

Effects of Asymmetrical Motion Curve on Contact Stress of the Cam Mechanisms*

Kuan-Lwun Shu, Chia-Rong Hsu, Long-Iong Wu

Department of Power Mechanical Engineering, National Tsing Hua University, Hsinchu
Email: kaunlwun.shu@gmail.com, skillsaveload@hotmail.com, liwu@pme.nthu.edu.tw

Received: Apr. 19th, 2013; revised: May 16th, 2013; accepted: May 24th, 2013

Copyright © 2013 Kuan-Lwun Shu et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: By applying the asymmetrical motion curve, the kinematic characteristics of the follower motion of the cam mechanism can be improved. This paper also investigates the effects of asymmetrical motion curve on the induced contact stress of the mechanism. The results show that the follower motion will have lower maximum deceleration when the cam angle of the deceleration interval is larger than that of the acceleration interval, and in such condition, it may lead to a smaller extreme resulting load caused by the spring force and inertia forces. The asymmetrical ratio of motion curve must be properly specified so as to obtain optimum benefits of the contact stress.

Keywords: Follower Compression Spring Design; Asymmetrical Motion Curve; Contact Stress

非对称运动曲线对凸轮机构接触应力之影响*

徐冠伦, 许家荣, 吴隆庸

国立清华大学动力机械工程学系, 新竹
Email: kaunlwun.shu@gmail.com, skillsaveload@hotmail.com, liwu@pme.nthu.edu.tw

收稿日期: 2013年4月19日; 修回日期: 2013年5月16日; 录用日期: 2013年5月24日

摘要: 藉由应用非对称的运动规律, 从动件之运动特性得以改善。本文同时探讨非对称的运动规律对凸轮与从动件之工作表面间的接触应力的影响。根据本文所归纳出的结果, 当减速区所占的凸轮旋转角大于加速区所占的凸轮旋转角时, 可降低减速度的极值, 同时可降低减速区时弹簧力与惯性力所造成的负载。然而, 加速区与减速区所占的凸轮旋转角必需适当的分配, 以避免过度减少加速区所占的凸轮旋转角, 使得加速区的惯性力剧增, 进而导致相应增加的接触应力对凸轮轮廓产生严重的破坏。

关键词: 回位弹簧设计; 非对称运动规律; 接触应力

1. 引言

对于力量封闭类型(Force-Closed)的凸轮机构而言, 从动件通常需要利用回位弹簧的锁合力来维持与凸轮间的接触关系。当回位弹簧所提供的锁合力小于从动件的惯性力时, 从动件将会脱离凸轮轮廓而产生

所谓的腾跳(jump)的现象^[1-3]。因此, 回位弹簧的刚性必须适当地被设计以确保在任何机构位置上都维持从动件与凸轮的接触关系。

回位弹簧刚性的计算^[4]通常取决于从动件之惯性力的变化与大小。当从动件之惯性力较大时, 则必须同时增加回位弹簧的刚性或预压量。然而, 当回位弹簧的刚性提高时, 此时需要较大的驱动扭矩来推动凸

*资助信息: 本研究承蒙国科会计划补助, 计划编号: NSC-101-2221-E-007-005, 特此致谢。

轮。此外，由于凸轮与从动件间属于接触面积较小的高副(Higher pair)，若当施加的负载过大时，会造成接触表面产生极大的接触应力。因此，本文将说明如何采用非对称的运动规律来改善从动件之运动特性与受力状态^[5]，减少惯性力与弹簧力对从动件系统所产生的负载，同时降低凸轮与从动件之工作表面间的接触应力。

2. 回位弹簧的设计

图1所示为凸轮机构在运动过程中之弹簧力与惯性力之关系。当从动件位于初始位置，会因轮廓误差与系统本身的挠性而产生振动，若振动尚未停止又重新激发，将导致弹簧在初始位置的预压力不足。因此，当设计预压弹簧力时需考虑残留振动的影响^[4]。若考虑残留振动，预压力 F_p 大小可利用最大惯性力 $-M\ddot{S}_{min}$ 乘以一个预压系数 λ 来估算：

$$F_p = -\lambda M\ddot{S}_{min} \quad (1)$$

其中，预压系数 λ 的参考范围为：

$$\lambda = 0.45 \sim 0.65 \quad (2)$$

从动件在推程或回程之非休止期间，若将凸轮的转速提升，则很可能会因为残留振动产生的惯性力大于弹簧拘束力造成凸轮与从动件分离，因此必须考虑从动件实际加速度来设计回位弹簧。所以在从动件承受最大惯性力 $-M\ddot{S}_{min}$ 之位置时，给定安全系数 Γ 用以决定此时所需提供的弹簧力，此时弹簧力应满足下列条件：

