第二章　压力容器应力分析

CHAPTER Ⅱ
STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS

第二节　厚壁圆筒应力分析

主要内容

2.2.1 弹性应力

2.2.2 弹塑性应力

2.2.3 屈服压力和爆破压力

2.2.4 提高屈服承载能力的措施

2.2.2 弹塑性应力

一、弹塑性应力

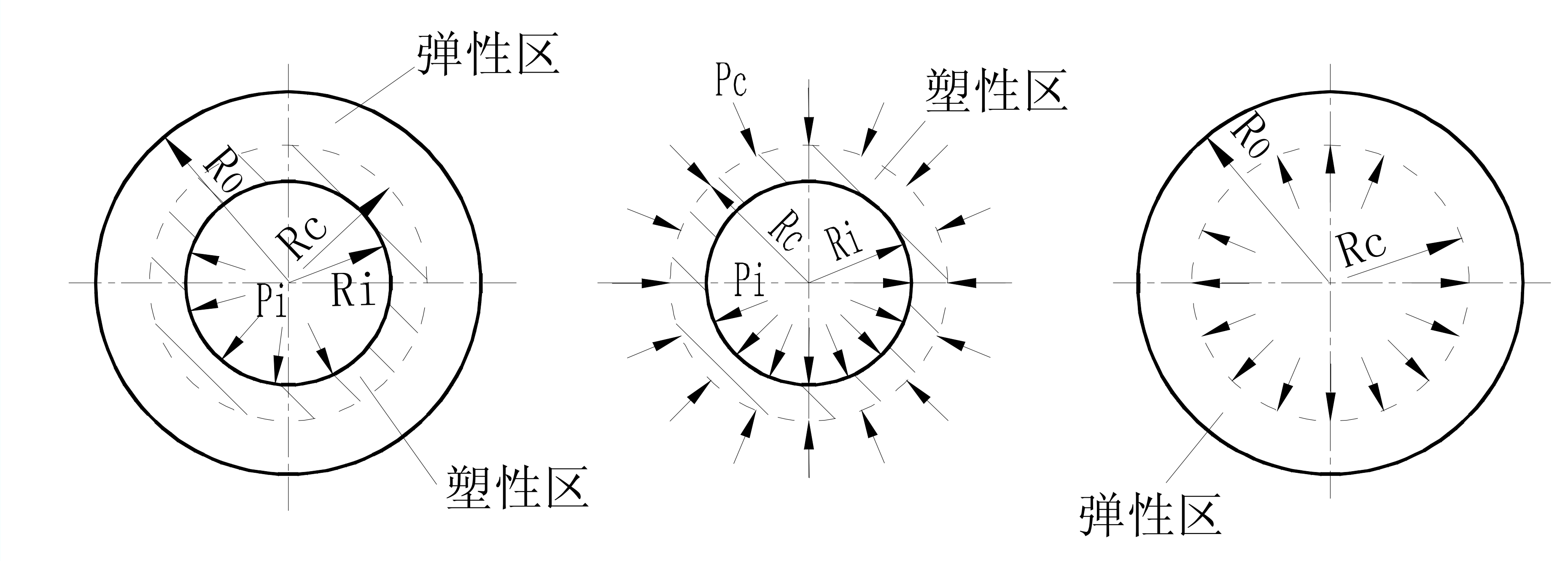


图2-22 处于弹塑性状态的厚壁圆筒

内压 → 塑性区 弹性区

描述弹塑性厚壁圆筒的几何与载荷参数：

$$R_i, P_i; R_c, P_c; R_o, P_o$$

本小节的目的：求弹性区和塑性区里的应力

材料假设：

理想弹塑性

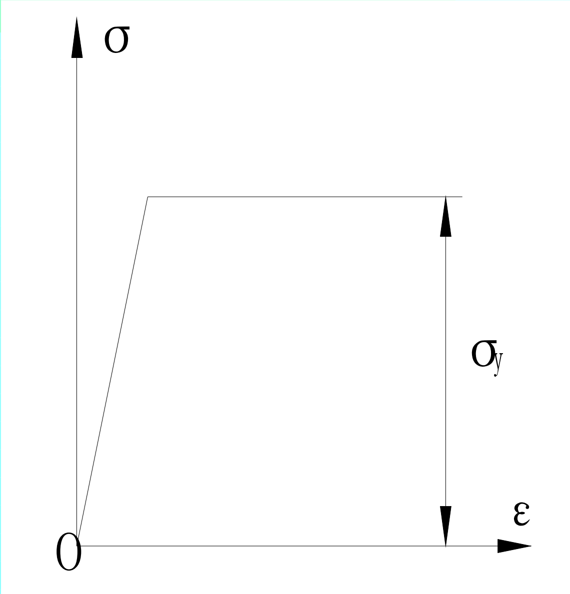


图**2-23** 理想弹-塑性材料的应力-应变关系

1、塑性区应力

平衡方程：$$\sigma_\theta - \sigma_r = r\frac{d\sigma_r}{dr} \quad (2\text{-}26)$$

Mises屈服

失效判据：$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \quad (2\text{-}40)$$

联立 积分

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln r + A \quad (2\text{-}41)$$

$r = R_i : \sigma_r = -p_i$

内壁边界条件，

求出A后带回上试

$$\boxed{\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\frac{r}{R_i} - p_i} \quad (2\text{-}42)$$

带入（2-40）

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(1 + \ln\frac{r}{R_i}\right) - p_i} \quad (2\text{-}43)$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\ln\frac{r}{R_i}\right) - p_i} \quad (2\text{-}44)$$

$r = R_c : \sigma_r = -p_c$

$$\boxed{p_c = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\frac{R_c}{R_i} + p_i} \quad (2\text{-}45)$$

2、弹性区应力

弹性区内壁处于屈服状态:

$$(\sigma_\theta)_{r=R_c} - (\sigma_r)_{r=R_c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

$K_c=R_o/R_c$

表2-1拉美公式

$$p_c = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_0^2 - R_c^2}{R_0^2} \qquad (2\text{-}46)$$

与2-45联立

导出弹性区与塑性区交界面的p_i与R_c的关系

$$p_i = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{R_c^2}{R_0^2}+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right) \qquad (2\text{-}47)$$

（2-34）

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}\left(1-\frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}\left(1+\frac{R_0^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{R_c^2}{R_0^2}$$

若按屈雷斯卡（H. Tresca）屈服失效判据，也可导出类似的上述各表达式。各种应力表达式列于表 2-4 中

二、残余应力

当厚壁圆筒进入弹塑性状态后卸除内压力p_i → 残余应力

思考：残余应力是如何产生的？

卸载定理 卸载时应力改变量 $\Delta\sigma=\sigma-\sigma'$ 和应变的改变量 $\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon'$ 之间存在着弹性关系 $\Delta\varepsilon=\Delta\sigma/E$ 。

