p - b \leq y \leq y_p + b\}$  是闭区域。

将上式展开得

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}\delta^e + \mathbf{C}\dot{\delta}^e \quad (31)$$

$$\mathbf{K} = \frac{ab}{9} \begin{bmatrix} 4S & 2S & S & 2S \\ 2S & 4S & 2S & S \\ S & 2S & 4S & 2S \\ 2S & S & 2S & 4S \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \frac{ab}{9} \begin{bmatrix} 4d & 2d & d & 2d \\ 2d & 4d & 2d & d \\ d & 2d & 4d & 2d \\ 2d & d & 2d & 4d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{yx} & s_{zx} & -s_{xx} & -s_{yx} & -s_{zx} \\ s_{yx} & s_{xx} & s_{zx} & -s_{yx} & -s_{xx} & -s_{zx} \\ s_{zx} & s_{zx} & s_{zz} & -s_{zx} & -s_{zx} & -s_{zz} \\ -s_{xx} & -s_{yx} & -s_{zx} & s_{xx} & s_{yx} & s_{zx} \\ -s_{yx} & -s_{xx} & -s_{zx} & s_{yx} & s_{xx} & s_{zx} \\ -s_{zx} & -s_{zx} & -s_{zz} & s_{zx} & s_{zx} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{yx} & d_{zx} & -d_{xx} & -d_{yx} & -d_{zx} \\ d_{yx} & d_{xx} & d_{zx} & -d_{yx} & -d_{xx} & -d_{zx} \\ d_{zx} & d_{zx} & d_{zz} & -d_{zx} & -d_{zx} & -d_{zz} \\ -d_{xx} & -d_{yx} & -d_{zx} & d_{xx} & d_{yx} & d_{zx} \\ -d_{yx} & -d_{xx} & -d_{zx} & d_{yx} & d_{xx} & d_{zx} \\ -d_{zx} & -d_{zx} & -d_{zz} & d_{zx} & d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{6 \times 1} = N_{6 \times 24} \delta^e; \quad \dot{\mathbf{f}}_{6 \times 1} = N_{6 \times 24} \dot{\delta}^e \quad (28)$$

式中， $\mathbf{f} = [u_{e1} \ v_{e1} \ w_{e1} \ u_{e2} \ v_{e2} \ w_{e2}]^T$

2004 年王世军等 [53] 提出了 6 结点等参数接触单元，认为结合面上任意一点的位移等于结合面元 e1、e2 上相应点的位移函数之差，推导了单元刚度矩阵。2007 年谢波 [54] 认为结合面由结点组成，结合面结点数等于结合面元上的结点数，结合面结点位移等于结合面元 e1、e2 上相应的结点位移之差，提出了柔度影响系数法，滑块和导轨的结合面单元如图 6 所示。

作用力或力矩方程为

$$f_{mm} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 k_{mij} [u_{ij} - u_{(i+4)j}]; \quad m = 1, 2, \dots, 8; \quad n = x, y \text{ 轴} \quad (32)$$

式中， $k_{mij}$  是刚度影响系数，是当只在第  $i$  和第  $i+4$  结点的  $j$  方向产生一相对单位位移时，在  $m$  结点的  $n$  方向需要施加的力的大小。

上式前 8 个方程的矩阵形式为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (33)$$

式中， $\mathbf{F}^e = [f_{1x} \ f_{1y} \ f_{2x} \ f_{2y} \ f_{3x} \ f_{3y} \ f_{4x} \ f_{4y}]^T$

$$\mathbf{U} = [u_{1x} - u_{5x} \ u_{1y} - u_{5y} \ u_{2x} - u_{6x} \ u_{2y} - u_{6y} \ u_{3x} - u_{7x} \ u_{3y} - u_{7y} \ u_{4x} - u_{8x} \ u_{4y} - u_{8y}]^T$$

