

第二章 平面连杆机构及其分析与设计

第一节 概 述

全部由低副（转动副、移动副、球面副、球销副或螺旋副等）将若干刚性构件联接组成的机构称为低副机构，工程中也把这类机构称为连杆机构。按构件间的相对运动关系分，连杆机构可以分为平面连杆机构和空间连杆机构两大类。根据机构中是否含有一副杆，连杆机构还可分为闭链型和开链型连杆机构。含有一副杆的连杆机构为开链型连杆机构，否则为闭链型连杆机构。各构件均相对同一平面作平行平面运动的连杆机构称为平面连杆机构，否则称为空间连杆机构。在这两类连杆机构中，平面闭链型连杆机构应用十分广泛，尤其是以四个构件组成的平面四杆机构应用更为广泛。图 2-1 示出了这些应用中的部分典型例子。

连杆机构得到广泛应用的原因是：

- 1) 相对高副机构而言，低副机构的零件容易制造，生产成本相对较低。
- 2) 由于低副是面接触，接触应力相对高副较小，故承载能力较高，工作可靠。
- 3) 连杆机构的构件可以做得较长，故可实现较大空间范围的运动，容易实现力和运动的远距离传递。
- 4) 连杆机构可以实现多种运动要求，例如转动、摆动、移动、平面或空间的复杂轨迹运动以及间歇运动等。

但连杆机构由于有作平面或空间运动的构件，它们在运动中产生的惯性力和惯性力矩不易平衡，容易使机构在运动时产生振动和冲击，严重时还会影响机械产品的工作精度与寿命，因此，连杆机构通常不适合于高速工作的场合。其次，尽管连杆机构可以实现一些复杂的轨迹运动，但要精确实现任意设计要求的复杂轨迹曲线运动是相当困难的，甚至是不可能的，在实现运动要求的灵活性与复杂性方面，它不如某些高副机构，例如凸轮机构。此外，连杆机构的构件和运动副数量越多，则传动效率越低，传动累积误差越大，设计也越复杂。随着计算机日益普及，计算机辅助设计、优化设计等方法的发展与推广，以及各种新技术、新工艺的采用，一些过去难以解决的设计及工艺问题逐步得到解决，连杆机构的应用得到进一步的发展。

由于平面连杆机构在生产实践中应用十分广泛，故本章将对平面连杆机构从

以下三个方面进行重点讨论。

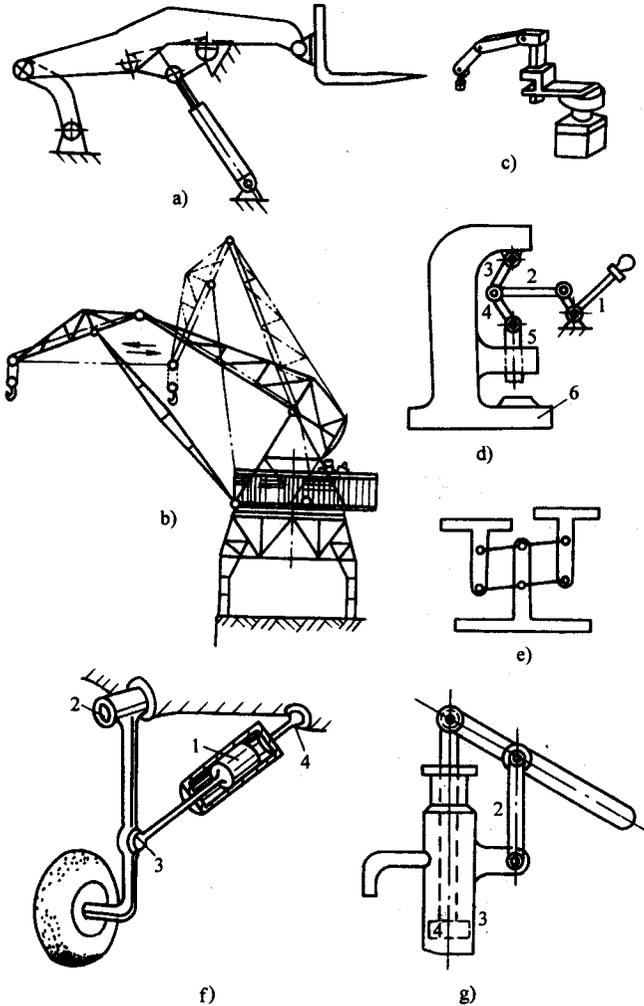


图 2-1 连杆机构应用实例

- a) 液压举升机 b) 鹤式起重机 c) 开链式机器人 d) 手动
压力机 e) 天秤 f) 飞机起落架 g) 手动抽水泵

1) 平面连杆机构的基本结构和类型选择 (也称机构的型综合或机构的选型)。型综合要解决的主要问题是:根据设计对运动学和动力学以及应用功能方面的要求,选择合适的机构,通过分析比较,最终筛选出最能符合设计要求的机构类型。要能较好地做到这一点就要求设计者对连杆机构的类型、结构特点、运动及动力学特性、机构的变异和组合的方法以及各种分析方法有比较全面地掌握。本章将对一些常用的连杆机构,尤其是应用最广泛的平面四杆机构的结构特点、运动及动力学方面的性质、变异及组合的基本知识等内容有所侧重地给予介绍,通

过对本章的学习逐渐对连杆机构有所认识，为今后的实践与学习奠定必要的基础。

2) 平面连杆机构的基本特性及其分析方法。这些分析包括：结构分析、运动分析和力分析。结构分析将主要讨论连杆机构的结构组成、分类以及结构对机构运动学和动力学性质的影响等内容。运动分析和力分析将主要讨论机构运动和受力的定量分析计算方法。通过对这些分析内容的讨论，一方面能使设计者对连杆机构的性质有更深入的了解，即不仅能对机构作定性的分析，而且可以作出定量的分析，从而为选型设计提供更有力的技术保证。另一方面，由于分析是综合的逆过程，机构综合质量的好坏只有通过分析才能最终作出结论，只有通过分析才能为综合结果不理想的机构提出相应的修改措施。因此，掌握好各种分析方法是机构综合不可缺少的基础。

3) 平面连杆机构的尺度综合问题。尺度综合要解决的主要问题是：根据设计要求提出的综合参数，采用相应的综合方法，最终得出能满足设计要求的机构运动简图参数。

一、平面连杆机构的基本结构

在平面连杆机构的机构简图中由于构件呈杆状，故由 N 个构件组成的平面连杆机构称为平面 N 杆机构。例如由四个构件组成的平面连杆机构称为平面四杆机构；由六个构件组成的平面连杆机构称为平面六杆机构等等，依此类推。通常把四杆以上的平面连杆机构称为平面多杆机构。

平面连杆机构是由转动副或移动副联接成的平面运动链，其中开链型的机构应用相对较少，绝大多数平面连杆机构是闭链型结构，故闭链型的平面连杆机构是我们讨论的重点。在闭链结构中，当确定某一构件为机架后，会形成两类运动性质不同的杆。一类是用低副与机架相连的杆，称为连架杆。在连架杆中相对机架能作整周回转的称为曲柄，联接机架与曲柄的转动副称为整转副，在机构运动简图中，原动曲柄可以用实线箭头表示其转向；从动曲柄用虚线箭头表示其转向如图 2-2a 所示。相对于机架不能作整周回转的连架杆机称为摇杆，联接机架与摇杆的转动副称为摇转副，用带双向箭头的实线或虚线符号分别表示主动摇杆与从动摇杆如图 2-2b 所示。当两构件用移动副联接时，其中一个杆称为滑块，用带双向箭头的实线或虚线符号分别表示主动滑块或从动滑块的往复直线运动方向如图 2-2c 所示，约束引导滑块运动方向的另一根杆称为导杆。导杆可以是机架（一般常称为导轨），这时滑块为连架杆，导杆也可以是转动或摆动的连架杆（图 2-2d、e）这时滑块为连杆。

由于连架杆与机架相连，便于运动的输入与输出，故它们常作为平面连杆机构运动和动力的输入与输出构件。运动输入的构件称为机构的主动件，运动输出的构件称为机构的从动件。机构的运动形式、运动参数的转换特征，通常是通过

主动件与从动件来体现的，机构主动件与从动件的运动学性质在很大程度上决定了机构的性质与用途。故平面连杆机构常以连架杆尤其是从动杆的运动特征来定义机构的名称，例如图 2-2a 所示机构的两个连架杆均为曲柄，故称双曲柄机构。图 2-2b 所示机构的两个连架杆均是摇杆，故称为双摇杆机构。同理，图 2-2d 所示机构称为双移动滑块机构，图 2-2c、e 所示的机构分别称为曲柄滑块机构和摆动导杆机构等等。

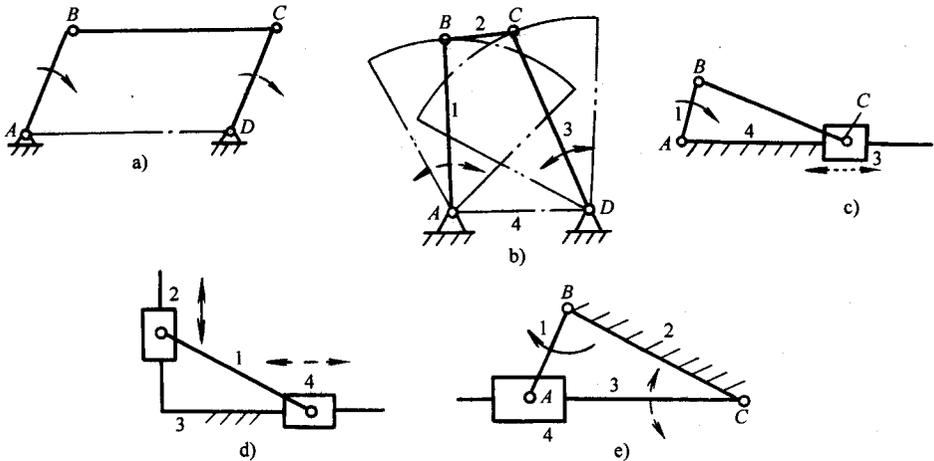


图 2-2 平面连杆机构

a) 双曲柄机构 b) 双摇杆机构 c) 曲柄滑块机构 d) 双滑块机构 e) 曲柄摆动导杆机构

平面连杆机构中的另一类杆是不与机架直接相连的，因为它们是连接连架杆的杆，故称连杆。连杆在一般情况下作复杂的平面运动，特殊条件下也可以平动（例如图 2-2a 中的连杆）。连杆上不同位置的点的运动轨迹是形状各异的复杂曲线，称为连杆曲线，连杆曲线极富应用价值。绝大多数平面连杆机构均有连杆。图 2-3 所示机构是由三构件和三个移动副组成的不含连杆的低副机构，按连杆机构的定义知：它是构件数量最少且不含连杆的连杆机构。计算该机构的自由度为零，比较图 2-3a、b 知：图 2-3a 机构中存在有过约束，故该机构是一种在特殊几何约束条件下 ($\lambda_1 + \lambda_2 = \beta$) 的平面连杆机构。这种连杆机构由于运动转换形式比较单一，其应用受到一定限制，但该机构具有明显的增力和楔紧功能，故称为楔块机构，常用于压榨机、千斤顶一类机械中。

和多杆机构比较，平面四杆机构是实现各种运动形式转换最简单的连杆机构，且由于运动副和构件数目少，使其能获得较高的传动效率和传动精度，成本相对较低，设计制造容易，其中四个运动副都是转动副的四杆机构（简称铰链四杆机构）是平面四杆机构的最基本的结构型式，其他型式的平面四杆机构都可以

从它演化而成，故我们将重点对平面四杆机构，尤其是对铰链四杆机构进行讨论，介绍其分析、设计的有关理论与方法。

二、铰链四杆机构具有整转副和曲柄存在的条件

对于设计者来说，机构中有没有曲柄，有多少曲柄是一个十分重要的问题。因为它与机构的性质和机构的类型有直接的关系。更重要的是：只有具有曲柄的机构才能用电动机等输出转动的原动机来直接驱动。

观察平面铰链四杆机构各杆的相对运动会发现：影响机构有无曲柄，有多少曲柄的因素有两点：第一是构成四杆运动链各杆的长度；第二是运动链中所取的机架与其他构件的相对位置。按照曲柄是相对机架能作整周回转的连架杆的定义，我们除开机架选取问题，先来讨论铰链四杆运动链中，各杆长对各转动副中两运动副元素相对运动的影响，即先来讨论在什么条件下转动副能成为整转副。

设铰链四杆运动链 $ABCD$ 如图 2-4a 所示，各杆长度分别为： a 、 b 、 c 、 d 。首先我们来分析当 $a < d$ 时转动副 A 是整转副的条件。将转动副 B 拆开可知：运动副元素 B' 的几何中心相对杆 AD 上 A 点的运动轨迹是以 A 为圆心， a 为半径的圆，运动副元素 B' 几何中心的可及域（ B' 相对 AD 杆上 D 点可以到达的区域）是外半径为 $b+c$ ；内半径为 $|b-c|$ （可能 $b > c$ ，也可能 $b < c$ ）的圆环面，如果该圆环面能包容 B' 运动的轨迹圆，则 A 是整转副，故 A 是整转副的条件是：

$$\left. \begin{aligned} a+d &\leq b+c \\ d-a &\geq |b-c| \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

整理式 (2-1) 得：

$$\left. \begin{aligned} a+b &\leq c+d \\ a+c &\leq b+d \\ a+d &\leq b+c \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

由式 (2-2) 还可以得：

$$\left. \begin{aligned} a &\leq b \\ a &\leq c \\ a &\leq d \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式 (2-3) 表明： a 一定是四杆中的最短杆。

用和上面同样的方法分析转动副 B ，将转动副 A 拆开，由图 2-4b 可知：在满

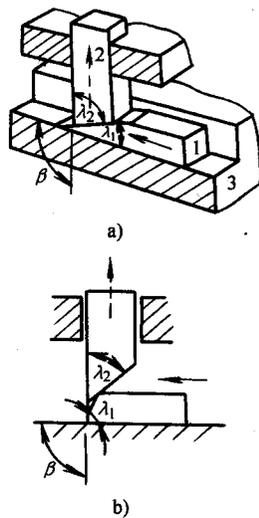


图 2-3 含 3 个移动副的机构

a) 模块机构 b) 无过束机构

足式 (2-3) 的条件下转动副 B 为整转副的条件是:

$$\left. \begin{aligned} a+b &\leq c+d \\ b-a &\geq |c-d| \end{aligned} \right\}$$

整理上式得

$$\left. \begin{aligned} a+b &\leq c+d \\ a+c &\leq b+d \\ a+d &\leq b+c \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

式 (2-4) 与式 (2-2) 完全相同, 由此可以得出结论: 如果铰链四杆运动链中最短杆与最长杆长度之和小于或等于其余两杆长度之和, 则最短杆上的两个转动副是整转副。