思考：残余应力该如何计算？

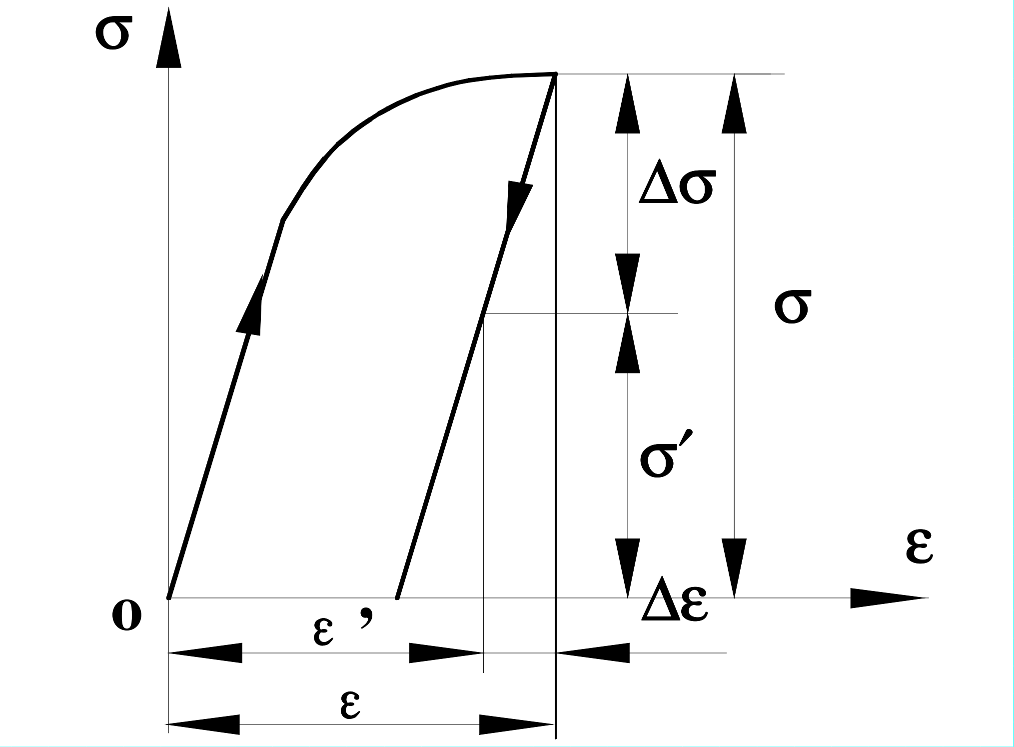


图2-24 卸载过程的应力和应变

2.2.2 弹塑性应力

基于Mises屈服准则的塑性区（$R_i \leqslant r \leqslant R_c$）中的残余应力为

$$\sigma_\theta' = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{1+\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{r}{R_c}-\frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1+\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma_r' = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