$$H^* = \Gamma(-M\ddot{S}_{min}) \quad (3)$$

其中，安全系数 Γ 依凸轮转速高低而有所不同，一般

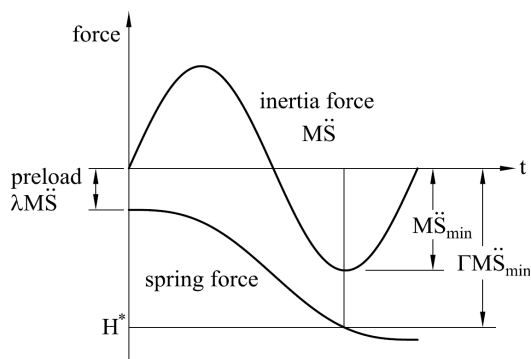


Figure 1. Follower compression spring design
图 1. 从动件回位弹簧的设计

而言，当凸轮机构低转速运作时， $\Gamma = 1.2 \sim 1.4$ ，而凸轮机构高转速运作时，必须考虑因振动所导致实际加速度较理想数值大时，安全系数 $\Gamma = 2 \sim 2.5$ 。由方程式(1)与(3)，弹簧系数 k 可用下列式子计算：

$$k = \frac{H^* - F_p}{\bar{S}} = \frac{-M\ddot{S}_{min}(\Gamma - \lambda)}{\bar{S}} \quad (4)$$

其中 \bar{S} 表示当加速度为最小值时位移曲线 S 之函数值。由上式可知，回位弹簧的刚性会与从动件位于减速区时的加速度有关。因此，在不改变任何运动条件的前提下，若能有效降低从动件位于减速区时的加速度的极值，则可同时降低对回位弹簧刚性的需求。

3. 非对称运动规律

非对称运动规律是指从动件之运动规律的加速区与减速区所分配的凸轮旋转角不相等的情况。若给定一非对称运动规律，如图2所示，其完整运动规律所占的凸轮旋转角为 β ，从动件的冲程量为 h ，加速区与减速区所占的凸轮角分别为 β_1 与 β_2 ，且 $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ ，则非对称运动规律的加速区与减速区所分配的比例可用非对称系数(Asymmetry Factor, AF)表示^[6,7]，亦即

$$AF = \beta_1 / \beta \quad (5)$$

对于非对称的运动规律的方程式，可藉由修正对称运动规律的特征值^[8]，并利用万能凸轮运动规律求得^[9]。例如，若假定非对称摆线运动规律的加速区所占的凸轮角为 β_1 与非对称系数为 AF 时，其位移、速度与加速度之方程式分别为：

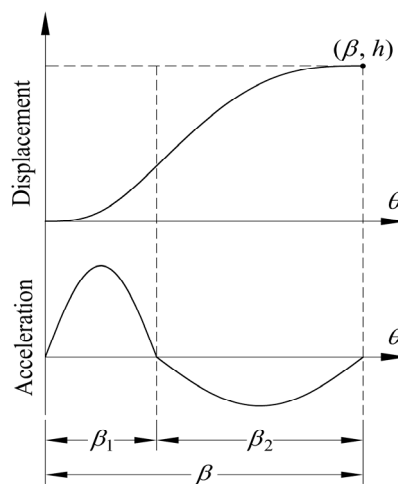


Figure 2. Asymmetrical motion curve
图 2. 非对称运动规律

当 $0 \leq \theta \leq \beta_1$

$$S = h \left\{ \frac{\theta}{\beta} - \frac{AF}{\pi} \sin \left[\frac{\pi\theta}{(AF)\beta} \right] \right\} \quad (6)$$

$$V = \frac{h}{\beta} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi\theta}{(AF)\beta} \right] \right\} \quad (7)$$

$$A = \frac{\pi h}{(AF)\beta^2} \sin \left[\frac{\pi\theta}{(AF)\beta} \right] \quad (8)$$

当 $\beta_1 \leq \theta \leq \beta$

$$S = h \left\{ \frac{\theta}{\beta} - \frac{1-AF}{\pi} \sin \left[\frac{\pi\theta}{(1-AF)\beta} + \left(\frac{1-2AF}{1-AF} \right) \pi \right] \right\} \quad (9)$$

$$V = \frac{h}{\beta} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi\theta}{(1-AF)\beta} + \left(\frac{1-2AF}{1-AF} \right) \pi \right] \right\} \quad (10)$$

$$A = \frac{\pi h}{(1-AF)\beta^2} \sin \left[\frac{\pi\theta}{(1-AF)\beta} + \left(\frac{1-2AF}{1-AF} \right) \pi \right] \quad (11)$$