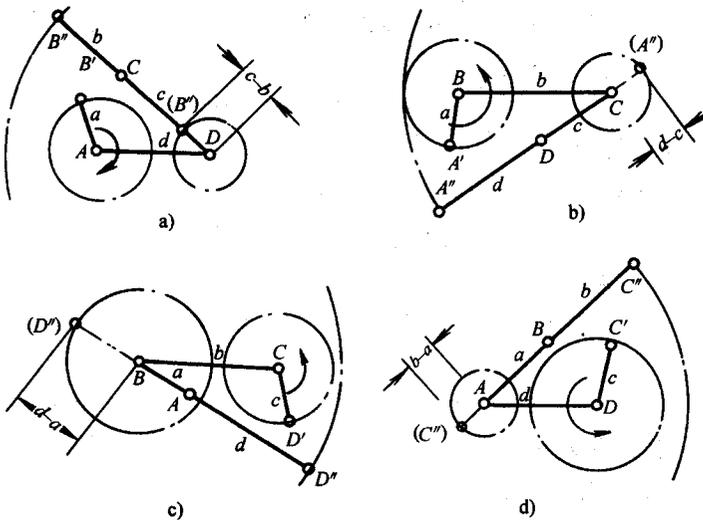


图 2-4 铰链元素可及域分析

在 a 是最短杆的前提下, 采用和分析 A 、 B 铰链相同的方法来进一步分析铰链 C 、 D (图 2-4c、d)。

C 铰链为整转副的条件是:

$$\left. \begin{aligned} b+c &\leq a+d \\ |b-c| &\geq d-a \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

D 铰链为整转副的条件是:

$$\left. \begin{aligned} c+d &\leq a+b \\ |c-d| &\geq b-a \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

整理式 (2-5)、(2-6) 得:

$$\left. \begin{aligned} a+b &\geq a+d \\ a+c &\geq b+d \\ a+d &\geq b+c \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

从式 (2-7) 可以得:

$$\left. \begin{aligned} a &\geq b \\ a &\geq c \\ a &\geq d \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

比较式 (2-7)、(2-8) 与式 (2-2)、(2-3) 知: 若只有 a 是最短杆, 则 C 、 D 铰链不可能是整转副, 既能满足 A 、 B 铰链是整转副又能满足 C 、 D 铰链为整转副的条件只能是:

$$\left. \begin{aligned} a+b &= c+d \\ a+c &= b+d \\ a+d &= b+c \end{aligned} \right\}$$

满足上述条件的机构几何尺寸可能出现下列几种情况:

- 1) $a=b=c=d$ (四边相等) 或 $a=c \neq b=d$ (两对边相等, 且两短边相对);
 - 2) $a=b, c=d$
 - 3) $a=d, b=c$
- (两短边相等且相邻)。

由此, 我们可以进一步得出结论:

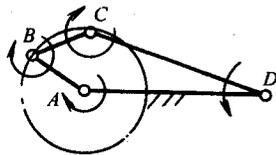
1) 如果 $a=c=b=d$ 或者 $a=c \neq b=d$, 即铰链四杆机构的形状如平行四边形 (常称为平行四边形机构), 四个转动副均为整转副。

2) 如果 $a=b < c=d$, 注意到 a 是最短杆, 式 (2-6) $c+d = a+b$ 不成立, 故这时 C 是整转副, D 是摇转副 (图 2-5a)。

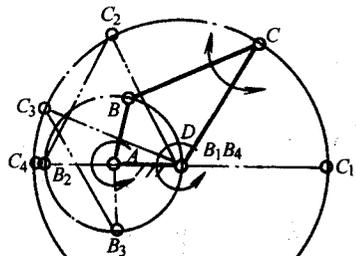
3) 如果 $a=d < b=c$, 因 a 是最短杆, 式 (2-5) $b+c = a+d$ 不成立, 故这时 C 是摇转副, D 是整转副 (图 2-5b)。

按照曲柄的定义, 选择不同的构件为机架得出铰链四杆机构曲柄存在的条件为:

在铰链四杆机构中, 如果最短杆与最长杆长度之和小于或等于其余两杆长度之和, 且只有一个最短杆, 因最短杆上的两个转动副是整转副, 其余两个转动副是摇转副 (图 2-6a) 则:



a)



b)

图 2-5 两邻边相等的铰链四杆机构

a) 曲柄摇杆机构 b) 双曲柄机构

- 1) 以最短杆为机架，机构为双曲柄机构。
- 2) 以最短杆相邻的任意一杆为机架，机构为曲柄摇杆机构。
- 3) 以最短杆相对的杆为机架，机构无曲柄为双摇杆机构。

4) 如果机构为平行四边形机构，因机构中四个转动副均为整转副（图 2-6b），则无论以哪一构件为机架，均为双曲柄机构。

5) 如果四根杆长两两相等，且两短杆相邻，因联接两长杆的转动副是摇转副，其余三个转动副是整转副，故以短杆为机架是双曲柄机构，这时短曲柄转两周，长曲柄转一周（图 2-5b），以长杆为机架是曲柄摇杆机构（图 2-5a）。

6) 如果最短杆与最长杆长度之和大于其余两杆长度之和，因机构中四个转动副均为摇转副（图 2-6c），则无论以哪根杆为机架均为双摇杆机构，这种机构亦称为全摇杆机构。

三、平面四杆机构的变异及其他基本类型

由上一节的结论可以进一步推论：当改变已知杆长机构中的某一杆长，将影响机构中最短杆与机架的相对位置，机构中整转副与机架的相对位置也将相应发生改变，甚至会出现

无整转副的情况，从而导致机构类型的改变。例如：已知铰链四杆机构 $ABCD$ ，其中 $AB=20\text{mm}$ ， $BC=50\text{mm}$ ， $CD=40\text{mm}$ ， AD 为机架，改变 AD 杆长，机构的类型变化分析如下：

1) 当 AD 为最短杆 ($0 < AD \leq 20$)，根据机构有整转副的条件： $AD + 50 \leq 20 + 40$ ，即 $AD \leq 10\text{mm}$ 时，两整转副在最短杆 AB 上，由于 AD 是机架，故此时的机构为双曲柄机构。

2) 当 AD 长介于最短与最长之间 ($20 < AD < 50$) 机构有整转副时，则 $20 + 50 \leq AD + 40$ ，即 $AD \geq 30\text{mm}$ 时，两整转副在最短杆 AB 杆上，此时机构为曲柄摇杆机构。

3) 当 AD 最长 ($50 \leq AD < 110$) 机构有整转副时， $AD + 20 \leq 40 + 50$ ，即： $AD \leq 70\text{mm}$ 时，两整转副在最短杆 AB 杆上，故此时机构为曲柄摇杆机构。

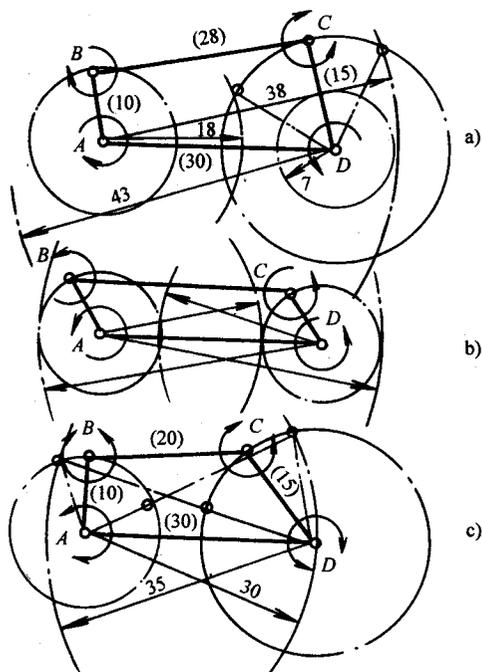


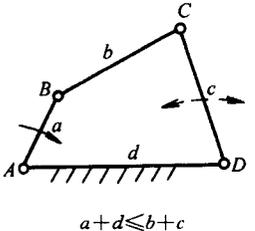
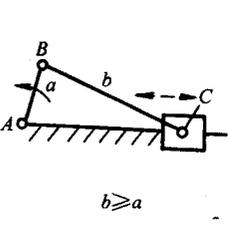
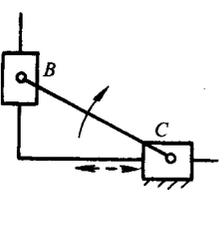
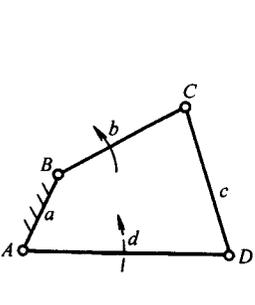
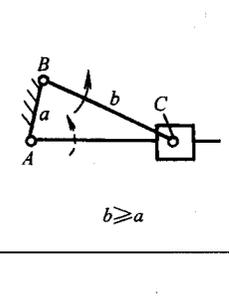
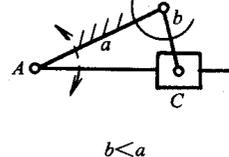
图 2-6 杆长与机构类型

a) 曲柄摇杆机构 b) 双曲柄机构 c) 全摇杆机构

4) 综上所述, 当 $0 < AD \leq 10$ 时, 机构为双曲柄机构; 当 $30 \leq AD \leq 70$ 时, 机构为双曲柄摇杆机构; 当 $10 < AD < 30$ 和 $10 < AD < 110$ 时, 机构无整转副为双摇杆机构。

根据第一章曾讲过的内容知: 铰链四杆机构中当某一杆的杆长理论上趋于无穷大时, 该杆上的一个转动副将变异为移动副, 该杆将演变为滑块。如果将铰链四杆机构中的一个或两个转动副用移动副替代, 即可得到具有一个移动副和两个移动副的另外两类四杆机构。在此基础上, 选不同的构件为机架, 改变杆的尺寸, 改变运动链中移动副与转动副的排列顺序, 即可得到表 2-1 中所示的其他类型的四杆机构。设 a 为最短杆, d 为最长杆, 全铰链、含一个移动副和含两个移动副的四杆运动链当选用不同构件为机架时的平面四杆机构简图如表 2-1 所示。

表 2-1 四杆机构的变异

变异方法	用不同数量的移动副代替运动链中的转动副					
	全铰链四杆机构		有一个移动副的四杆机构		有两个移动副的四杆机构	
依次改变运动链中机架的位置	曲柄摇杆机构		曲柄滑块机构		曲柄移动导杆机构 (正弦机构)	
				转动导杆机构		
	双曲柄机构		摆动导杆机构			
						

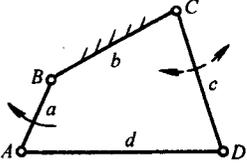
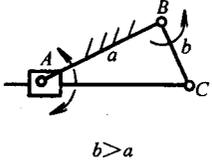
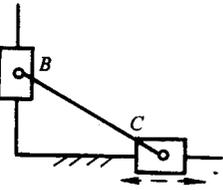
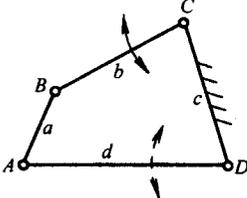
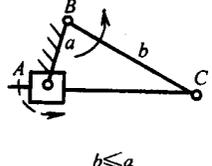
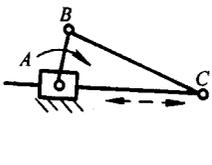
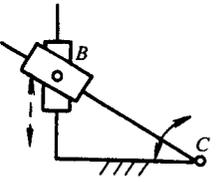
变异方法		用不同数量的移动副代替运动链中的转动副		
	全铰链四杆机构	有一个移动副的四杆机构		有两个移动副的四杆机构
依次改变运动链中机架的位置	曲柄摇杆机构  $a+d \leq b+c$	摇块机构 将上述机构的滑块与导杆位置互换  $b > a$	双移动滑块机构 (椭圆仪机构)	
	双摇杆机构  $a+d \leq b+c$ 或 $a+d > b+c$	转块机构  $b \leq a$		
		(移动导杆机构) 定块机构 	交叉滑块机构 (正切机构) 	

表 2-1 中含一个移动副四杆机构的名称可以根据运动链中整转副的数量和位置来定义。在含一个移动副的四杆机构中，转动副成为整转副的条件可按与讨论铰链四杆机构类似的方法进行讨论。如图 2-7a 所示，运动链 ABC 中拆开铰链 B 可知：当 $b \geq a$ 时， B' 相对 A 的运动轨迹是半径为 a 的圆，而 B'' 的可及域是宽度为 $2b$ 的带，当带能包容这个圆时（图 2-7a） A 是整转副；拆开铰链 A 分析可知： B 铰链总是整转副（图 2-7b）。如果 $b > a$ ，滑块只能在 B 铰链一侧运动，这时 C 铰链是摇转副（图 2-7c）；如果 $b \leq a$ ，滑块可以在 B 铰链左、右运动，这时 C 铰链是整转副（图 2-7d）。因此，当 $b \geq a$ 时，以 AC 为机架，机构是曲柄滑块机构；以 AB 为机架，机构是转动导杆机构。当 $b < a$ 时，以 AC 为机架，机构是摇杆滑块机构；以 AB 为机架，机构是摆动导杆机构。当 $b > a$ 时，以 BC 杆为机架时，曲柄 AB 转动另一连架杆滑块将绕 C 铰链在一定范围内摇摆，这种机构称为摇块机构（图 2-8a），当 $b \leq a$ 时，滑块可以绕 C 铰链转动，机构是转块机构（图 2-8b）。当以滑块为机架，以 AB 或 BC 为主动件时，连架杆（导杆）只能作往复直线运动，

故这种机构称为移动导杆机构或定块机构。摇块机构、转块机构和定块机构分别是摆动导杆机构、转动导杆机构和曲柄滑块机构的滑块（图示小方块）与导杆（图示插在滑块中的杆）位置互换的一种变异，这种运动副元素结构形式的互换（即转动副中的孔与销、移动副中的空腔构件与插入空腔的构件相互交换位置）不会影响机构中各构件的相对运动关系，但会使构件的受力情况发生变化。图 2-9 示出了在作用力 F 不变的条件下，将滑块与导杆位置互换后构件受力的变化情况，在实际应用时应充分考虑其结构互换的合理性。例如：如果以移动副的两运动副元素分别表示气、液压缸的活塞与缸体，则翻斗车上将缸体（方块构件）用转动副与车辆底盘（机架）相连，这时车箱的倾翻机构是摇块机构，如果将导杆与底盘相连，车箱的倾翻机构是导杆机构，从驱动车箱的倾翻运动看两机构并无多大差别，但从动力源配置位置的合理性与构件受力方面考虑，用摇块机构比用导杆机构合适（图 2-10）。