位移方程为

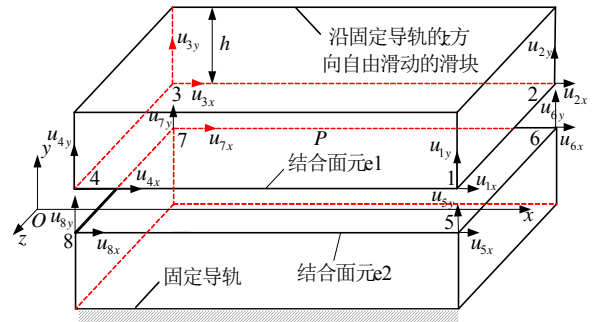


Figure 6. Joint interface composed of fixed guide way and slide  
图 6. 固定导轨和滑块的结合面



$$u_{mn} - u_{(m+4)n} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 d_{mnij} f_{ij}; m=1,2,3,4; n=x,y \text{轴} \quad (34)$$

$$U = DF^e \quad (35)$$

式中,  $d_{mnij}$  是柔度影响系数, 是当只在  $i$  结点的  $j$  方

$$D = 10^{-7} \times \begin{bmatrix} 0.3372 & 0.0528 & -0.2473 & -0.0919 & 0.1301 & -0.0942 & -0.1363 & 0.0787 \\ 0.0528 & 0.1408 & -0.0859 & -0.0053 & 0.0430 & -0.0763 & -0.0366 & 0.0121 \\ -0.2473 & -0.0859 & 0.3372 & 0.0528 & -0.1363 & 0.0787 & 0.1301 & -0.0942 \\ -0.0919 & -0.0053 & 0.0528 & 0.1408 & -0.0366 & 0.0121 & 0.0430 & -0.0763 \\ 0.1301 & 0.0430 & -0.1363 & -0.0366 & 0.3372 & -0.0528 & -0.2473 & 0.0919 \\ -0.0942 & -0.0763 & 0.0787 & 0.0121 & -0.0528 & 0.1408 & 0.0859 & -0.0053 \\ -0.1363 & -0.0366 & 0.1301 & 0.0430 & -0.2473 & 0.0859 & 0.3372 & -0.0528 \\ 0.0787 & 0.0121 & -0.0942 & -0.0763 & 0.0919 & -0.0053 & -0.0528 & 0.1408 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$K = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0.8791 & 0.2336 & 0.5758 & 0.4100 & -0.1094 & 0.3447 & -0.0356 & 0.1669 \\ 0.2336 & 1.1805 & 0.3425 & 0.0802 & -0.1505 & 0.6562 & -0.1825 & 0.0951 \\ 0.5758 & 0.3425 & 0.8574 & 0.2752 & -0.0467 & 0.1286 & -0.1055 & 0.3673 \\ 0.4100 & 0.0802 & 0.2752 & 1.2474 & -0.2240 & 0.1033 & -0.1702 & 0.7104 \\ -0.1094 & -0.1505 & -0.0467 & -0.2240 & 0.8070 & -0.1610 & 0.5558 & -0.4029 \\ 0.3447 & 0.6562 & 0.1286 & 0.1033 & -0.1610 & 1.3515 & -0.3261 & -0.0734 \\ -0.0356 & -0.1825 & -0.1055 & -0.1702 & 0.5558 & -0.3261 & 0.7828 & -0.2088 \\ 0.1669 & 0.0951 & 0.3673 & 0.7104 & -0.4029 & -0.0734 & -0.2088 & 1.4214 \end{bmatrix} \quad (37)$$

### 5. 机械结合面试验模型的研究进展

1993 年黄玉美等<sup>[55]</sup>定义结合面法向特性参数为单位面积法向刚度、单位面积法向阻尼, 获取结合面特性参数的装置如图 7 所示,  $f = F \sin(\omega t + \phi)$  是激励力,  $p_n$  是法向静面压应力。

结合面的作用力方程为

$$x_j(t) = x_2(t) - x_1(t) \quad (38)$$

$$C_n \dot{x}_j(t) + K_n x_j(t) = f_j = F_j \sin(\omega t + \phi) \quad (39)$$

式(39)的解为

$$x_j(t) = C e^{-\frac{K_n t}{C_n}} + \frac{F_j}{\sqrt{K_n^2 + \omega^2 C_n^2}} \sin\left(\omega t + \phi - \arctan \frac{\omega C_n}{K_n}\right) \quad (40)$$

上式等号右边的第 1 项是瞬态振动, 第 2 项是稳态振动, 忽略第 1 项, 可得结合面法向特性参数为

$$\text{单位面积法向刚度 } k_n = \frac{K_n}{S} = \frac{F_j \cos \phi_j}{X_j S} \text{ MPa/m} \quad (41)$$

$$\text{单位面积法向阻尼 } c_n = \frac{C_n}{S} = \frac{F_j \sin \phi_j}{\omega X_j S} \text{ MPa} \cdot \text{s/m} \quad (42)$$