2-1+2\ln\frac{r}{R_c}-\frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma_z' = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{r}{R_c}-\frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

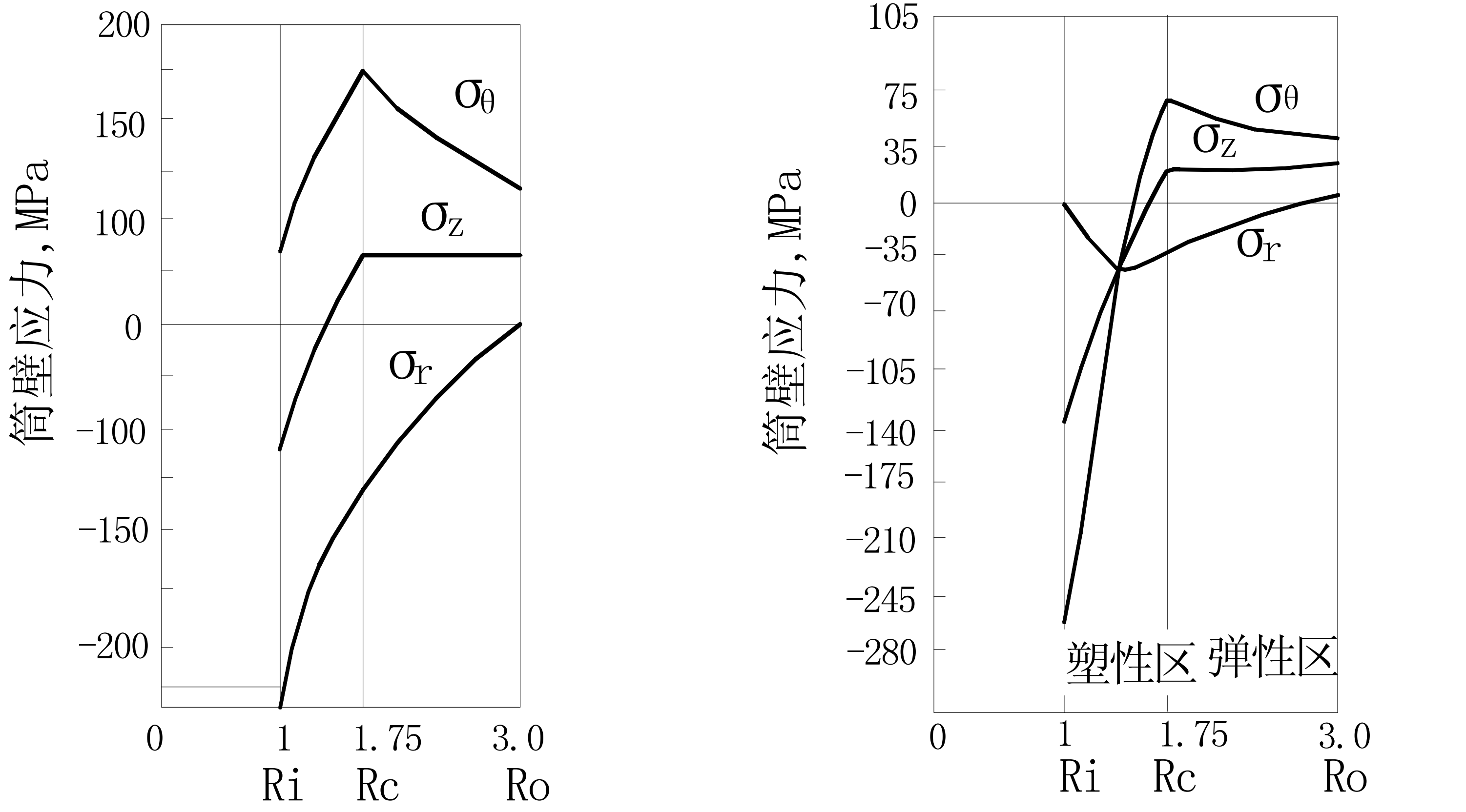
（2-49）

弹性区（$R_c \leqslant r \leqslant R_0$）中的残余应力为

$$\sigma'_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[1+\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\}$$