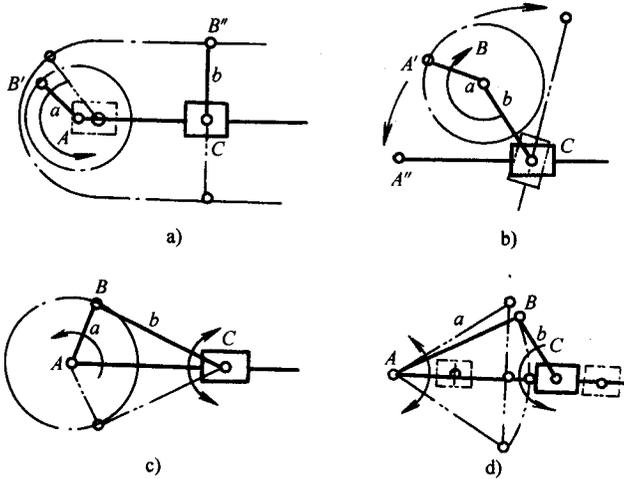


图 2-7 带一个移动副四杆机构杆长影响分析

a) $b \geq a$, A 是整转副 b) B 总是整转副

c) $b > a$, C 是摇转副 d) $b \leq a$, C 是整转副

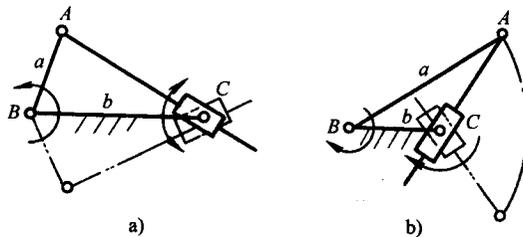


图 2-8 摇块机构与转块机构

a) 摇块机构 b) 转块机构

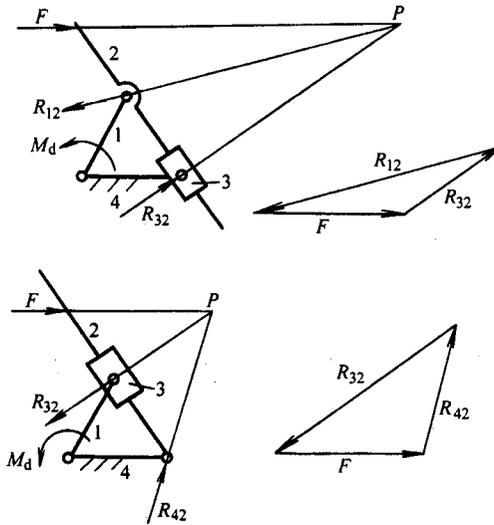


图 2-9 移动副位置对机构受力的影响

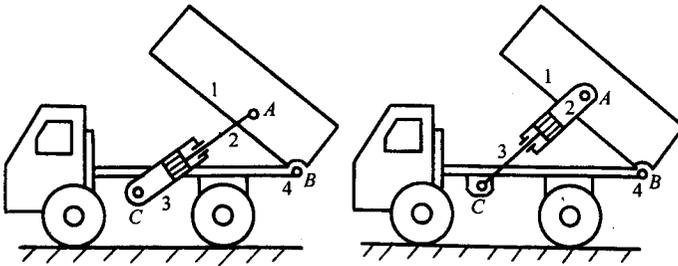


图 2-10 摆动液压缸的配置

含有两个移动副的四杆机构，由于能够实现一些特殊的相对运动关系，故常用其特殊用途为其机构命名。如图 2-11a 所示的双移动滑块机构中，因连杆 BC 上除 B 、 C 、 M 点以外的点均能描绘出椭圆，故被又称为椭圆仪机构。图 2-11b 所示曲柄移动导杆机构，因 h 与连杆 AB 的转角 α 能再现正弦函数 $h = L \sin \alpha$ ，故被又称为正弦机构。图 2-11c 所示双转动滑块机构常用来联接两个不同轴线的转轴，因中间构件是一个有两个相互垂直沟槽的滑块，故这种机构又被称为十字滑块联轴器机构。图 2-11d 所示交叉滑块机构因能复演 $h = L \tan \alpha$ ，故又被称为正切机构。

在含两个移动副的四杆机构的基础上，用移动副进一步替代其余的转动副，还可以得到图 2-12a、b 所示含三个移动副和四个移动副的平面四杆机构。

含三个移动副的四杆机构，由于三个内角 α_1 、 α_2 和 α_3 在机构运动中角度不变，转动副连接的两构件在机构运动时无相对转动， AB 杆与 AD 杆如同一个刚体（图 2-12a），当以 BC 或 CD 为机架使机构运动时， AB 与 AD 只能作平行移动，如同

一个楔块机构。含四个移动副的平面四杆机构可以在含三个移动副的三杆机构的基础上用增加一个含有一个移动副、自由度为1的杆构成(图2-13a)。含三个移动副的三杆机构即前面介绍的楔块机构其自由度为1,在增加自由度为1的构件后,其自由度变为2。含四个移动副的四杆机构自由度为2,因此要输入两个独立的运动机构才有确定的相对运动输出,故这种机构常用于如图2-13b所示的运动合成机构中。平面四杆机构中随着移动副的增多,机构运动转换形式变得越来越单一,其应用受到限制。

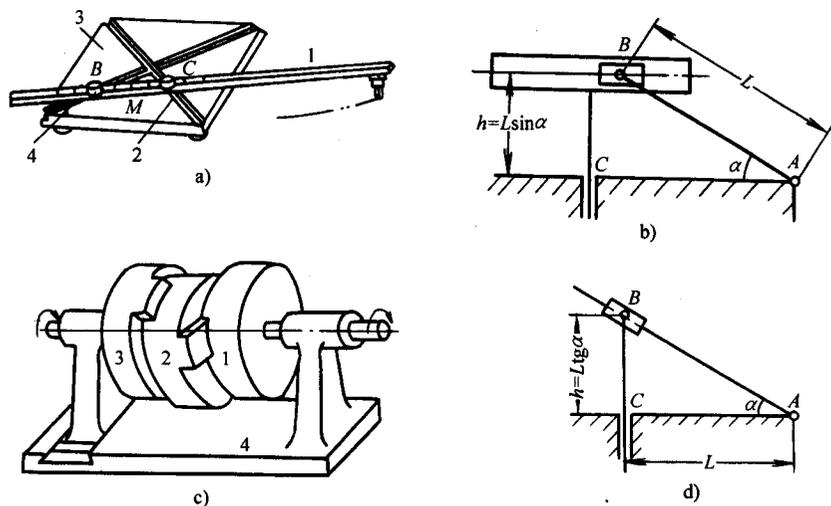


图 2-11 含两个移动副的机构

a) 椭圆仪机构 b) 正弦机构 c) 十字滑块联轴器 d) 正切机构

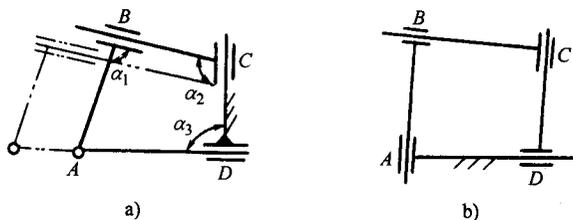


图 2-12 移动副数对机构运动特性的影响

a) R-P-P-P 机构 b) 四移动副二自由度机构

四、平面多杆机构

按机构结构的系统学理论分析,平面多杆机构均可以由平面四杆机构扩展而得到,即在平面铰链四杆闭链的基础上通过逐渐加入第一类Ⅱ级基本杆组;或增加一个带转动副的构件便可以获得各种形式的平面多杆闭链,在此基础上选用不同的构件作为机架,有计划地将各个铰链用其他的运动副予以代换,便可以完全

派生出各种平面多杆机构。

随着构件数量的增多，机构的结构会变得越复杂，目前人们对这些复杂机构的认识尚没有达到像认识平面四杆机构那样深入。从降低制造成本、提高传动效率和运动精度方面考虑，在设计中人们仍然愿意首先采用构件数量较少的平面四杆机构。但多杆机构，特别是相对较为简单的六杆机构，常能解决平面四杆机构难以解决的一些设计问题。自由度为1的平面6杆机构的基本型式有两种，如图2-14所示。其中图2-14a称为瓦特型；图2-14b称为斯蒂芬森型六杆机构。

例如，当需要将曲柄的转动转换为从动杆大摆角的往复摆动，用曲柄摇杆机构理论上虽能实现，但连杆运动至与摇杆共线位置附近时机构的传动性能极差。采用瓦特链，并用其中一个三副杆作为机架便导出了一个由两个四杆机构串联成的六杆机构（图2-15），该机构当曲柄转动时摆杆6能很好地实现一个大摆角的往复摆动。又如平面四杆机构很难实现从动件作有间歇的运动。图2-16选用斯蒂芬森链并以其中一个三副杆作为机架得到一个六杆机构，当以构件2作为曲柄转动时，连杆3上E点的轨迹曲线 K_E 的形状将是多种多样的，适当地调整各杆尺寸，使 K_E 曲线上有一段近似圆弧的曲线，确定出圆弧的圆心位置F，以该圆弧半径EF为杆5的杆长，当E铰链在该圆弧上运动时，杆6可以保持静止不动，从而实现杆6作有停歇的间歇摆动。如果设计恰当，这种停歇可在曲柄转过 180° 的范围内实现。此外，由于连杆上E点轨迹曲线的多样性和5、6杆长及位置配置的随意性，因此用这种结构形式的连杆机构能够实现各种运动规律的传递与转换。

多杆机构还常用于改善机构的传力特性，满足机构设计的一些特殊要求。

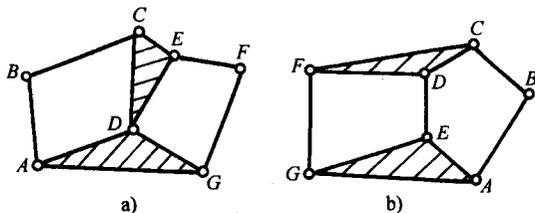


图 2-14 平面六杆机构的两种基本型式

a) 瓦特型 b) 斯蒂芬森型

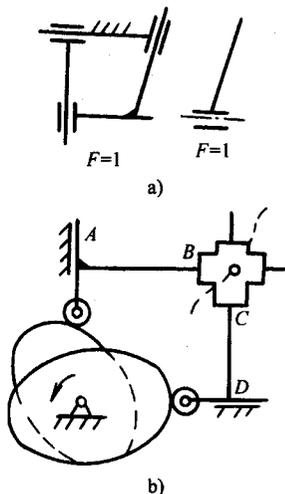


图 2-13 四个移动副的平面四杆机构

a) 二自由度的形成 b) 二自由度四杆机构的应用

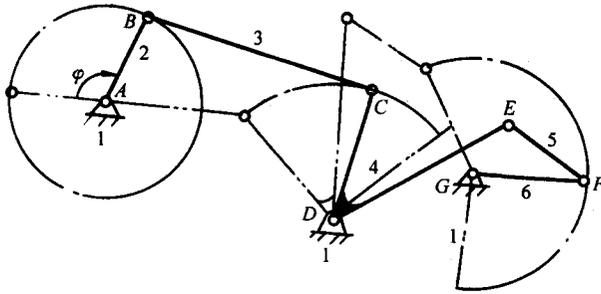


图 2-15 扩大行程的六杆机构

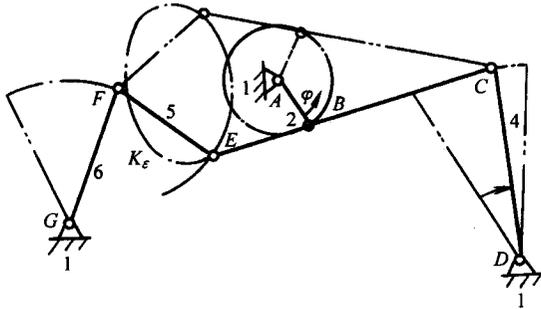


图 2-16 实现停歇的六杆机构

图 2-17 所示内燃机，为一瓦特型 6 杆机构，利用机构直线轨迹与活塞直线移动方向重合，从而可减少活塞对缸壁的侧压力，提高机构的工作效率和使用寿命。

图 2-1d 所示手动压力机和图 2-23a 所示颚式破碎机，也是瓦特型的 6 杆机构。该机构利用 3、4 杆运动至共线位置附近时能使 5 杆产生很大的挤压力（这种机构称为肘杆机构）来实现机器对工件的加压和碎石的功能。

又如图 2-18a、b 所示牛头刨床主切削运动机构是分别将图 2-14a 中的 C、G 铰链和图 2-14b 中的 D、G 铰链分别用移动副替代后得到的，该机构在运动时刨枕 F 可以在较大工作行程中获得近似等速的运动规律。

自由度为 2 的多杆机构，由于能将两个输入运动进行合成和或将一个输入运动分解，因此能实现更复杂的运动要求。例如图 2-19a 所示双曲柄五杆机构，机构中 C 点的轨

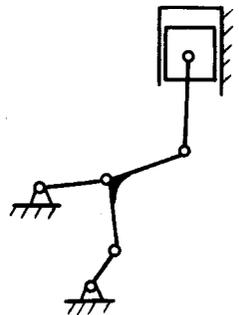


图 2-17 减小移动副中侧向力的六杆机构

迹与两曲柄的输入角速度比 $i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{m}{n}$ 时 C 点的轨迹曲线，这时曲柄 1 转 n 周，曲柄 4 转 m 周，C 点运动完成一个循环，通过对两原动

曲柄 AB 和 ED 转速和转向的控制, 可以使从动杆 CB 、 CD 和点 C 表现出各种不同的运动规律和形状不同的轨迹曲线, 其轨迹曲线的形状比四杆机构的连杆轨迹曲线要复杂得多。又如图 2-19b 所示自由度为 2 的七杆机构, 由于能将输入位移 x_a 、 x_b 合成为 x_c , 故被称为杠杆式加法机构 (亦能作减法)。当 $a=b$ 时, $x_c = \frac{1}{2}(x_a + x_b)$ 。随着控制技术的发展, 多自由度机构正得到更加广泛的应用。