向作用一单位力时, 在第  $m$  和第  $m+4$  结点的  $n$  方向引起的相对位移的大小。

结合面的柔度矩阵(单位为  $\text{m/N}$ )、刚度矩阵(单位为  $\text{N/m}$ )分别为

式中,  $K_n$ 、 $C_n$  分别是结合面的法向总刚度、总阻尼;  $S$  是结合面接触面积;  $X_j$  是结合面位移  $x_j$  的振幅;  $\phi_j$  是  $f_j$  与  $x_j$  的相位差。

当结合面材料为铸铁对贴塑, 磨削加工, 表面粗糙度为  $R_a 0.65 \mu\text{m}$ , 干燥接触,  $X_j/\lambda = (15\sim 30)\%$ ,  $\phi_j > \pi/2$  时, 特性参数为

$$k_n = 2.17 \times 10^{-4} p_n^{0.43} \omega^{0.66} X_j^{-0.67} \text{ MPa/m} \quad (43)$$

$$c_n = 5.7 \times 10^{-4} p_n^{-0.47} \omega^{-0.95} X_j^{-0.35} \text{ MPa} \cdot \text{s/m} \quad (44)$$

1996 年黄玉美等<sup>[56]</sup>提出了如下结合面切向特性参数

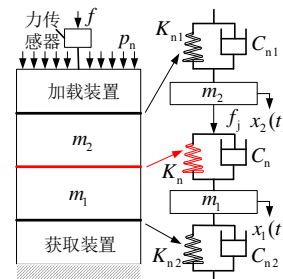


Figure 7. Apparatus acquiring joint interface's characteristic parameters

图 7. 获取结合面特性参数的装置

$$c_\tau = \frac{C_\tau}{S} = \frac{F_\tau \sin \varphi_\tau}{\omega X_\tau S} \text{ MPa} \cdot \text{s/m} \quad (45)$$

当结合面材料为铸铁对贴塑，磨削加工，表面粗糙度为  $R_a$  0.65  $\mu\text{m}$ ，干燥接触， $X_\tau/\lambda_n = (2\sim 15)\%$  时，特性参数为

$$c_\tau = 1.1318 \times 10^{-2} p_n^{-0.317} \omega^{0.105} X_\tau^{-0.404} \text{ MPa} \cdot \text{s/m} \quad (46)$$

2002 年张广鹏等<sup>[57]</sup>提出了如下结合面的通用特性公式<sup>[58]</sup>

$$\text{法向刚度} \quad k_n = \alpha_n p_n^{\beta_n} \omega^{\gamma_n} X_n^{\eta_n} \quad (47)$$

$$\text{切向刚度} \quad k_\tau = \alpha_\tau p_n^{\beta_\tau} \omega^{\gamma_\tau} X_\tau^{\eta_\tau} \quad (48)$$

$$\text{法向阻尼} \quad c_n = \alpha_{nc} p_n^{\beta_{nc}} \omega^{\gamma_{nc}} X_n^{\eta_{nc}} \quad (49)$$

$$\text{切向阻尼} \quad c_\tau = \alpha_{\tau c} p_n^{\beta_{\tau c}} \omega^{\gamma_{\tau c}} X_\tau^{\eta_{\tau c}} \quad (50)$$

给出了如下仿形立柱移动加工中心的一组特性参数

$$k_n = 1.45 \times 10^{-3} p_n^{0.278} \omega^{0.228} X_n^{-0.462} \quad (51)$$

$$k_\tau = 4.84 p_n^{0.023} \omega^{-0.814} X_n^{-0.077} \quad (52)$$

$$c_n = 2.79 \times 10^{-10} p_n^{-0.121} \omega^{1.771} X_n^{-0.621} \quad (53)$$

$$c_\tau = 6.39 \times 10^{-11} p_n^{-0.050} \omega^{1.510} X_n^{-0.496} \quad (54)$$

## 6. 存在的问题分析及结论

1) GW 模型没有给出计算的理论模型图，没有指出在变形的过程中究竟哪种参数是不变的，哪种参数是变化的。给出了塑性指数表达式(5)，同样没有给出参数的变化性质。Whitehouse、Archard 与 GW 模型的作者交流之后，1970 年提出了随机表面的接触模型<sup>[59]</sup>，遗憾的是该文也没有给出计算的理论模型图。