任何推程或回程运动规律皆包含有加速区与减速区，且完成推程或回程运动后进入暂停运动后的从动件速度必为零，所以加速度曲线所围成的面积必定等于减速度所围成的面积。由上述可知，若选择非对称系数小于 0.5 的情况时，亦即加速区所占的凸轮转角小于减速区所占的凸轮转角时，加速区的运动极值则会大于减速区的运动极值。

4. 直动式滚子从动件机构之接触应力

由于凸轮轮廓与从动件之工作表面间为点接触或线接触，在接触位置会有相对摩擦与接触应力，容易造成接触表面的磨损与疲劳。因此，设计时必须评估凸轮与从动件之工作表面间的接触应力，藉此选用具有适当强度的材料。根据赫兹接触应力理论^[10]，若将滚子与凸轮的接触视为两个圆柱体，则可得到下列方程式：

$$\sigma = \sqrt{\frac{F_N \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\pi w \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \right) + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right]}} \quad (12)$$

其中， w 为物体厚度， r_1 为物体一之曲率半径， r_2 为物体二之曲率半径， E_1 为物体一之弹性模量， E_2 为物

体二之弹性模量， ν_1 为物体一之泊松比， ν_2 为物体二之泊松比， F_N 为法向压力。由(12)可知，凸轮轮廓与从动件之工作表面间的最大赫兹接触应力会与凸轮轮廓之曲率半径 r_1 及凸轮轮廓与从动件之工作表面间的正向接触力 F_N 有关。因此以下针对如何计算凸轮轮廓之曲率半径 r_1 及凸轮轮廓与从动件之工作表面间的正向接触力 F_N 进行说明。

4.1. 凸轮轮廓之曲率半径

计算凸轮轮廓之曲率半径的方法有图解法^[11]与解析法^[12]。若使用解析法计算凸轮轮廓之曲率半径时，需先将凸轮轮廓以解析方程式表达。利用速度瞬心的观念，并由选定的设计条件即可定出凸轮与从动件的瞬时位置，进而可导出凸轮轮廓之矢量参数方程式^[13-15]。定一坐标系 O_2 -XY 固定于凸轮上，坐标原点 O_2 与凸轮之旋转轴心重合， θ 为凸轮的角位移， $S(\theta)$ 为从动件运动规律位移函数；直动式滚子从动件之凸轮机构包含有机架(杆件 1)、凸轮(杆件 2)及从动件(杆件 3)等三个杆件。因此，凸轮机构有三个瞬心 I_{12} 、 I_{13} 及 I_{23} ，其位置分别如图 3 所示。若 Q 点代表瞬心 I_{23} 且 $O_2Q = q$ ，利用速度瞬心观念可将凸轮轮廓之矢量方程式表示为：

$$O_2A = \begin{cases} (r_b + r_f + S(\theta)) \cos \theta - r_f \cos(\theta - \phi) \\ (r_b + r_f + S(\theta)) \sin \theta - r_f \sin(\theta - \phi) \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$q = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (14)$$

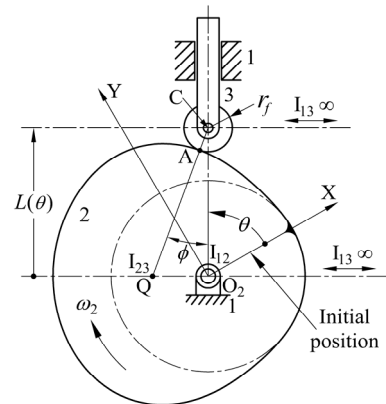


Figure 3. Disk cam mechanism with a common translating roller follower
图 3. 直动式滚子从动件之凸轮机构

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{q}{L(\theta)} \right] \quad (15)$$

其中, ω_2 为凸轮转速, r_b 为凸轮基圆半径, r_f 为滚子半径, ϕ 为凸轮机构之压力角, 而 $L(\theta)$ 为从动件位置函数:

$$L(\theta) = r_b + r_f + S(\theta) \quad (16)$$

其中 $S(\theta)$ 为从动件运动规律位移函数。

当凸轮轮廓以参数方程式 $x = x(\theta)$ 、 $y = y(\theta)$ 表示, 则其曲率半径可表示为^[6]:

$$\rho(\theta) = \frac{\left\{ [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 \right\}^{1.5}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} \quad (17)$$