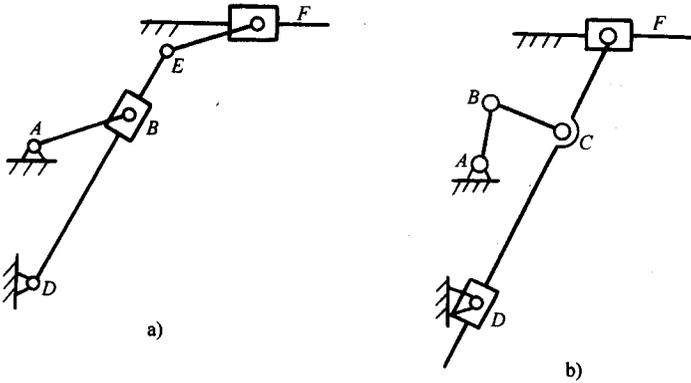


图 2-18 牛头刨主切削机构

a) 瓦特链机构 b) 斯蒂芬逊链机构

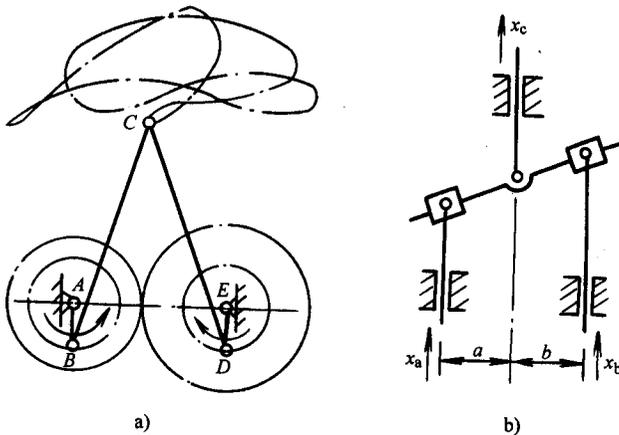


图 2-19 多自由度平面多杆机构

a) 双曲柄五杆机构 b) 杠杆式加法机构

第二节 平面连杆机构的运动特性与分析方法

一、平面连杆机构的运动特性及其应用

机构是传递运动和动力或导引物体运动的构件组合体。我们研究机构正是为

了能根据设计任务提出的运动和动力要求去正确、合理地选择、应用和设计机构（即选型）。因此，设计者必须尽可能多地了解和掌握各种机构的运动学及动力学特性，以及这些机构在实际工况中的应用，从而为选型设计积累知识和经验。本节将重点介绍平面连杆机构，特别是平面四杆机构的运动和动力学的基本特性以及一些典型的应用实例。

连杆机构由于是由杆状构件和低副组成的，因此它具有杠杆的一些最基本的运动学和动力学特性，例如：它能远距离地传递运动和动力；它能方便地改变作用在构件上的力和构件运动行程的大小和方向。但由于连杆机构的结构要复杂得多，使连杆机构的运动学和动力学特性变得更加丰富。根据平面连杆机构的功能与用途分，平面连杆机构可分为传递运动和动力的传动机构和导引物体运动的导引机构两大类。由于平面四杆机构两连架杆运动的输入量与输出量之间有唯一确定的传动函数关系，又便于计量，故传动机构常用两连架杆的传动函数来反映传动机构的基本传动特性。由于连杆曲线的多样性与连杆运动的复杂性，导引机构常以连杆作为导引物体运动的主要构件。根据平面连杆机构的应用特点，其运动学特性可以归纳为以下四个主要方面：

- 1) 能够实现运动形式的转换和运动性质的变换。
- 2) 能够实现运动规律的变换和运动函数的传递。
- 3) 能够实现轨迹运动。
- 4) 能导引刚体按一定位置姿态运动。

（一）实现多种运动形式的转换和运动性质的变换

机构是具有确定相对运动的构件组合体，机构中各构件按某种运动形式作确定的相对运动，这些运动形式不外乎：转动、往复运动（摆动或移动）、间歇运动和平面运动。所谓运动形式的转换就是：机构能将输入给机构原动件的运动变换为设计者希望的运动形式从机构的执行构件输出。由于机构原动件的运动来自原动机，而工程中以连续转动的原动机（电动机、内燃机）应用最为普遍，故本节将主要介绍能将转动转换为其他运动形式的平面连杆机构的特性及其有关知识。

1. 实现转动→转动的运动转换 能够实现这种运动转换的平面连杆机构有两类：一类是输入转动与输出转动运动参数相同的机构。这些机构有如图 2-11c 所示双转动滑块机构（即十字滑块联轴器）和平行四边形机构。在实际应用中十字滑块联轴器主要用来联接两相互平行，但有较小错位的转轴。该机构由于十字形的连杆的转速是输入、输出转速的一倍，而连杆质量在转动时产生的惯性力又不能实现完全平衡，其离心惯性力较大，故通常只用来联接低速转轴。平行四边形机构用途十分广泛，其中一个重要的原因是机构中主、从动曲柄能按相同的运动参数转动。图 2-20a 中所示平行四边形四孔钻机、火车机车车轮联动机构是其应用的实例。

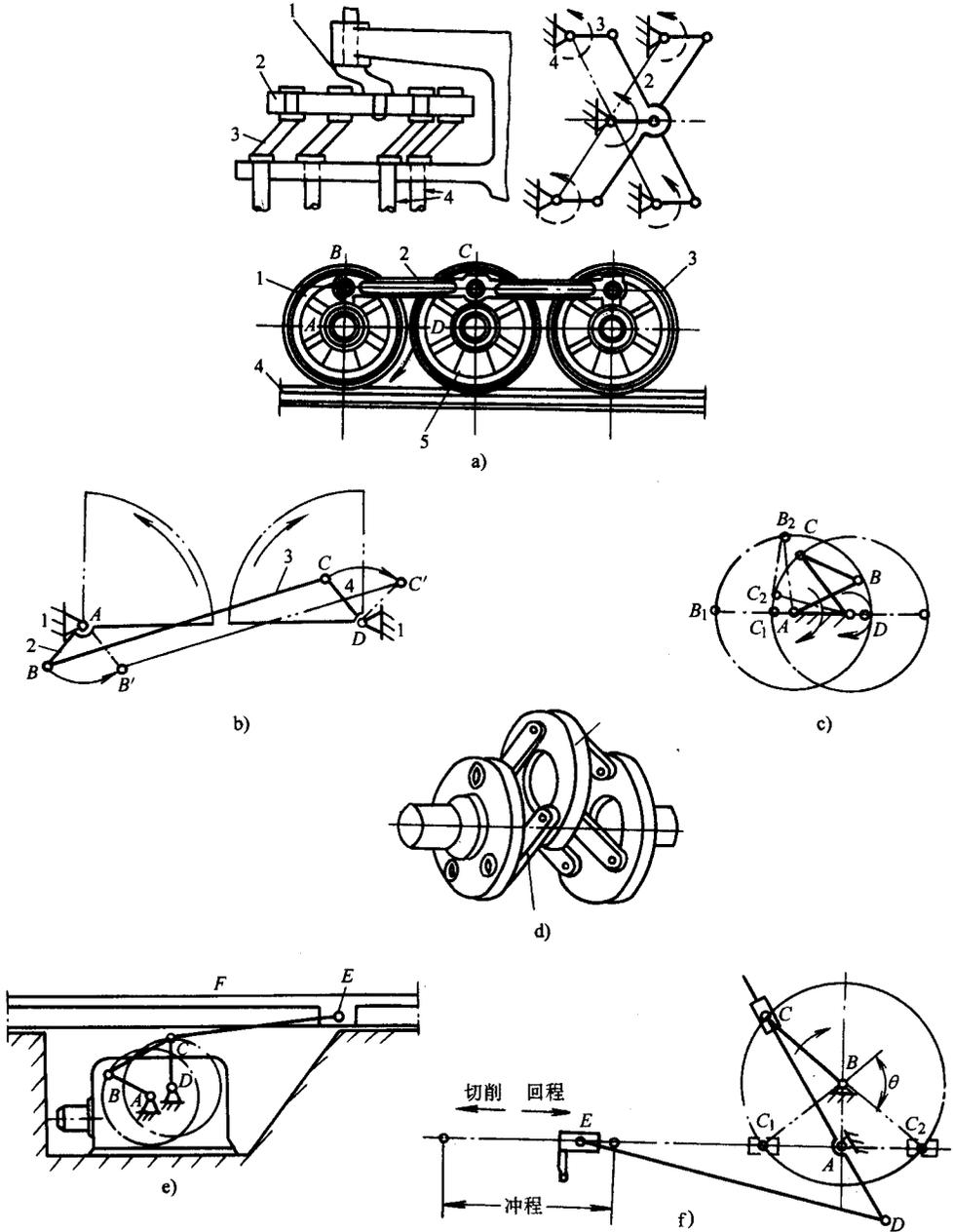


图 2-20 双曲柄四杆机构的应用

- a) 多孔钻机、车轮联动装置
- b) 车门启闭机构
- c) 交叉四边形机构
- d) 六杆联轴器
- e) 惯性振动筛
- f) 小型刨床

平行四边形机构当曲柄与连杆、机架共线，主动曲柄继续转动时，从动曲柄会出现运动方向不确定或机构运动形态改变的问题。当连杆长度大于或等于曲柄长度，主动曲柄与机架共线继续转动时，从动曲柄可能按和主动曲柄相同的方向转动；也可能按相反的方向转动成为反平行四边形机构（图 2-20b），这时主、从动曲柄转向相反，运动参数也不相同。当连杆比曲柄短主动曲柄与机架共线继续转动时，从动曲柄能按和主动曲柄相同的方向转动；但可能形成图 2-20c 中所示的交叉四边形机构，这时从动曲柄的运动参数与主动曲柄运动参数不相同。为了防止上述问题发生，可采用增加从动曲柄的转动惯量借用惯性运动来加以克服；或采用增加虚约束构件的方法来加以克服，图 2-20d 所示六杆联轴器、图 2-20a 所示的四孔钻机、火车机车车轮联动机构都是这一方法在平行四杆机构中的应用例子。

能将转动转换为转动但运动参数不同的平面连杆机构有：图 2-20e 所示非平行四边形的双曲柄机构，图 2-20b 所示反平行四边形机构，图 2-20c 所示交叉四边形机构和图 2-20f 所示转动导杆机构。图 2-20e 所示惯性振动筛，充分利用了非平行四边形双曲柄机构当主动曲柄匀速转动时从动曲柄作变速转动这一特点，使与从动曲柄相连的水平运动筛能在运动中产生较大的加速度，从而加剧被分筛粒料相互碰撞、分离来达到提高分筛效率的例子。图 2-20b 所示车门开闭机构是利用反平行四边形机构两曲柄转向相反的一个应用例子。图 2-20f 所示小型刨床是转动导杆机构的应用实例。从图 2-20f 中可以看出：曲柄 BC 匀速转动一周，刨刀完成进刀、退刀一个工作循环，但进刀时曲柄要转 $180^\circ + \theta$ 角，退刀时只转 $180^\circ - \theta$ 角。故进刀耗时长而退刀耗时短，刨刀在进刀时平均速度较慢，速度变化相对较小而较平稳，退刀时刨刀速度较快，返回迅速。刨刀在作往复运动过程中慢去快回的现象简称急回。使机构的执行构件在往复运动过程中具有急回运动特性是工程中用来改善机构受力，提高执行构件运动的平稳性，提高机械的生产率常采用的一种设计手段。

图 2-21a 所示万向联轴器是能将转动转换为转动的一种空间四杆机构。这种机构当运动输入轴与输出轴的轴间夹角 $\alpha = 0$ 时，两轴以相同的运动参数转动；当 $\alpha \neq 0$ 主动轴匀速转动时，从动轴作变速转动； α 角愈大，从动轴的速度波动愈厉害，而且传动效率也愈低。图 2-21b 所示汽车的后桥差速器与变速箱之间的传动轴，就是用两个万向联轴器串联（称双万向联轴器）使用的例子。当汽车在路面上行驶时，后轮会相对发动机不停地上下颠簸，这时无法用刚性轴将动力传给后轮。采用双万向联轴器来联接发动机与后轮，当后轮轴与发动机相对位置改变时，两万向联轴器的转动轴与万向联轴器中间轴的夹角 α_1 、 α_2 会不停地变化，但能始终近似保持 $\alpha_1 = \alpha_2$ ，这样当第一个万向联轴器将发动机的匀速转动变换为不匀速的转动时，第二个万向联轴器又将不匀速的传动还原成匀速的转动，从而保证汽车在颠簸的路面上能相对平稳地行驶。

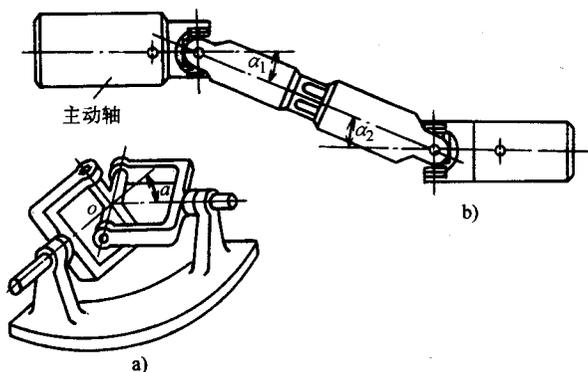


图 2-21 万向联轴器

a) 单万向联轴器 b) 双万向联轴器

2. 实现转动→往复运动的变换 往复运动包括往复移动和往复摆动两种。能实现主动件为转动、从动件作往复直线运动的平面四杆机构主要有：图 2-22a、b 所示的曲柄滑块机构，图 2-11b 所示正弦机构和表 2-1 中所示移动导杆机构（即定块机构，它是曲柄滑块机构滑块与导杆位置互异的变异机构，运动学性质与曲柄滑块机构相同）。

正弦机构可用于机械式计算器中作三角函数的运算机构，图 2-22e 所示的缝纫机进针机构也是正弦机构的应用例子之一。该机构当曲柄从水平位置每转 180° ，十字滑块从一个极限位置移动到另一个极限位置，故十字滑块来回运动时间相等无急回特性，十字滑块以曲柄转动中心为对称，以 2 倍曲柄长或大于 2 倍曲柄长度运动（图 2-22f）。相对于正弦机构，曲柄滑块机构只有一个移动副，故传动效率相对较高，应用更广泛，但曲柄滑块机构中滑块的运动规律要复杂得多。曲柄滑块机构通过滑块上的铰链 C 作导轨的平行线，如果该线通过曲柄转动中心 A ，则称为对心式曲柄滑块机构（图 2-22a），否则称偏置式曲柄滑块机构（图 2-22b）。对心式曲柄滑块机构的曲柄从水平位置每转 180° ，滑块从一个极限位置移动到另一个极限位置，当曲柄匀速转动时滑块在一个运动循环中来回移动的时间相等，滑块运动无急回；偏置式曲柄滑块机构由于滑块在两极限位置时，对应曲柄的两个位置不在同一直线上（图 2-22b），故偏置式曲柄滑块机构滑块运动有急回特性。曲柄滑块机构的滑块通常只在曲柄转动中心一侧运动；对心式曲柄滑块机构滑块的行程为 2 倍曲柄长度，偏置式曲柄滑块机构滑块行程大于 2 倍曲柄长度；当对心式曲柄滑块机构的曲柄与连杆长度相等且在连杆上安装一个辅助圆销，并在机架上安装相应的导槽后（图 2-22c），滑块可以以曲柄转动中心对称作行程为曲柄 4 倍长度的往复直线运动，这种机构也被称为等腰对心式曲柄滑块机构。曲柄滑块机构广泛地应用于内燃机、蒸汽机和空气压缩机中。图 2-22d 所示为偏置式

曲柄滑块机构在自动送料机中的应用例子。由于曲柄滑块机构当曲柄与连杆运动至共线附近位置时,作用在曲柄上较小的力矩能在滑块上产生很大的力对外输出,故曲柄滑块机构也广泛地应用于各种冲压机械中。