2) MB 模型利用 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数和单峰实际接触面积大于  $A_{ri}$  的参与接触粗糙峰点数，给出了一系列比较彻底的计算公式，被引用率极高。分形维数应满足  $1 < D < 2$ ，这大大限制了 MB 模型的应用范围。MB 模型假定单峰的最小实际接触面积  $A_{ri\min} = 0$ ，由式(12)可得下列 2 种极端情况

$$\begin{cases} N_t(A_j \geq A_{ri\min}) = (A_{ri\max}/A_{ri\min})^{D/2} = +\infty \\ N(A_j \geq A_{ri\max}) = (A_{ri\max}/A_{ri\max})^{D/2} = 1 \end{cases} \quad (55)$$

第 1 种情况表明参与接触的粗糙峰点数为  $+\infty$ <sup>[60]</sup>，这显然不符合实际；第 2 种情况表明具有最大实际接触

面积的粗糙峰点数为 1<sup>[61]</sup>，这也不符合实际。事实上由式(12)可得参与接触粗糙峰点数的概率分布密度<sup>[62]</sup>(单位为  $\text{m}^{-2}$ )

$$\varphi(A_{ri}) = \frac{-dN/N_i}{dA_{ri}} = \frac{D}{2} A_{ri\min}^{D/2} A_{ri}^{-(D+2)/2} \quad (56)$$

应满足

$$\int_{A_{ri\min}}^{A_{ri\max}} \varphi(A_{ri}) dA_{ri} = 1 - \left( \frac{A_{ri\min}}{A_{ri\max}} \right)^{D/2} = 1 \quad (57)$$

若取  $A_{ri\min} = 0.01A_{ri\max}$ ，上式能近似满足。

3) 张学良等根据 MB 模型推导整个粗糙表面的法向接触刚度。在闭区间  $[A_{ri}, A_{ri} + dA_{ri}]$  上有  $-dN$  条并联的虚拟弹簧，或在两粗糙表面间随机分布  $m - m_p$  条能够继续承受法向载荷的并联虚拟弹簧，如图 8 所示<sup>[63]</sup>，故

$$k_n = \sum_{i=m_p+1}^m k_{ni} = \int_{A_c}^{A_{ri\max}} k_{ni} (-dN) \quad (58)$$

事实上将并联弹簧刚度直接代数相加得到等效刚度的处理方法应该有一定的条件。图 9 所示系统的等效刚度<sup>[64]</sup>为

$$k = (a+b)^2 k_1 k_2 / (a^2 k_1 + b^2 k_2) \quad (59)$$

假定

$$k = k_1 + k_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (60)$$

所以将并联弹簧刚度直接代数相加得到等效刚度的条件是图 8 中变形后的弹性粗糙表面 2 与初始位置平行。

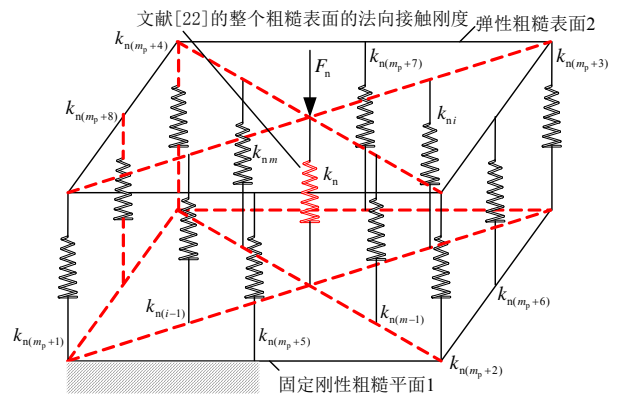


Figure 8.  $m - m_p$  parallel virtual springs supporting normal load  
图 8.  $m - m_p$  条能承受法向载荷的并联虚拟弹簧



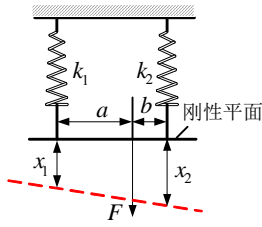


Figure 9. Parallel system without algebraically adding stiffnesses  
图 9. 不能将刚度代数相加的并联系统