其中, x' 及 x'' 分别表示 x 对 θ 的一次及二次微分, y' 及 y'' 分别表示 y 对 θ 的一次及二次微分。将推导出的凸轮轮廓矢量参数方程式(13)代入方程式(17)中, 即可计算直动式滚子从动件之凸轮轮廓的曲率半径。

4.2. 从动件之正向接触力分析

根据动力学的观念, 可将直动式对心滚子从动件画成如图 4 的自由体图^[16]。 F_1 为第一个接触点的正向力, F_2 为第二个接触点的正向力, F_N 为凸轮轮廓与滚子从动件接触点的正向力, F_t 为作用于从动件运动方向之重力、惯性力、弹簧力和其它外力之合、 d 为从动件杆柱直径, μ 为摩擦系数, ϕ 为压力角, l_1 为从动

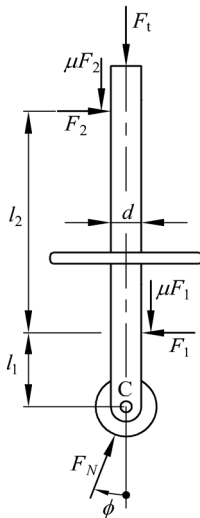


Figure 4. A cam mechanism with a translating roller follower and its free-body diagram
图 4. 直动式滚子从动件之自由体图

件外悬部分的长度, l_2 为从动件轴承的长度, S_p 为弹簧预压量, s 为弹簧的总变形量, 可表示为:

$$s = S(\theta) + S_p \quad (18)$$

从动件运动方向上之力 F_t 为:

$$F_t = M[g + A(\theta)] + ks \quad (19)$$

其中 M 为从动件质量, g 为重力加速度, $A(\theta)$ 为从动件之加速度运动规律。

根据力量平衡与力矩平衡的观念, 可推导出以下的三个线性方程式:

$$F_N \sin \phi - F_1 + F_2 = 0 \quad (20)$$

$$F_N \cos \phi - \mu F_1 - \mu F_2 - F_t = 0 \quad (21)$$

$$F_1 l_1 - \mu F_1 d/2 - F_2 (l_1 + l_2) + \mu F_2 d/2 = 0 \quad (22)$$

联立解上述 3 个方程式, 可分别将作用于从动件上的外力 F_1 、 F_2 与 F_N 表示为:

$$F_N = \frac{l_2 F_t}{l_2 \cos \phi + (\mu^2 d - 2\mu l_1 - \mu l_2) \sin \phi} \quad (23)$$

$$F_1 = \frac{(l_1 + l_2 - 0.5\mu d) F_t \sin \phi}{l_2 \cos \phi + (\mu^2 d - 2\mu l_1 - \mu l_2) \sin \phi} \quad (24)$$

$$F_2 = \frac{(l_1 - 0.5\mu d) F_t \sin \phi}{l_2 \cos \phi + (\mu^2 d - 2\mu l_1 - \mu l_2) \sin \phi} \quad (25)$$

藉由静力平衡的条件求得凸轮轮廓与从动件之工作表面间的正向接触力以及所有作用于凸轮机构系统内的未知作用力后, 即可用赫兹接触应力理论公式计算出凸轮轮廓表面之最大应力值。

5. 范例

为了说明非对称运动规律对从动件惯性力与须施加的回位弹簧力的变化进行说明, 以下将以实例进行分析与讨论。若假定从动件以摆线运动上升 20 mm, 其推程角 $\beta = 120^\circ$, 凸轮的转速为 600 rpm。机构的几何尺寸与材料性质为: 基圆半径 $r_b = 40$ mm, 滚子半径 $r_f = 12$ mm, 从动件杆柱直径 $d = 15$ mm, 从动件外悬部分起始长度 $l_1 = 80$ mm, 轴承长度 $l_2 = 30$ mm, 摩擦系数 $\mu = 0.15$, 从动件质量为 0.1 kg, 凸轮厚度 $w = 15$ mm, 凸轮与从动件的泊松比及弹性模量分别为 $\nu_1 = 0.29$, $\nu_2 = 0.29$, $E_1 = 2.0 \times 10^5$ MPa, $E_2 = 2.0 \times 10^5$ MPa。设计弹簧预压量的预压系数 λ 选定为