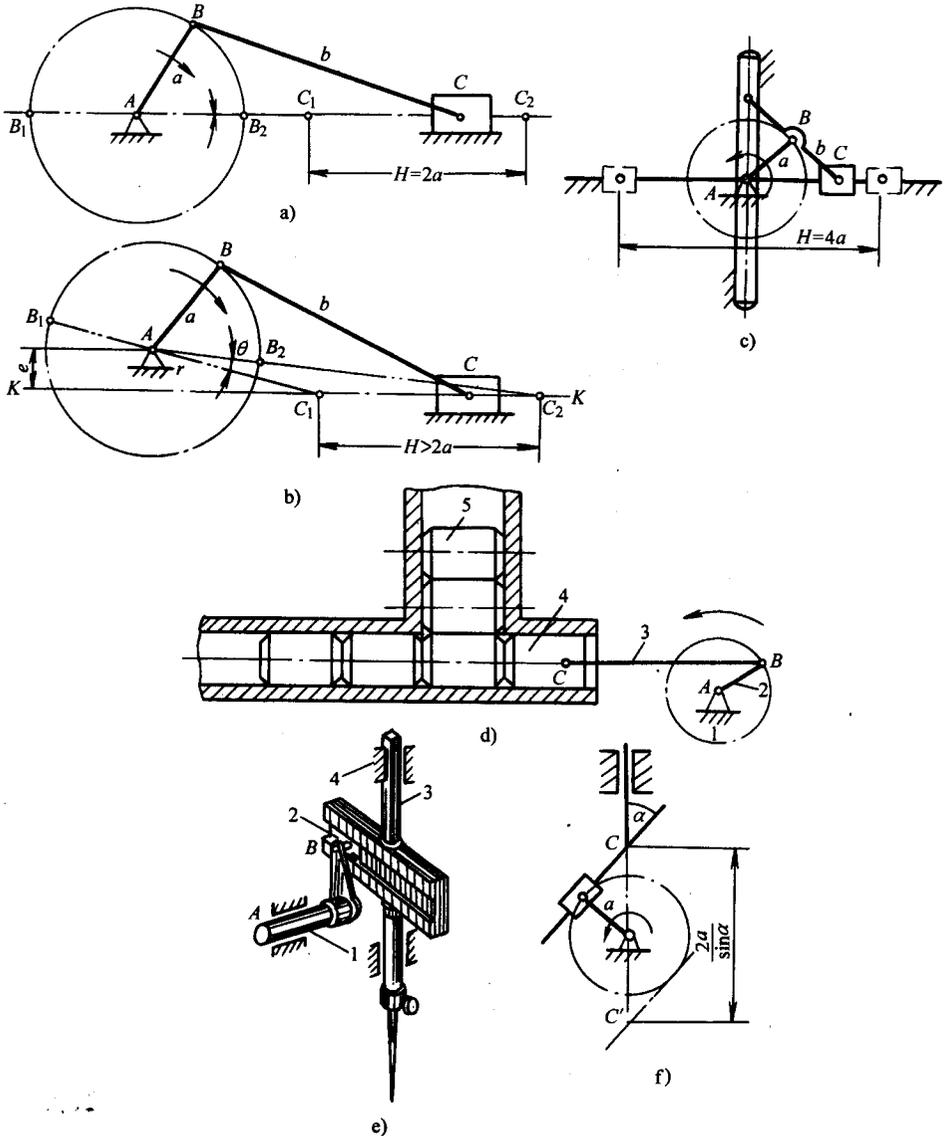


图 2-22 转动转换为往复直线移动的机构

- a) 对心式曲柄滑块机构 b) 偏置式曲柄滑块机构 c) 等腰对心式曲柄滑块机构 d) 自动送料机 e) 缝纫机进针机构 f) 行程大于 2 倍曲柄长的曲柄移动导杆机构

从动件能作往复摆动的平面四杆机构有如表 2-1 中所示的曲柄摇杆机构和摆动导杆机构。图 2-23a 所示颚式碎石机和雷达天线俯仰机构是曲柄摇杆机构在工程中的实用例子。图 2-23b 所示小型插床和牛头刨床的切削运动机构均采用了摆动导杆机构。从图中可以看出：由于摆杆在两极限位置时，曲柄与之对应的两位置不在一条直线上，因此当曲柄匀速转动时，导杆的摆动有急回。由于摆动导杆机构曲柄两位置间所夹的锐角（极位夹角）与导杆的摆角相等，而导杆的摆角可以根据要求设计得较大，故摆动导杆机构导杆的急回运动更明显，导杆低速摆动时速度更加平稳。

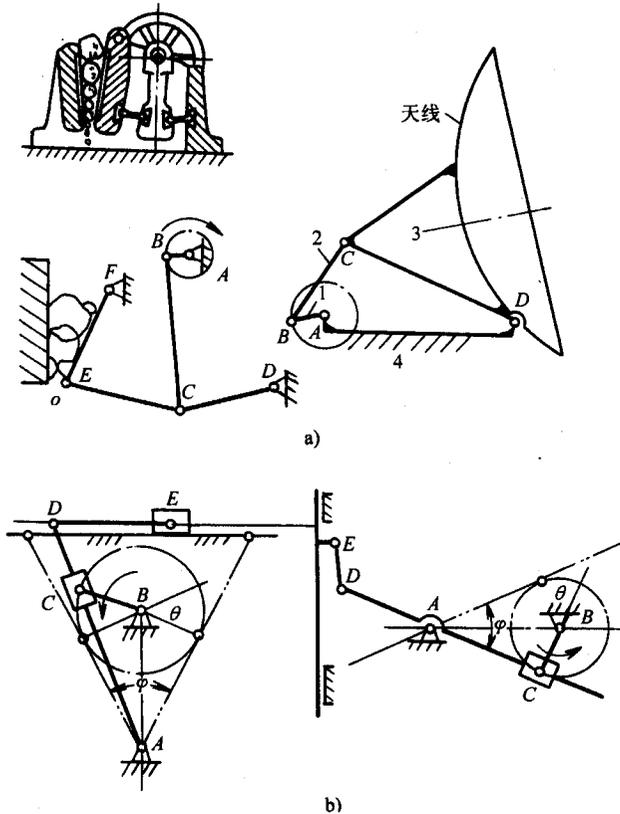


图 2-23 转动转换为往复摆动的机构应用

a) 颚式碎石机和雷达天线俯仰机构 b) 牛头刨和插床

以上两类机构的主从件的运动变换形式在一定条件下是可逆的，例如内燃机是以活塞为主动，将活塞的往复直线运动转换为转动的典型例子。

3. 实现转动→间歇运动的转换 主动件连续运动从动件能作短暂停歇的运动称为间歇运动。能够实现这种运动形式转换的平面连杆机构有：图 2-24a 所示圆弧导轨摆动导杆机构；图 2-24b 所示圆弧导轨正弦机构。这两种机构当圆弧导轨的

曲率半径与曲柄长度相等时，从动杆分别作间歇摆动和移动。

图 2-24c 所示是采用平面六杆机设计得到的冲压机，该冲压机的冲头能作短暂停歇运动。图中因为曲柄摇杆机构 $ABCD$ 的连杆上 M 点的轨迹有一段近似圆弧的曲线轨迹 $\widehat{m'm''}$ ，连接冲头的连杆 \overline{MN} 的长度设计等于该圆弧的曲率半径，当连杆 \overline{MN} 的 M 点在 $\widehat{m'm''}$ 圆弧上运动时，冲头上的 N 点正好位于圆弧 $\widehat{m'm''}$ 的圆心上，使冲头在该运动时间内停歇。图 2-24d 所示为螺纹自动切制机中能作停歇运动的平面六杆机构。该六杆机构当曲柄 AB 与连杆 BC 在共线附近位置运动时， C 点的位移量很小，而这时 CD 杆上的 $C'D$ 与 $C'E$ 杆正好也处于共线位置附近，因此，在该瞬时曲柄的运动对滑块 E 的运动几乎没有影响，滑块这时作短暂的停歇运动。

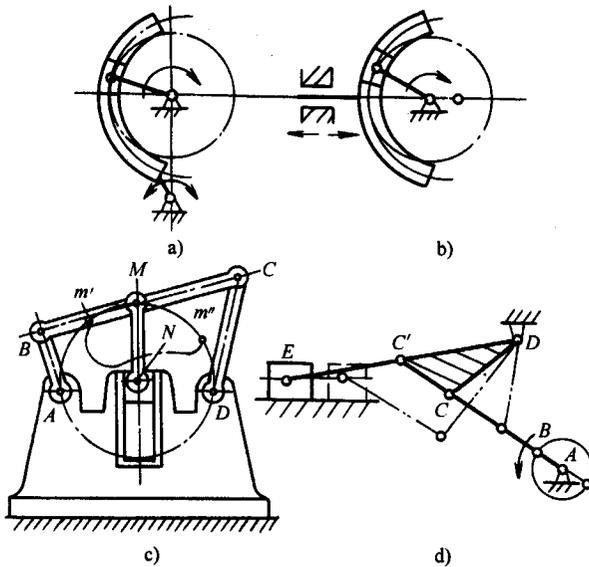


图 2-24 转动转换为间歇运动的机构应用

- a) 圆弧导轨摆动导杆机构 b) 圆弧导轨移动导杆机构
 c) 可以实现停歇运动的冲床 d) 螺纹自动切制机构

以上主要介绍了原动件为转动的平面连杆机构的运动转换、运动特性与部分应用例子。为了减少机构的数量，提高机构的传动效率，在生产实践中常常采用输出往复运动的原动机（如活塞式气、液缸，直线电动机，双向电机等）来驱动机构。例如图 2-11a 所示的双滑块机构，它可将原动件的移动转换为另一个方向的移动。图 2-25a 所示形状为等腰梯形的双摇杆机构（简称等腰梯形机构）成功地应用于汽车的方向操纵机构中，操纵该机构中的一个摇杆使车轮转向，便能使固联在两摇杆上的车轮轴在转向过程中保证两轴的延长线始终相交于后轮轴的延长

线于一点，使汽车的四只车轮能在转弯时绕同一点转动，从而可以减轻车轮磨损、减轻驾驶人员操纵车辆的劳动强度。

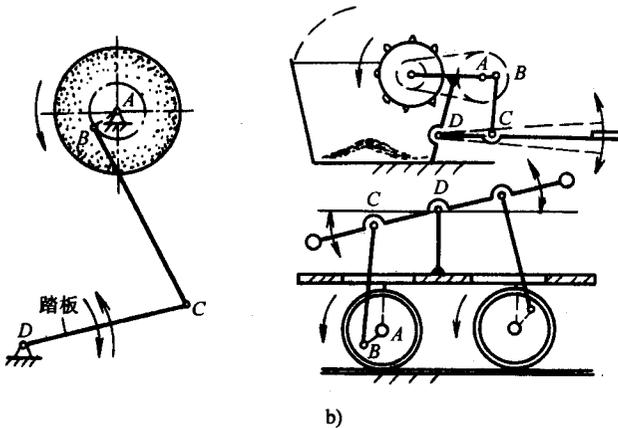
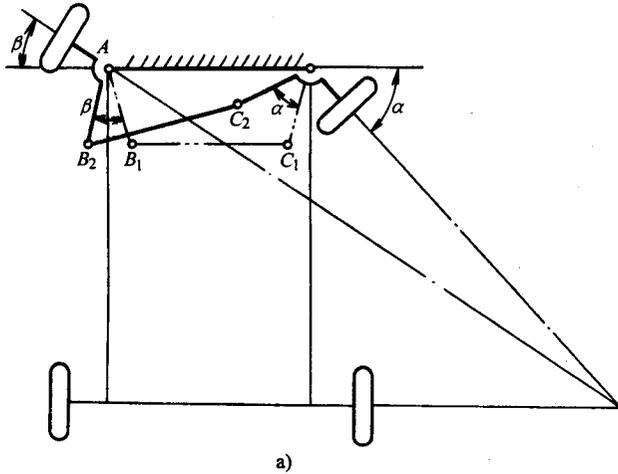


图 2-25 以摇杆为主动件的机构应用

a) 汽车转向机构 b) 脚蹬砂轮机、脚踏脱粒机、手动轨道车

以往复运动为主动转换为从动件转动的机构常见于曲柄摇杆机构和曲柄滑块机构，但这种运动形式的转换当连杆与曲柄共线时常会把曲柄“顶死”，使曲柄无法继续转动，产生这种现象的原因将在后面进一步深入讨论。这种运动形式转换的机构，特别是摇杆为主动件时，比较适合以人力为动力的机械，例如：脚踏式脱粒机、砂轮机、缝纫机、人力轨道车等（图 2-25b）。

（二）实现运动规律的变换与运动函数的再现

由于机构具有确定的相对运动，机构中任意两构件间的位置、速度和加速度存在着——对应的函数关系，这些运动函数关系称为机构的传动函数，能够实现

某种传动函数的机构称为该传动函数的函数发生机构。平面连杆机构通常用两连架杆的运动来实现预期的函数关系。例如图 2-11b 所示正弦机构能通过两连架杆的角位置与位移量的关系再现正弦函数，图 2-12d 所示导杆滑块机构也能通过机构两连架杆的角位置与位移量的关系再现正切函数……。

机构的传动函数用数学表达式来描述通常比较复杂，为了便于对机构的性能进行定性的分析比较，可以直观地用直角坐标曲线来描述：以横坐标表示主动构件的角位移，纵坐标表示从动件的（角）位移、（角）速度和（角）加速度画出的曲线图分别称为：机构的位移线图、速度线图和加速度线图，并统称为机构的运动线图。运用机构运动线图能迅速地了解机构的运动特性。图 2-26 中用实线和虚线，对应示出了具有相同曲柄与连杆长度的对心式曲柄滑块机构和偏置式曲柄滑块机构的运动线图，比较这些线图可以得出以下结论：

1) 偏置式曲柄滑块机构滑块运动有急回，而对心式曲柄滑块机构无急回。

2) 偏置式曲柄滑块机构的行程大于对心式曲柄滑块机构的行程。

3) 偏置式曲柄滑块机构在“慢进”时滑块的加速度较小，运动速度较平稳。

4) 偏置式曲柄滑块机构在“急回”时滑块的加速度较大，加速度值波动较大，在高速运动时，机构的惯性力较大，更容易引起冲击和振动。

由于运动线图能比较直观地反映出机构的传动函数关系和机构在运动学方面的特性，利用机构运动线图能比较方便地对各种机构进行运动学性质方面的比较，有利于设计者根据设计要求对机构作出选择，并对所选择的机构进行定性分析和优化设计，因此，熟习各种典型机构的运动线图的特征对机构设计者是十分有益的。