4) 处理数据的方法不同带来的误差也不同。按照文献[54]得到结点力和结合面结点位移的一组离散点, 应用最小二乘法, 求出多项式的拟合曲线<sup>[65,66]</sup>, 例如结点力  $f_{1x}$  和结合面结点位移  $u_{3x} - u_{7x}$  的关系如图 10 所示。

加载、卸载的多项式拟合曲线方程分别为

$$u_j(f) = -0.0184f^4 + 0.3066f^3 - 0.9577f^2 + 9.2049f - 0.0000$$

$$u_x(f) = 0.0192f^4 - 0.1350f^3 - 0.2039f^2 + 12.3044f + 0.3000$$

$$u_j(0.001) = 0.0092 \mu\text{m} \Rightarrow d_{j1x3x} = 0.092 \times 10^{-7} \text{ m/N} \quad (61)$$

$$u_x(0.001) = 0.3123 \mu\text{m} \Rightarrow d_{x1x3x} = 3.123 \times 10^{-7} \text{ m/N} \quad (62)$$

而式(36)取

$$d_{1x3x} = 0.1301 \times 10^{-7} \text{ m/N} \quad (63)$$

图 10 只取了 5 个离散点, 如果随着离散点的增加, 相信误差会减小。

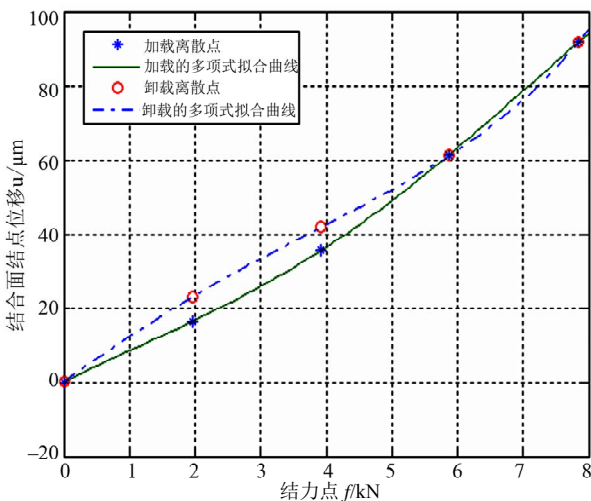


Figure 10. Relation between node force and joint interface's node displacement  
图 10. 结点力和结合面结点位移的关系

5) 研究机械结合面, 第一要建立机械结合面接触模型, 第二要给出识别参数的具体方法。截止目前为止, 有关机械结合面一系列最基本的大小问题还没有妥善地解决。大问题如两粗糙表面间的法向刚度矩阵、法向阻尼矩阵能否简单地用 1 个法向刚度、1 个法向阻尼如式(20)、式(41)、式(42)来简化, 两粗糙表面间的切向刚度矩阵、切向阻尼矩阵能否简单地用 1 个切向刚度、1 个切向阻尼如式(45)、式(48)、式(50)来简化; 小问题如图 7 中的正弦激励力  $f$  与结合面动态力  $f_j$  具有怎样的关系, 假定  $f$  是正弦激励力但  $f_j$  不是简谐激励力, 式(41)、式(42)还成立吗? 也就是式(41)、式(42)、式(47)~式(50)都缺乏严格的数学证明, 甚至有些结果存在着自相矛盾的情况如式(48)与式(52)、式(50)和式(54)。要达到文献[55]提出的“结合面特性参数应反映结合面的基本特性, 具有通用性, 类似零件的特性常数如弹性模量、损耗因子, 能方便地供设计解析使用”这一目标, 道路依然还很漫长。