0.55, 而安全系数 Γ 选定为 2.25。由方程式(4)可知, 当 AF 分别等于 0.3、0.5 与 0.7 时, 所对应的弹簧刚性系数分别为 786 N/m、1057 N/m 与 1694 N/m。图 5 所示为不同的非对称系数时的摆线运动推程部分的惯性力与弹簧力曲线图, 其中弹簧力因为方向向下而为小于零的曲线。由图可知, 当非对称系数 AF 大于 0.5 时, 加减区与减速区之转换点会往图形的右方移动, 加速区的惯性力逐渐变小, 减速区的惯性力逐渐变大。为了避免从动件发生腾跳的现象, 则必须对应设计出较大的回位弹簧刚性。如此一来, 当从动件运动至减速区时, 作用在从动件上的弹簧力亦会增加, 将会增加作用于从动件上的负载。因此, 增加非对称系数 AF 为不良的选择。当非对称系数 AF 小于 0.5 时, 加减区与减速区之转换点会往图形的左方移动, 加速区的惯性力逐渐变大, 减速区的惯性力逐渐变小。因为此时从动件的最大减速度降低, 所以用于克服从动件发生腾跳现象的弹簧力可对应降低。然而, 从动件的最大加速度则会明显增加, 使得从动件的惯性力亦会增加, 将同样导致作用于从动件上负载增加的现象。因此, 非对称系数 AF 必需适当地选择降低的幅度。

为了明显观察出非对称系数对凸轮轮廓与从动件之间的正向力与接触应力的影响, 可将在不同非对称系数 AF 时, 作用于凸轮轮廓与从动件之间的最大正向力与接触应力极大值之对应情形绘出, 分别如图 6 与图 7 所示。当非对称系数 $AF = 0.392$ 时, $(F_N)_{\max}$ 有极小值为 23.86 N。当非对称系数 $AF = 0.35$ 时, $(\sigma)_{\max}$ 有极小值为 72.34 MPa。采用非对称曲线时会对从动件之惯性力产生影响, 同时改变作用于凸轮轮廓与从动件之间的最大正向力与接触应力。然而, 最大

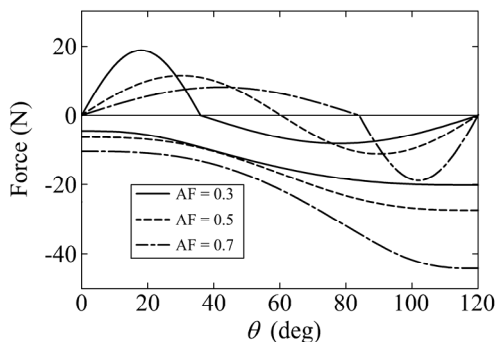


Figure 5. Spring forces and inertia forces exerted on a roller follower with three different asymmetry factor
图 5. 不同非对称系数时之作用于从动件上的弹簧力与惯性力

正向力产生的位置与凸轮与从动件间接触点的曲率半径最小值产生的位置并不一致。因此, 最大正向力与接触应力的极小值分别发生于不同的非对称系数 AF。

图 8 为采用不同的非对称系数时, 从动件作推程运动时凸轮轮廓与从动件之间的最大接触应力之变化图。当非对称系数 $AF = 0.2$ 时, 降低了减速区惯性力的极值, 所以可采用刚性系数较小的回位弹簧。然

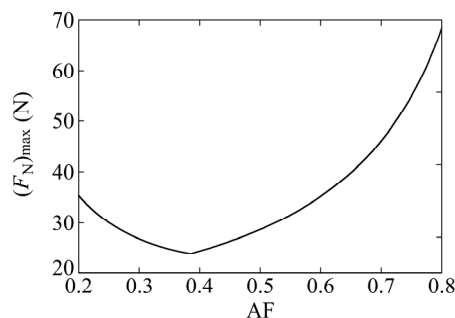


Figure 6. Effect of asymmetry factor on the contact forces exerted between the cam and follower
图 6. 非对称系数对作用于从动件上的正向接触力的影响

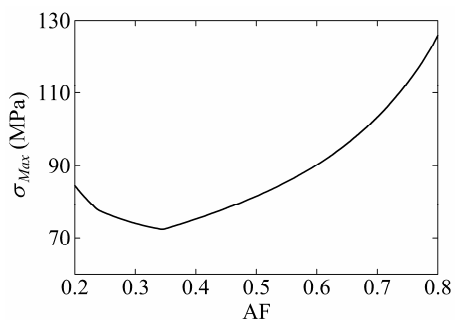


Figure 7. Effect of asymmetry factor on the maximum contact stresses between the cam and follower
图 7. 非对称系数对作用于凸轮轮廓与从动件之间的最大接触应力的影响