机构传动函数的性质与机构的几何尺寸有密切的关系。当需要某一平面连杆机构的连架杆在某一运动域内再现某一可能再现的函数时，通常可以通过对机构

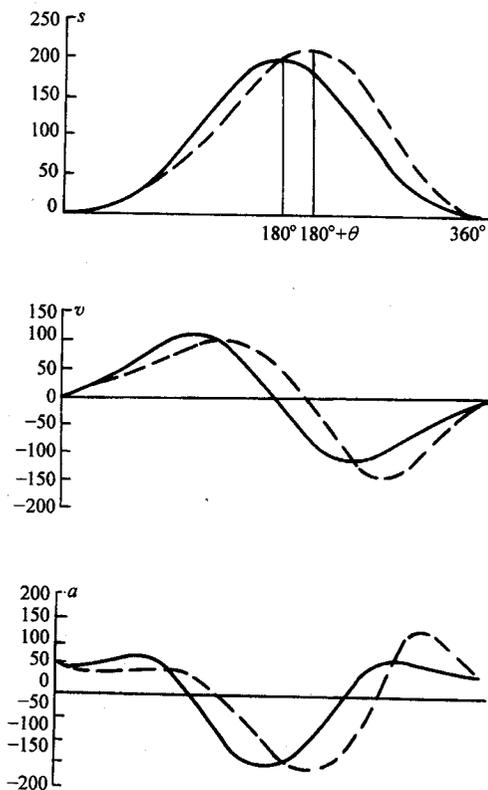


图 2-26 对心式和偏置式曲柄滑块机构运动性能的比较

— 对心式 --- 偏置式

杆长进行设计来实现, 在绝大多数情况下, 连架杆只能近似再现所要求的函数关系。例如图 2-27 所示两种连架杆能近似再现函数 $y=\lg x$ 的铰链四杆机构, 由于两连架杆转角的象限和取值范围不同, 设计得到的四杆机构的几何尺寸也不相同 (图中数据为各杆相对机架的杆长比)。

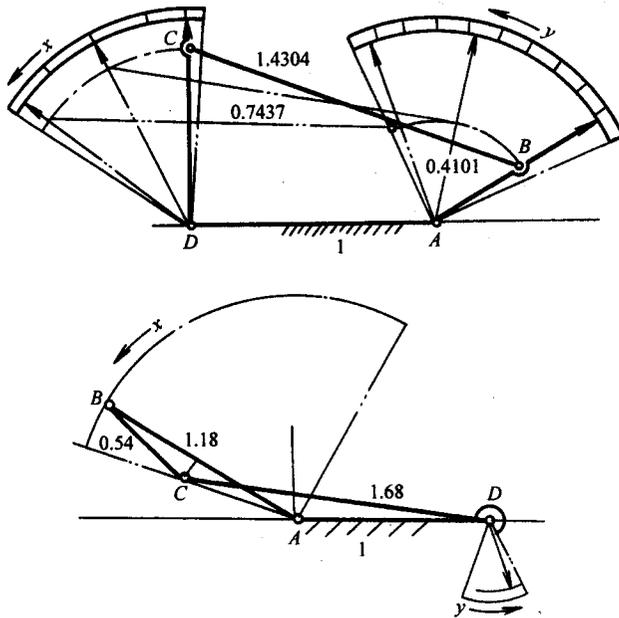


图 2-27 近似再现函数 $y=\lg x$ 的平面四杆机构

(三) 实现轨迹运动

平面连杆机构中, 连杆上不同位置的点随着机构的运动, 会被导引到连杆运动平面不同的位置, 从而描绘出各种形状不同的平面轨迹曲线, 这些轨迹曲线又被特称为连杆曲线。当研究机构的连杆曲线时, 平面连杆机构又被称为轨迹发生机构。可以证明: 铰链四杆机构的连杆曲线是 6 阶代数曲线; 带一个移动副的平面四杆机构的连杆曲线是 4 阶代数曲线。因此, 铰链四杆机构的连杆曲线形状更丰富, 变化也更多、更富有应用价值。图 2-28 所示搅拌机构和热轧钢轨搬运机构是根据搅拌、搬运所需的轨迹曲线设计得到的铰链四杆机构例子。

当需要设计一个平面四杆机构导引连杆上某一点实现预期的轨迹时, 如果对再现轨迹精度要求不高时, 可直接采用连杆曲线图谱来进行设计。

图 2-29a 示出了摆杆滑块机构连杆上一点的连杆曲线; 图 2-29b 示出了曲柄摇杆机构连杆上不同位置点的连杆曲线。机构类型不同、几何尺寸不同、连杆上选取的点不同, 其连杆曲线的形状也各不相同。为了方便设计时选用, 铰链四杆机构的连杆曲线已被收集整理成册, 汇编成“连杆曲线图谱”供使用者查阅。图

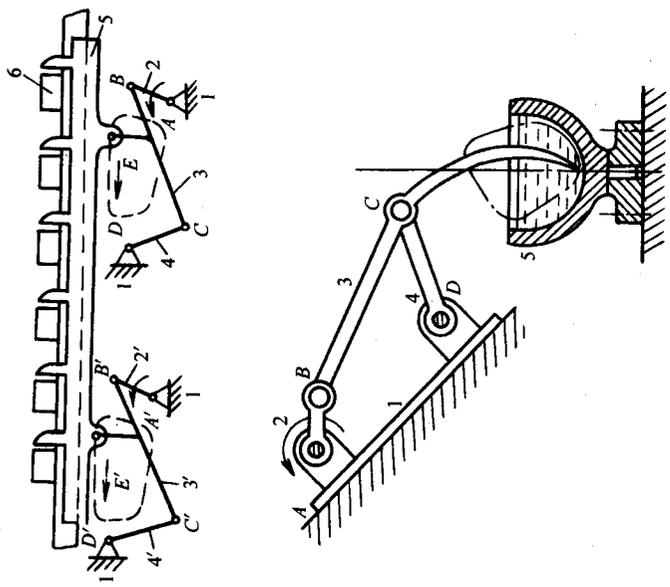


图 2-28 连杆曲线的应用

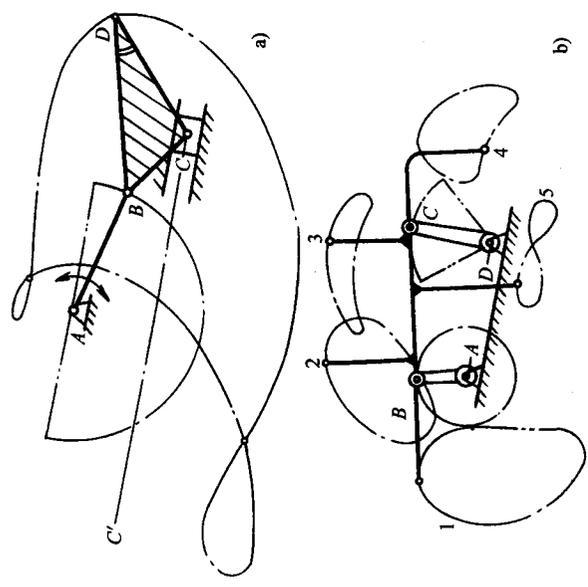


图 2-29 平面四杆机构的连杆曲线
 a) 具有一个移动副的平面四杆机构的连杆曲线
 b) 铰链四杆机构连杆曲线

2-30 为图谱中的一张图。图中右下方的 3、1、2、2.5 分别表示图中各杆的相对长度比，曲线及曲线上的空心小圆表示机构运动至图示位置，连杆上小圆位置的点所描绘出的轨迹曲线，轨迹曲线由 72 段线段构成（图中未画出），每段曲线表示曲柄每转过 5° 时连杆上的点运动的轨迹，由此可以大致分析出该点运动时的速度变化情况。设计时可以直接在图谱中查找与设计要求轨迹相近的曲线及其发生机构，如果查找到的连杆曲线已能满足设计要求时，则直接将发生机构的相对杆长比按比例放大或缩小即可。若尚感不足，也可以用该发生机构尺寸作为计算初值对机构进行优化设计。

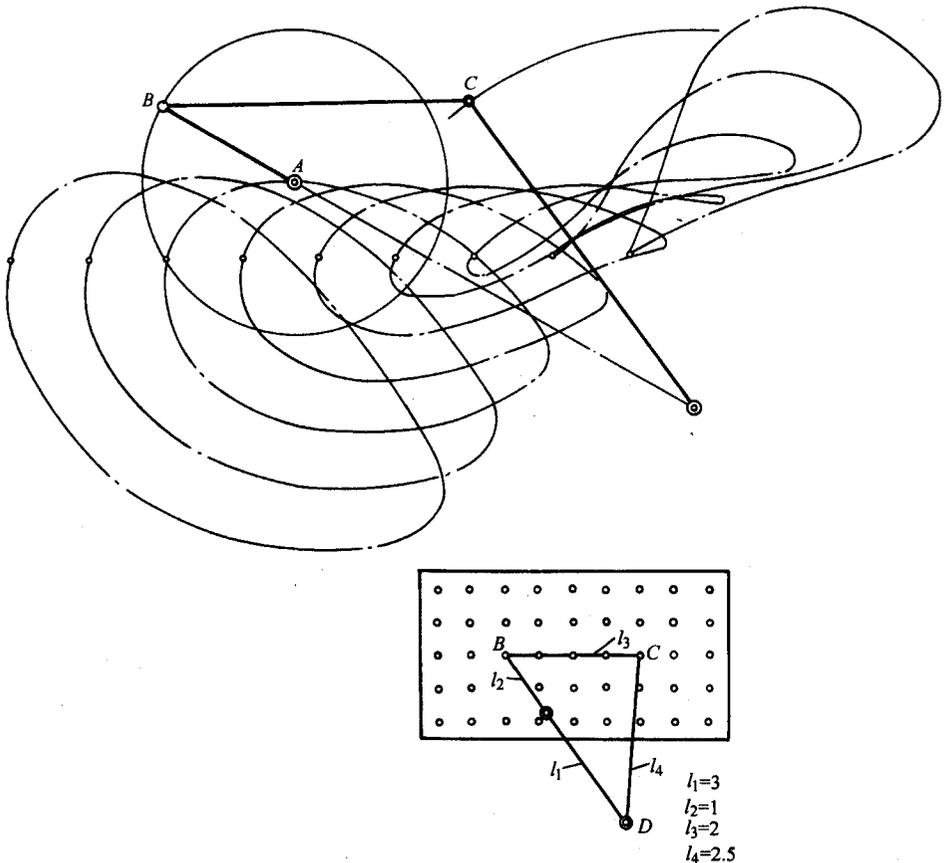


图 2-30 连杆曲线图谱实例

利用连杆曲线也能实现一些特殊的运动设计要求。例如：要求设计一个摆杆能在其摆动的两极限位置均作停歇的连杆机构，我们可以按以下方法进行设计。在连杆曲线图谱中可以找到如图 2-31a 所示的平面四杆机构 $ABCD$ ，各杆的相对长度比分别为：

$CB=CD=CM=1$, $AD=1.15$, $AB=0.43$, $\varphi=95^\circ$ 。

该平面四杆机构连杆上的 M 点的轨迹曲线有两段向同侧弯曲的圆弧，且两段圆弧的曲率半径近似相等，通过作图可求出两圆弧的两圆心 E' 和 E'' ，并确定出圆弧半径的相对长度比 $R =$

3.34 ，在 $E'E''$ 连线的垂直平分线上任选一点 F 作为摆杆的摆动中心，以 $EM=R=3.34$ 作为联接摆杆上 E 点与四杆机构上 M 点的连杆，得到图示平面六杆机构 $ABCDEF$ ，并求出其余各杆的相对长度分别为： $EF=0.41$ ， $AF=2.51$ ， $DF=1.47$ 。当该六杆机构连杆 BC 上 M 点沿两圆弧轨迹运动时， E 点将分别位于圆心位置 E' 和 E'' 上不动，从而实现摆杆 EF 在摆动的两极限位置上停歇。又例如：在设计图 2-1b 所示的鹤式起重机时，为了避免在搬运重物平移时因不必要的升降而消耗能量，要求吊臂上一点的轨迹应尽可能作水平直线运动。从连杆曲线图谱中可以找到很多能引导直线轨迹运

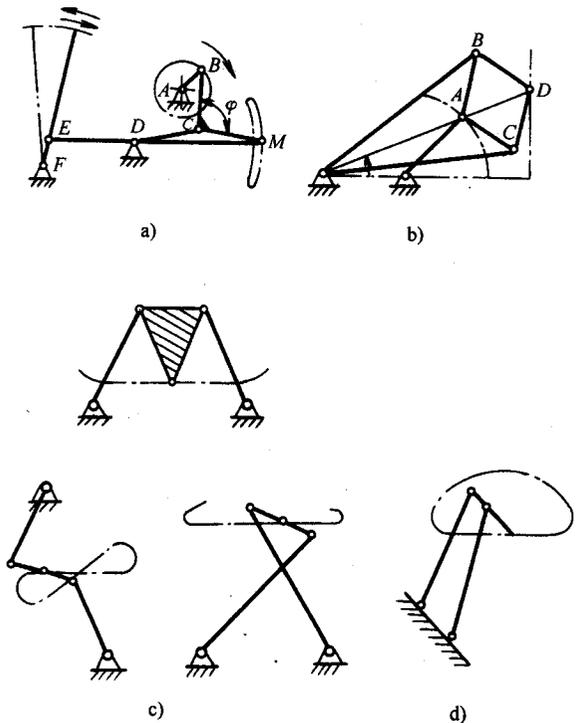


图 2-31 特殊连杆曲线的应用

- a) 间歇摆动平面六杆机构 b) 精确直线运动机构
c) 实现近似直线运动的机构 d) 鹤式起重机所
选定的近似直线运动机构

动的连杆机构，有如像图 2-31b 所示能精确实现直线轨迹运动的机构；也有如像图 2-31c 所示能在某一运动域中近似实现直线运动的机构。设计最终选定图 2-31d 所示的双摇杆机构，其原因除了考虑能引导重物作水平直线运动外，还考虑了机构的复杂程度、重物运动速度的均匀性、重物与机构的相互位置关系以及机构受力及能量消耗等多方面因素。

在对轨迹发生机构进行设计时，有时会出现：轨迹曲线已能满足设计要求，但发生机构几何尺寸不理想或轨迹曲线与发生机构的相对位置关系不理想的情况，这时可用罗伯茨-契贝谢夫定理寻找能实现该轨迹曲线的另外两个四杆机构。罗伯茨-契贝谢夫定理可以表述为：铰链四杆机构连杆上任意一点的轨迹可以由三个不同的铰链四杆机构来再现。三个铰链四杆机构的具体作图求解过程如下：设图 2-32 所示铰链四杆机构 $ABCD$ 连杆上 M 点的轨迹为另两个四杆机构应再现的轨