### 参考文献 (References)

- [1] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理(3 版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008: 219.
- [2] J. A. Greenwood, J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. Proceedings of the Royal Society of London, 1966, 295(1442): 300-319.
- [3] S. Ray, S. K. Roy Chowdhury. Prediction of flash temperature at the contact between sliding bodies with nanoscale surface roughness. ASME Journal of Tribology, 2007, 129(3): 467-480.
- [4] J. Jamari, M. B. de Rooij and D. J. Schipper. Plastic deterministic contact of rough surfaces. ASME Journal of Tribology, 2007, 129(4): 957-962.
- [5] C.-H. Lee, A. A. Polycarpou. Static friction experiments and verification of an improved elastic-plastic model including roughness effects. ASME Journal of Tribology, 2007, 129(4): 754-760.
- [6] 濮良贵, 纪名刚. 机械设计(7 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 44.
- [7] 饶柱石, 夏松波, 汪光明. 粗糙平面接触刚度的研究[J]. 机械强度, 1994, 16(2): 71-75.
- [8] W.-R. Chang, I. Etsion and D. B. Bogy. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. ASME Journal of Tribology, 1987, 109(2): 257-263.
- [9] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 82.
- [10] 赵亚溥, 王立森, 孙克豪. Tabor 数、粘着数与微尺度粘着弹性接触理论[J]. 力学进展, 2000, 30(4): 529-537.
- [11] L. Kogut, I. Etsion. A static friction model for elastic-plastic contacting rough surfaces. ASME Journal of Tribology, 2004, 126(1): 34-40.
- [12] R. L. Jackson, I. Green. A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat. ASME Journal of Tribology, 2005, 127(2): 343-354.
- [13] M. V. Berry, Z. V. Lewis. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. Proceedings of the Royal Society of London, 1980, 370(1743): 459-484.
- [14] A. Majumdar, C. L. Tien. Fractal characterization and simulation