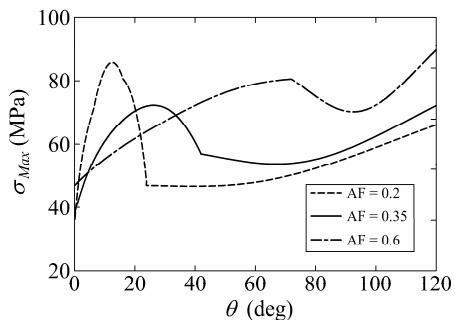


Figure 8. Maximum contact stresses between the cam and follower with three different asymmetry factor
图 8. 不同非对称系数时之作用于凸轮轮廓与从动件之间的最大接触应力

而，加速区的惯性力却增高，运动周期内作用于凸轮轮廓与从动件之间的最大接触应力也在此发生；当非对称系数 $AF = 0.6$ 时，加速区的惯性力降低，但却因为减速区的惯性力对应增加，使得必须使用较大的弹簧力来避免从动件产生腾跳的现象，进一步导致运动周期内作用于凸轮轮廓与从件之间的最大接触应力在减速区发生。因此，适当的选择非对称系数 AF 可有助于平衡从动件于加速区与减速区时，接触应力对凸轮组件的破坏效果。

6. 结论

藉由采用非对称的运动规律，从动件之运动特性得以改善，同时可减少惯性力与弹簧力对从动件系统所产生的负载，进而降低凸轮轮廓与从动件之间的接触应力。对于任何推程或回程运动规律，可藉由分配加速区与减速区所占的凸轮旋转角度，进而改变加速度与减速度的极值。加速区与减速区所占的凸轮旋转角度可使用非对称系数表示之。根据本文所归纳出的结果，当减速区所占的凸轮旋转角大于加速区所占的凸轮旋转角时，可降低减速度的极值，同时可降低减速区时弹簧力与惯性力所造成的负载。然而，加速区与减速区所占的凸轮旋转角必须适当的分配，以避免过度减少加速区所占的凸轮旋转角，使得加速区的惯性力剧增，进而导致相应增加的接触应力对凸轮轮廓产生严重的磨损。

参考文献 (References)

- [1] R. L. Norton. Cam design and manufacturing handbook. New York: Industrial Press, 2002: 236-238.
- [2] H. A. Rothbart. Cam design handbook. New York: MacGraw-Hill, 2004: 222-224.
- [3] F. A. Chen. Mechanics and design of cam mechanisms. New York: Pergamon Press, 1982: 307-309.
- [4] 郭连声, 柴邦衡. 凸轮机构[M]. 北京: 中国机械工业出版社, 1976: 99-127.
- [5] 陈雪芳. 非对称运动规律在自动捆扎机凸轮轮廓改进设计中的应用[J]. 包装与食品机械, 1997, 15(6): 34-36.
- [6] J. Reeve. Cams for industry. London: Mechanical Engineering Publications Limited, 1995: 57-61, 90-98.
- [7] C. N. Neklutin. Mechanisms and cams for automatic machines. New York: American Elsevier, 1969: 96-97.
- [8] 张文桐. 非对称运动曲线对凸轮机构接触力之影响[J]. 机构与机器设计, 2003, 14(3): 11-24.
- [9] 刘昌棋(中), 牧野洋(日), 曹西京(中). 凸轮机构设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 39-41.
- [10] J. A. Collins. Mechanical design of machine elements and machines. New York: John Wiley & Sons, 2003: 232-237.
- [11] L. I. Wu, S. H. Wu and H. S. Yan. Simplified graphical determination of disk-cam curvature. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34: 1023-1036.
- [12] A. Biswas, M. Stevens and G. L. Kinzel. A comparison of approximate methods for the analytical determination of profiles for disk cams with roller followers. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39: 645-656.
- [13] J. K. Davidson. Calculating cam profiles quickly. Machine Design, 1978, 50(28): 151-155.
- [14] 颜鸿森, 吴隆庸. 机构学[M]. 台湾: 台湾东华书局股份有限公司, 2006: 268-285.
- [15] L. I. Wu. Calculating conjugate cam profile by vector equation. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2003, 217(10): 1117-1123.
- [16] P. W. Jenson. Cam design and manufacture (2nd edition). New York: Marcel Dekker, 1987: 141-150.