迹,分别以 AB 、 BM 和 DC 、 CM 为平行四边形的两条边作两个平行四边形 $ABME$ 和 $DCMF$ 得 E 、 F 两点;再作 $\triangle GEM \sim \triangle MBC \sim \triangle HMF$ 得 G 、 H 两点,再以 MG 和 MH 为平行四边形两边作平行四边形 $GMHK$ 得 K 点,以 E 、 F 、 G 、 H 和 M 点为连接各构件的铰链; K 为固定铰链可得到一个自由度等于 1 的十杆机构,当四杆机构 $ABCD$ 运动时,其余两个四杆机构 $AEGK$ 和 $DFHK$ 随 $ABCD$ 运动而具有确定的相对运动。十杆机构中 M 点的轨迹与四杆机构上 M 点的轨迹不变,故当保留其中任意一个四杆机构,其连杆上的 M 点均能再现出相同的轨迹曲线。

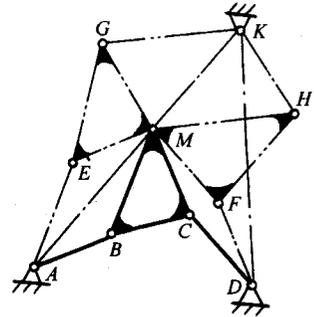
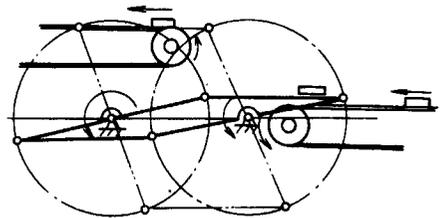


图 2-32 罗伯茨-契贝谢夫机构

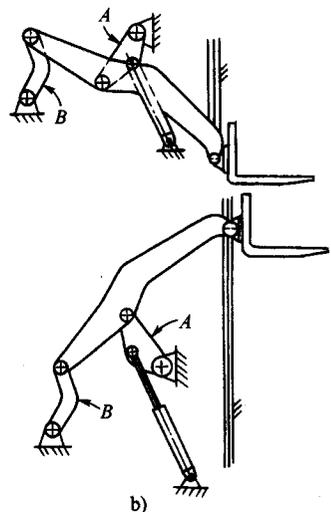
(四) 导引刚体实现一定的位置姿态要求

平面连杆机构不仅能导引机构上某一点沿给定的轨迹运动,也能导引刚性构件按给定的若干位置按某种姿态运动(简称“位姿”运动),导引刚性构件按给定位姿运动称为刚体导引,导引刚体按给定位姿运动的机构称为刚体导引机构。这类机构也可认为是将简单的转动(移动)转换为复杂平面运动的转换机构。

刚体导引的应用实例在货物输送作业中很容易观察到。对于那些不适宜于翻动的货物,人们总希望它们在被输送的过程中始终保持一种固定不变的姿态。图 2-33a 所示采用平行四边形机构作为导引货物运动的机构,它可以将货物连续不断地从低位传送带上举起,并保持原来的姿态转运到高位另一传送带上被送走。图 2-33b 所示装卸机械采用了平面六杆机构作为导引机构,该机械能使货物在姿态不变的前提下将货物垂直地举起或放下。



a)



b)

图 2-33 位姿不变的导引机构
a) 送料机(平行四边形机构) b) 垂直
举升机(平面六杆机构)

除了采用铰链四杆机构作为刚体导引机构外,实际应用中也有采用多杆机构和带移动副的机构作为刚体导引机构。例如:在设计汽车发动机舱盖的开闭机构时,通常要求导引舱盖运动的机构在舱盖被开启时,能最大限度地暴露发动机舱内的各个机件,并且不妨碍维修人员对发动

机各部分进行检修，此外，还要求舱盖的导引机构的体积要小，以减小机构在机舱内占用的空间和位置，舱盖开启应轻便灵活。图 2-34a 所示六杆机构能充分满足上述设计要求：发动机舱盖将围绕一个位于汽车之外的 P 点转动，使舱盖能被充分地托起，同时借助安装在机构上的弹簧使舱盖开启轻便、灵活，并能使舱盖在未被压下时始终保持开启状态。图 2-34b 所示为带有两个滑移副的四杆机构作为导引机构的例子。该机构用液压缸驱动，当导引机构运动时，磁性握持器将板形工件从水平输送滚轮上取出，然后导引工件翻转 90° ，同时向上运动将工件垂直插入两输送辊轮之间，辊轮便可将工件送入下一道工序。

刚性构件的直线导引在实际应用中有十分重要的价值，因为它可以省去维持构件作直线运动的导轨，这对于提高传动效率、降低生产成本、节省机构的空间都非常有利。图 2-35 所示的搅拌器是其应用实例之一，该机构无导轨但能够导引搅拌电动机作近似直线平动，使搅拌头对瓶中的溶液进行搅拌时能方便地放下和举起。

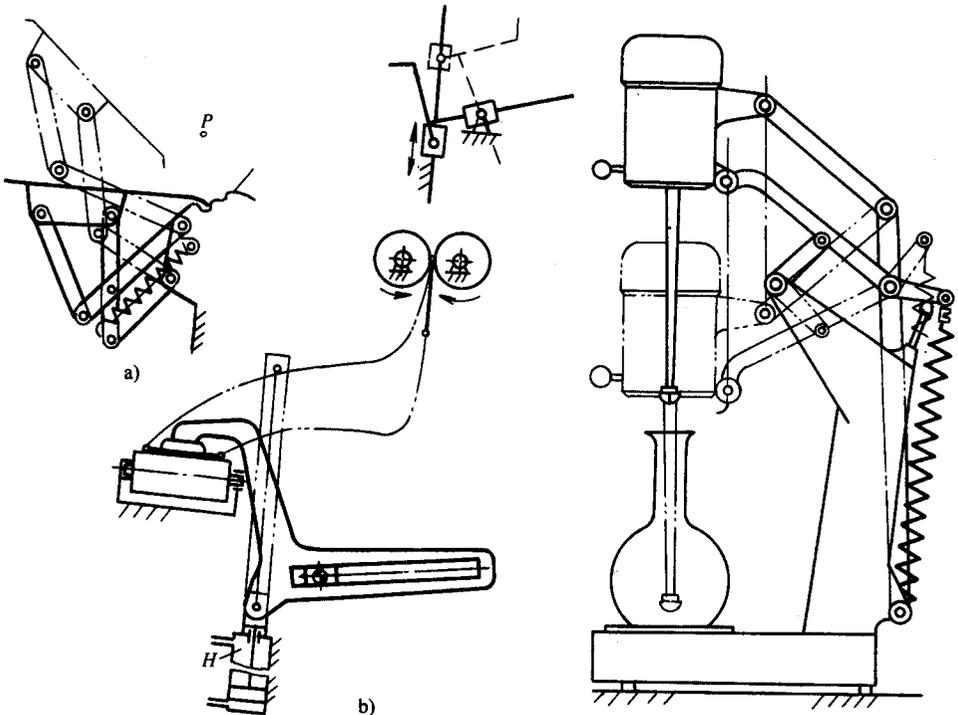


图 2-34 其它刚体导引机构

a) 发动机舱盖启闭机构 b) 送料机

图 2-35 直线导引机构

二、平面连杆机构的运动分析方法

(一) 运动分析的目的与方法

在上一讲中我们讨论了平面连杆机构的运动学特性并介绍了一些比较典型的应用例子。对于一个机构设计者来说,仅知道这些是远远不够的,设计者不仅要熟悉各种机构的性质、应用特点,还应当能够对机构运动的输入与输出关系作出定量的分析,熟悉运动参数的分析计算方法。因为,满足设计运动参数量的要求是机构综合的重要内容之一。例如:

在设计刨床切削运动机构时,为了提高切削的工作效率、提高切削质量、延长刨刀的使用寿命,对刨刀的运动提出了如下一些设计要求:作往复直线运动的刨刀应具有急回特性;切削工作时刨刀的进刀速度应尽可能接近匀速;最大切削速度不得超过 0.2m/s 。根据上述要求,在具有急回运动特性的机构及其组合机构中初选出图 2-36 所示的三个方案,但这三个方案中哪一个方案能够使刀具获得最平稳的运动?刀具运动最平稳时机构的几何尺寸为多少?原动机的转速为多少时刨刀的最大速度才能小于 0.2m/s ?所有这些问题都必须通过对机构进行运动分析才能确定。又例如:为了确定机构执行构件的运动行程,考查机构上某些点的运动轨迹是否符合设计要求,运动构件是否会与机壳或其他构件发生运动干涉、碰撞?也必须对机构上某些点的行程、位移或轨迹进行定量的运动分析。此外,对于高速、重载、重型机械、过大的惯性力或惯性力矩会使机械在运动中产生振动和冲击,严重时甚至会破坏机械的正常运转和使用寿命,要减小这些不良影响,也必须对机构进行运动分析,计算各构件的角速度、角加速度和各质心点的加速度,进一步计算出作用在构件上的惯性力和惯性力矩,才有可能分析并找出解决问题的方法。由此可见,机构的运动分析是机构综合必不可少的重要内容之一。

运动分析要解决的问题,是掌握必要的运动分析的方法及其相关理论;在已知机构的几何参数、原动件的运动规律和运动参数的条件下,确定机构上任一点的轨迹、位置、位移、速度和加速度;计算机构中任意构件的角位置、角位移、角

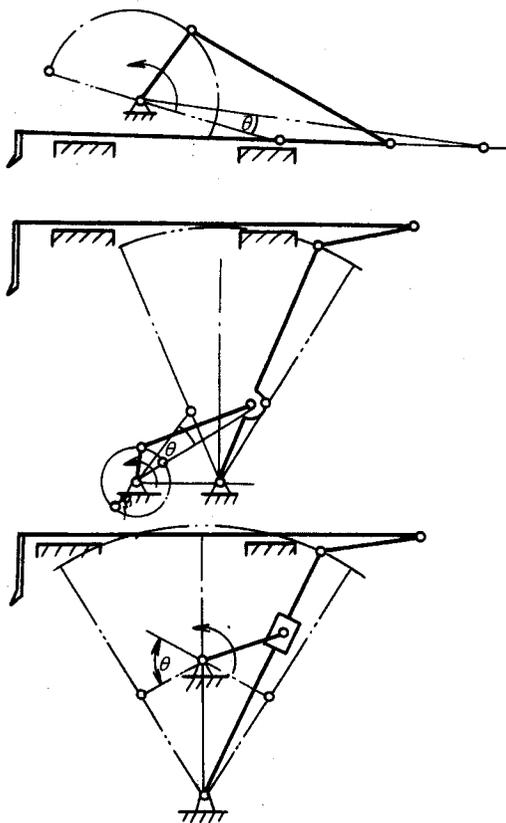


图 2-36 具有急回运动特性的连杆机构应用

速度和角加速度。

机构运动分析方法主要有：实验法、图解法和解析法。本章主要介绍图解法和解析法。在介绍机构运动分析方法时，将忽略构件的弹性变形和运动副间隙对机构运动的影响。

(二) 平面连杆机构运动分析的图解法与连杆机构基本运动特征参数

图解法直观、实用，在一般工程设计中也有足够的分析精度，故至今仍广泛地被采用。图解法特别适用于以下场合：

1) 作为运动解析法建模和校核的手段。

2) 求解或验证机构运动的某些特殊参数，例如：确定从动杆的运动极限位置；构件的行程或角位移范围；急回运动参数；确定机构死点位置 [参见第三节(一)]；了解构件在运动中的位置与姿态；机构的瞬时传动比及构件的瞬心位置等等。

由于图解法分析计算的精度与作图精度有关，因此，在作图时必须认真确定恰当的作图比例尺 μ_l [作图比例 $\mu_l =$ 构件的实际长度 (m) / 构件作图的实际长度 (mm)]，然后按作图比例尺，准确地绘制有足够精度、清晰的机构运动简图，并认真完成作图求解过程中的每一作图步骤。

下面用图解法分析几个典型例题，介绍如何应用图解法求四杆机构基本运动特性的特征参数，并了解图解法的基本原理与作图步骤。

1. 平面连杆机构从动杆的极限位置、行程和机构的急回运动参数 这些都是平面连杆机构重要的基本运动特征参数。用图解法求解简单、直观，借助简单的几何计算便能获得准确的计算结果。当机构较复杂时，用图解法求解上述问题比用解析法求解要方便和容易得多。

例 2-1 已知铰链四杆机构 $ABCD$ ， $\overline{AB} = a = 10\text{mm}$ ， AB 为原动件， $\overline{BC} = b = 40\text{mm}$ ； $\overline{CD} = c = 30\text{mm}$ ； $\overline{AD} = d = 35\text{mm}$ ， AD 为机架，判断该铰链四杆机构的类型？用图解法求作从动杆的最大角位移。

解

1) 因为该铰链四杆机构的最短杆与最长杆长度之和 ($a + b = 50\text{mm}$) 小于其余两杆长度之和 ($c + d = 65\text{mm}$)，故该铰链四杆机构最短杆 AB 上的两个转动副 A 、 B 是整转副， CD 杆上的两个转动副 C 、 D 是摇转副，因 AD 是机架，所以该机构是曲柄摇杆机构， AB 是曲柄， CD 是摇杆。

2) 选择适当的长度比例尺 μ_l 在图纸上的适当位置水平画出机架 $\overline{AD} = (35/\mu_l)\text{mm}$ ，以 D 为圆心，摇杆 $\overline{CD} = (30/\mu_l)\text{mm}$ 为半径画圆 (图 2-37)。

3) 分别以连杆与曲柄长度和 $(b + a)/\mu_l = (50/\mu_l)\text{mm}$ 和连杆与曲柄长度之差 $(b - a)/\mu_l = (30/\mu_l)\text{mm}$ 为半径画弧与以摇杆长 \overline{CD} 画的圆交于 c_1 、 c_2 和 c_3 、 c_4 ，可得四杆长度相同，但装配形式不同的两个曲柄摇杆机构 AB_1C_1D 和 AB_2C_2D 。从图

中可以看出：两个曲柄摇杆机构摇杆的摆角均为 φ ，两个 φ 角以机架为对称轴对称。可以证明：铰链四杆机构的四根杆长 a 、 b 、 c 、 d 满足最短杆与最长杆长度之和小于但不等于其余两杆长度之和时，同一组杆长 a 、 b 、 c 、 d 可以装配成两个不同的曲柄摇杆机构，当曲柄转动时，两机构的摇杆以不相同的运动参数摆动，在设计曲柄摇杆机构时应充分注意装配形式（亦称装配模式）对机构运动的影响。

当四杆机构的杆长使 $a+b=c+d$ （连杆最长）或 $a+c=b+d$ （摇杆最长）或 $a+d=b+c$ （机架最长），同一组杆长所得到的两个曲柄摇杆机构摇杆的摆动区域将合二为一，摇杆理论上在以机架对称的位置上下摆动，这时曲柄摇杆机构只有一种装配模式如图 2-38 所示。当曲柄、连杆、摇杆与机架共线，曲柄继续转动时，摇杆会出现摆动方向不确定或只在其摆角一半的区域中摆动的问题。