- of rough surfaces. *Wear*, 1990, 136(2): 313-327.
- [15] A. Majumdar, B. Bhushan. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 1990, 112(2): 205-216.
- [16] B. Mandelbrot. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 1967, 156(3775): 636-638.
- [17] A. Majumdar, C. L. Tien. Fractal characterization and simulation of rough surfaces. *Wear*, 1990, 136(2): 313-327.
- [18] A. Majumdar, B. Bhushan. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 1991, 113(1): 1-11.
- [19] J. A. Greenwood, J. H. Tripp. The elastic contact of rough spheres. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1967, 34(1): 153-159.
- [20] 张学良, 温淑花. 基于接触分形理论的结合面切向接触刚度分形模型[J]. *农业机械学报*, 2002, 33(3): 91-93, 97.
- [21] 张学良, 温淑花, 徐格宁等. 结合部切向接触刚度分形模型研究[J]. *应用力学学报*, 2003, 20(1): 70-72.
- [22] 张学良, 黄玉美, 傅卫平等. 粗糙表面法向接触刚度的分形模型[J]. *应用力学学报*, 2000, 17(2): 31-35.
- [23] 张学良, 黄玉美, 韩颖. 基于接触分形理论的机械结合面法向接触刚度模型[J]. *中国机械工程*, 2000, 11(7): 727-729.
- [24] 张学良, 黄玉美, 温淑花. 结合面接触刚度分形模型研究[J]. *农业机械学报*, 2000, 31(4): 89-91.
- [25] 温淑花, 张学良, 武美先等. 结合面法向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. *农业机械学报*, 2009, 40(11): 197-202.
- [26] 温淑花, 张学良, 文晓光等. 结合面切向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. *农业机械学报*, 2009, 40(12): 223-227.
- [27] 兰国生, 张学良, 丁红钦等. 基于分形理论的结合面改进接触模型[J]. *农业机械学报*, 2011, 42(10): 217-223, 229.
- [28] 兰国生, 张学良, 丁红钦等. 基于分形理论的结合面静摩擦因数改进模型[J]. *农业机械学报*, 2012, 43(1): 213-218.
- [29] Z. Q. Liu, J. Sun and W. D. Shen. Critical load analysis for a layered half-space under sliding indentation. *Tribology Transactions*, 2006, 49(4): 513-525.
- [30] H. Zahouani, M. Assoul, R. Vargiolu, et al. The morphological tree transform of surface motifs. Incidence in tribology. *International Journal of Machine Tools & Manufacture Design, Research and Application*, 2001, 41(13-14): 1961-1979.
- [31] W.-R. Chang, I. Etsion and D. B. Bogy. Adhesion model for metallic rough surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 1988, 110(1): 50-56.
- [32] S.-M. Kim, J.-H. Ha, S.-H. Jeong, et al. Effect of joint conditions on the dynamic behavior of a grinding wheel spindle. *International Journal of Machine Tools & Manufacture Design, Research and Application*, 2001, 41(12): 1749-1761.
- [33] 黎明, 温诗铸. 纳米压痕技术理论基础[J]. *机械工程学报*, 2003, 39(3): 142-145.
- [34] 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. *中国机械工程*, 1998, 9(7): 16-18.
- [35] 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸. 相对湿度对几种摩擦副静摩擦系数的影响[J]. *摩擦学学报*, 2001, 21(1): 42-46.
- [36] 盛选禹. 基于分形接触的湿度对静摩擦因数影响分析[J]. *菏泽学院学报*, 2006, 28(5): 32-36.
- [37] W.-R. Chang, I. Etsion and D. B. Bogy. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 1988, 110(1): 57-63.
- [38] G. M. Hamilton. Explicit equations for the stresses beneath a sliding spherical contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1983, 197C: 53-59.
- [39] G. M. Hamilton, L. E. Goodman. The stress field created by a circular sliding contact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2): 371-376.
- [40] 杨桂通. 弹塑性力学引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [41] 李水根. 分形[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [42] 陈辉, 胡元中, 王慧等. 粗糙表面分形特征的模拟及其表征[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(9): 219-223.
- [43] 郁伯铭. 多孔介质输运性质的分形分析研究进展[J]. *力学进展*, 2003, 33(3): 333-346.
- [44] J. Pullen, J. B. P. Williamson. On the plastic contact of rough surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1972, 327(1569): 159-173.
- [45] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [46] 张杰, 童忠飏. 机床固定结合面动力学建模问题[J]. *振动与冲击*, 1994, 51(3): 15-22.
- [47] 张杰. 复杂机械结构结合面动力学建模及其参数识别方法的研究[J]. *机械强度*, 1996, 18(2): 1-5.
- [48] 童忠飏, 张杰. 加工中心立柱床身结合面动态特性研究及参数识别[J]. *振动与冲击*, 1992, 43(3): 13-19.
- [49] 张杰, 童忠飏. 建立有阻尼振动系统低阶高精度动力学模型的方法[J]. *振动与冲击*, 1993, 47(3): 8-15.
- [50] 吴志坚, 贾宝贤, 刘永红. 固定结合面参数的计算机模拟计算[J]. *石油大学学报*, 2000, 24(2): 82-85.
- [51] 吴筱坚. 机床固定结合面的一种建模方法[J]. *机械科学与技术*, 2002, 21(3): 439-441.
- [52] 黄炎. 工程弹性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [53] 王世军, 黄玉美, 赵金娟等. 机床导轨结合部的有限元模型[J]. *中国机械工程*, 2004, 15(18): 1634-1636.
- [54] 谢波. 滚动直线导轨副可动结合部的动力学建模[D]. 武汉: 华中科技大学硕士学位论文, 2007.
- [55] 黄玉美, 付卫平, 董立新等. 结合面法向动态特性参数研究[J]. *机械工程学报*, 1993, 29(3): 74-78.
- [56] Y. M. Huang, W. P. Fu and J. X. Tong. A method of acquiring applied tangential damping parameters of joint surfaces. *Journal of Xi'an University of Technology*, 1996, 12(1): 1-5.
- [57] 张广鹏, 史文浩, 黄玉美. 机床导轨结合部的动态特性解析方法及其应用[J]. *机械工程学报*, 2002, 38(10): 114-117.
- [58] 马建辉, 张广鹏, 雷晓强. 机床圆柱结合部的动态特性解析方法[J]. *机床与液压*, 2002, 5: 140-142.
- [59] D. J. Whitehouse, J. F. Archard. The properties of random surfaces of significance in their contact. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1970, 316(1524): 97-121.
- [60] 贺林, 朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展[J]. *摩擦学学报*, 1996, 16(4): 375-384.
- [61] 张铁山, 张友良, 阎辉. 成形板料表面的接触分形几何模型研究[J]. *中国机械工程*, 2004, 15(11): 965-968.
- [62] 沈恒范. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
- [63] 张宇, 廖伯瑜. 机床结合部参数的有效识别方法[J]. *昆明理工大学学报*, 1998, 23(2): 36-41.
- [64] 程耀东, 李培玉. 机械振动学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2006.
- [65] 张志涌. 精通 MATLAB6.5 版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.
- [66] 周金萍, 王冉, 吴斌. MATLAB6 实践与提高[M]. 北京: 中国电力出版社, 2002.