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2+2\ln\frac{R_c}{R_i}\right]\right\} \quad (2\text{-}50)$$

$$\sigma'_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - \frac{R_i^2}{R_0^2-R_i^2}\left[1-\left(\frac{R_0}{R_c}\right)^2+2\ln\frac{R_0}{R_i}\right]\right\}$$



a. 加载时的应力分布

b. 卸载后的残余应力

图2-25 弹-塑性区的应力分布

2.2.3 屈服压力和爆破压力

爆破过程

OA：弹性变形阶段

AC：弹塑性变形阶段（壁厚减薄+材料强化）

C: 塑性垮塌压力（**Plastic Collapse Pressure**）——容器所能承受的最大压力

D: 爆破压力（**Bursting Pressure**）

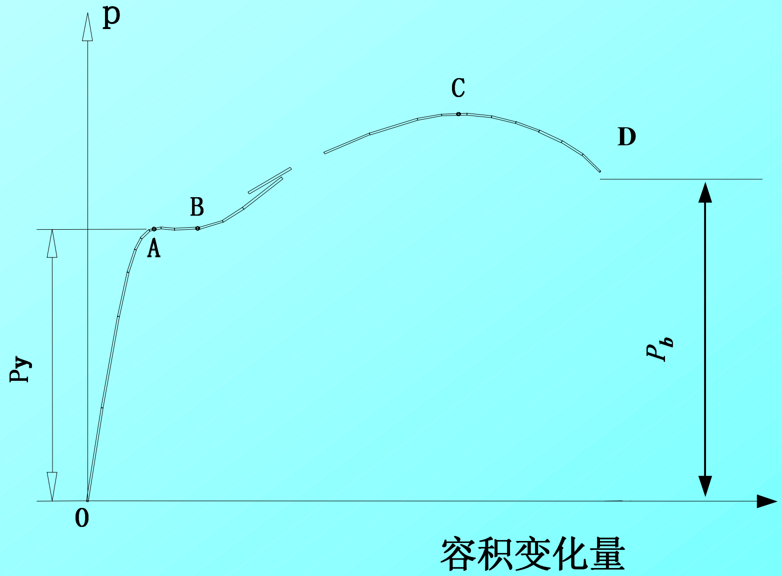


图2-26 厚壁圆筒中压力与变形关系

屈服压力

（1）初始屈服压力

令 $p_i = p_s$ ，得基于米塞斯屈服失效判据的圆筒初始屈服压力 p_s 。

$$p_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{K^2 - 1}{K^2} \qquad (2\text{-}51)$$

（2）全屈服压力

当筒壁达到整体屈服状态时所承受的压力，称为圆筒全屈服压力或极限压力（**Limit pressure**），用 p_{so} 表示。

令$\boldsymbol{R_c=Ro}$，得

$$p_{so} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \ln K \qquad (2\text{-}52)$$

● 不要把全屈服压力和塑性垮塌压力等同起来。前者假设材料为理想弹塑性，后者利用材料的实际应力应变关系。

爆破压力

厚壁圆筒爆破压力的计算公式较多，但真正在工程设计中应用的并不多，最有代表性的是福贝尔（**Faupel**）公式。

爆破压力的上限值为

$$p_{b\max}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_b\ln K$$

下限值为

$$p_{b\min}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\ln K$$

且爆破压力随材料的屈强比 σ_s/σ_b 呈线性变化规律。

于是，福贝尔将爆破压力$\boldsymbol{p_b}$归纳为 $p_b=p_{b\min}+\frac{\sigma_s}{\sigma_b}\left(p_{b\max}-p_{b\min}\right)$

即：

$$\boxed{p_b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(2-\frac{\sigma_s}{\sigma_b}\right)\ln K}\qquad\text{（2-53）}$$

2.2.4 提高屈服承载能力的措施

增加壁厚：　径比大到一定程度后效果不明显；

对圆筒施加外压：　效果难以保证；

自增强：　通过超工作压力处理，由筒壁自身外层材料的弹性收缩引起残余应力。工程上常用。