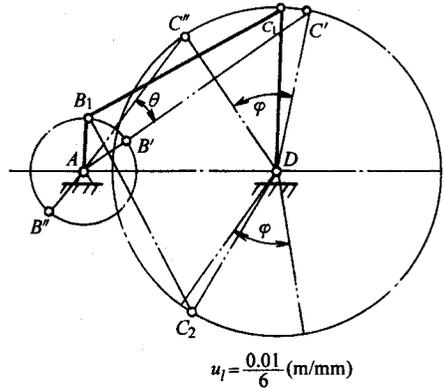


图 2-37 铰链四杆机构装配模式

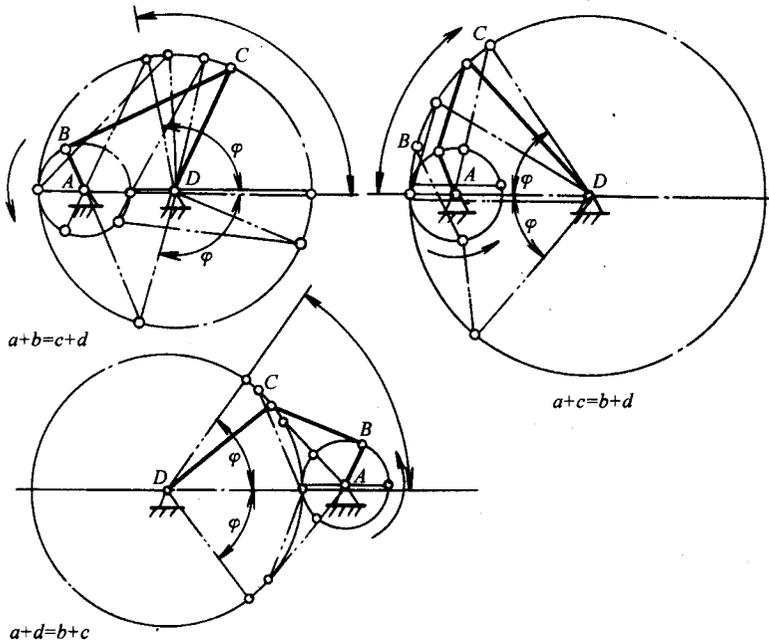


图 2-38 铰链四杆机构杆长的特殊配置

从图 2-37 中可以看出：当曲柄与连杆重叠共线时，作往复运动的摇杆运动至左极限位置 DC'' ；当曲柄与连杆伸展共线时，摇杆运动到右极限位置 DC' ，由于摇

杆来回摆动的摆角大小相等, 如果对应摇杆左、右极限位置两次曲柄位置不在同一条直线上, 当曲柄匀速转动一周, 摇杆摆去的时间与摆回的时间不等, 摇杆的往复运动会呈现出急回特性。为了给急回特性作出定量的说明, 工程中将作往复运动(摆动或移动)的从动杆来回运动时间的比值称为机构从动杆往复行程时间比系数, 简称行程时间比系数, 并用字母 K 表示, 用以作为机构的基本的运动特征参数。

在图 2-37 实线所示的曲柄摇杆机构中, 当匀速转动的曲柄由 B' 逆时针转过 $180^\circ + \theta^\circ$ 到 B'' 位置时, 摇杆由 $C'D$ 摆至 $C''D$ 所耗时间长, 摇杆的这一行程称为慢行程或工作行程; 曲柄从 B'' 转过 $180^\circ - \theta^\circ$ 到 B' 位置, 摇杆由 $C''D$ 返回至 $C'D$ 耗时短, 摇杆的这一行程称为快行程或空回行程。设: 工作行程摆动耗时为 t_1 , 空回行程摆动耗时为 t_2 ($t_1 \geq t_2$), 则

$$K = \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{180^\circ + \theta^\circ}{\omega} / \frac{180^\circ - \theta^\circ}{\omega} \right) = \frac{180^\circ + \theta^\circ}{180^\circ - \theta^\circ} \quad (2-9)$$

式中 ω ——曲柄匀速转动的角速度;

θ ——作往复运动的从动杆在两极限位置时, 曲柄两位置间夹的锐角, 称为机构的极位夹角, 单位为 ($^\circ$)。

根据式 (2-9) 可知: $\theta = 0^\circ$, $K = 1$, 机构无急回。 θ 角愈大, K 值也愈大, 机构急回愈厉害。当对机构急回运动有设计要求时, 应先确定 K 值, K 值确定后可根据下式求出机构的极位夹角 θ 的大小:

$$\theta = \frac{K-1}{K+1} \times 180^\circ$$

计算出 θ 值以后, 具有急回运动机构的设计就变得比较具体和容易了。

例 2-2 已知摆动导杆机构导杆的摆角 $\varphi = 60^\circ$, 机架 $d = 300\text{mm}$, 求作该机构的机构运动简图, 并计算其行程时间比系数 K 之值。

解

1) 在图纸上选择合适的位置作导杆摆角 $\angle C'Dc'' = \varphi$, 得导杆摆动中心铰链位置 D (图 2-39)。

2) 过 D 作 $\angle C'Dc''$ 的角平分线 \overline{Da} , 选择适当的长度比例尺 μ_l , 在角平分线上作 $\overline{DA} = (d/\mu_l)$ mm 得曲柄 AB 的回转中心铰链位置 A , 量取 A 到直线 Dc' (或 Dc'') 的距离得曲柄长度:

$$AB = AB' \mu_l = 150\text{mm}$$

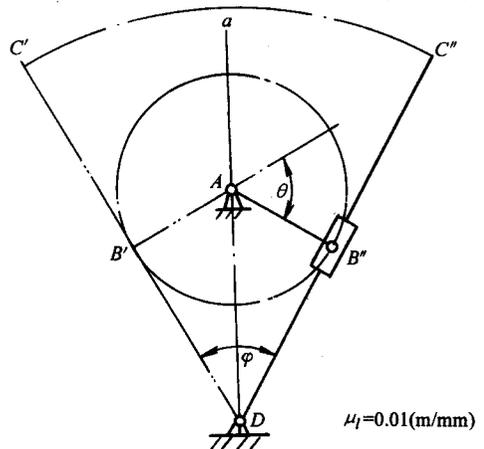


图 2-39 导杆机构的运动特性参数

导杆长应大于 $(300+150)\text{mm}=450\text{mm}$ 。作出机构运动简图如图 2-39 所示。

3) 当导杆摆动至两个极限位置 Dc' 和 Dc'' 时, 曲柄分别位于 AB' 和 AB'' , 曲柄两次运动位置间夹的锐角为极位夹角 θ , 容易证明 $\theta=\varphi=60^\circ$, 故该摆动导杆机构的行程时间比系数 $K=\frac{180^\circ+60^\circ}{180^\circ-60^\circ}=2$ 。

例 2-3 已知偏置式曲柄滑块机构偏距为 e 、曲柄与连杆长度分别为 a 、 b , 求作该机构的极位夹角 θ 和滑块的行程 H 。

解

1) 在图纸上合适的位置确定曲柄转动中心的位置 A 。选择适当的长度比例尺 μ_l 作与 A 距离为 e/μ_l 的导轨直线 $\overline{dd'}$ (图 2-40)。

2) 以 A 为圆心, 分别以 $(b+a)/\mu_l$ 和 $(b-a)/\mu_l$ 为半径画弧与 $\overline{dd'}$ 直线分别交于 c_1 和 c_2 点。所作的机构运动简图中 $\angle c_1Ac_2=\theta$, $H=\overline{c_1c_2} \cdot \mu_l$ 。

如果需要精确计算 θ 与 H 之值, 从图中不难得出:

$$\theta = \arccos\left(\frac{e}{b+a}\right) - \arccos\left(\frac{e}{b-a}\right).$$

$$H = \sqrt{(b+a)^2 - e^2} - \sqrt{(b-a)^2 - e^2}$$

由以上分析可以看出: 曲柄摇杆机构、曲柄滑块机构和摆动导杆机构均能满足有急回的设计要求, 但曲柄摇杆机构和曲柄滑块机构可以设计成 $K=1$ 不具有急回特性的机构型式, 例如图 2-100 所示 $K=1$ 的曲柄摇杆机构如图 2-22 所示对心式曲柄滑块机构。而摆动导杆机构却不能, 其行程时间比 K 总是大于 1, 并且急回特性较显著。

2. 速度瞬心及速度分析的瞬心法

(1) 速度瞬心。如图 2-41 所示作相对平面运动的两构件 1、2, 在任一瞬时都可以看作是绕两平面上某一重合点转动, 该重合点称为两构件的瞬时回转中心, 简称瞬心。用 P_{12} (或 P_{21}) 表示。瞬心有以下特点:

1) 因瞬心是两构件的相对运动回转中心, 故当已知两构件的相对速度方向时, 瞬心必位

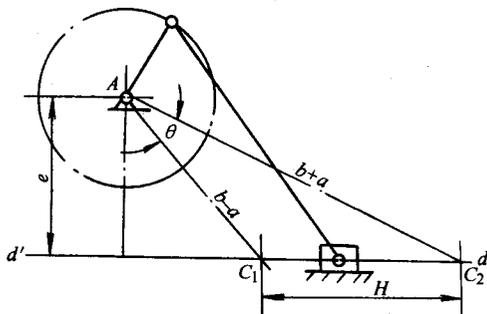


图 2-40 偏置式曲柄滑块机构的运动特性参数

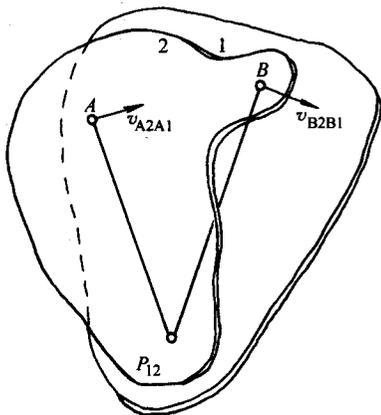


图 2-41 速度瞬心

于两相对运动速度方向垂线的交点上。

2) 两构件在瞬心点相对速度为零, 其绝对速度必然相等。绝对速度相同为零的瞬心称为绝对瞬心, 否则称为相对瞬心。由于两构件在瞬心点绝对速度相等(大小相等、方向相同), 因此, 瞬心也可以称为两相对运动构件的同速点。

(2) 机构瞬心的数量。因为每两个构件就有一个瞬心, 所以 n 杆机构其瞬心的数量 N 为:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

(3) 机构瞬心的求法如下。

1) 当两构件用转动副联接时, 两构件在转动副中心点速度相同, 故转动副中心点就是其瞬心(图 2-42a)。

2) 当两构件用移动副联接时, 因相对速度方向是沿导杆方向的, 故瞬心应在垂直于导杆的无穷远处(图 2-42b)。

3) 当两构件用高副联接时, 如果两高副元素作纯滚动, 滚动接触点就是其瞬心。如果两高副元素作既有滚动、又有滑动的相对运动, 因其相对速度方向在两高副元素接触点的切线上, 故其瞬心应位于两高副元素接触点的公法线上(图 2-43)。

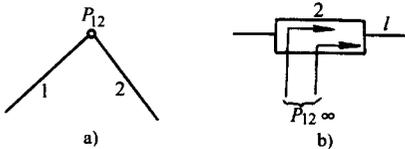


图 2-42 瞬心的求法(平面低副)

a) 转动副 b) 移动副

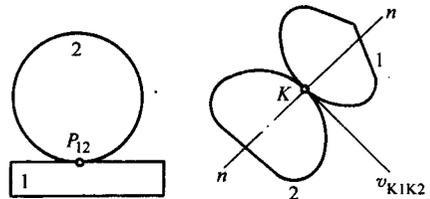


图 2-43 瞬心的求法(平面高副)

4) 机构中不直接接触的两构件的瞬心可用三心定理来求。所谓三心定理, 即彼此作相互平行平面运动的三个构件共有三个瞬心, 三个瞬心应位于同一直线上。证明如下: 如图 2-44 所示为三个彼此作相互平行的平面运动构件 1、2、3, 它们共有三个瞬心 P_{12} 、 P_{13} 和 P_{23} 。为了简化证明过程, 设构件 1 为机架, 2、3 构件用转动副与其相联, 则两转动副中心为瞬心 P_{12} 、 P_{13} 。设 2、3 构件不在 P_{12} 、 P_{13} 直线上的任意重合点为 S , S 点处两构件的绝对速度

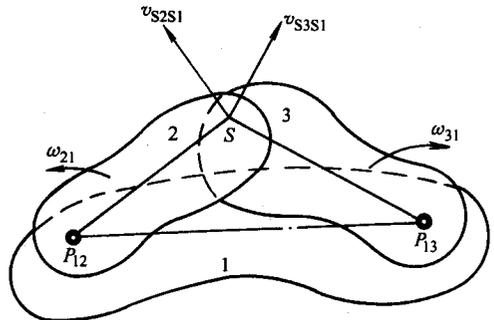


图 2-44 三心定理

方向如图 2-44 所示。因为瞬心 P_{23} 应是 2、3 构件上绝对速度大小相等、方向相同的点，两构件上只有在 $\overline{P_{12}P_{13}}$ 直线上的点其绝对速度方向才有可能相同，不在 $\overline{P_{12}P_{13}}$ 直线上的 S 点的绝对速度大小可能相等，但方向决不可能相同，故瞬心 P_{23} 必位于 $\overline{P_{12}P_{13}}$ 的直线上，即三构件的三个瞬心必位于同一直线上。

当机构的构件数量较多时，可按下面的方法确定应该位于同一直线上的三个瞬心：设三个任意构件编号分别为 i 、 j 、 k ，则 P_{ij} 、 P_{ik} 和 P_{jk} 应在一条直线上。即： i 、 j 、 k 应在 P 的下标中各出现两次。

* (4) 速度瞬心在机构速度分析中的应用

例 2-4 图 2-45 所示铰链四杆机构 $ABCD$ ，设原动件 1 以 ω_1 沿顺时针方向转动，求机构在图示位置时构件 2、3 的角速度 ω_2 、 ω_3 的大小及方向。

解

平面四杆机构 $ABCD$ 四个构件分别用 1、2、3、4 编号如图。根据瞬心的求法知：瞬心 P_{14} 、 P_{12} 、 P_{23} 和 P_{34} 应分别位于铰链 A 、 B 、 C 、 D 的中心。将构件编号数字 1、2、3、4 进行两位数的组合知：尚有 P_{13} 、 P_{24} 未知。根据三心定理和前面所讲确定瞬心的法则，与 P_{24} 共线的瞬心应该是 P_{12} 、 P_{24} 和 P_{23} 、 P_{34} ，故 P_{24} 应在 AB 与 CD 杆的延长线的交点上。同理，与 P_{13} 共线的瞬心应该是 P_{12} 、 P_{23} 和 P_{14} 、 P_{34} ，故瞬心 P_{13} 应在 AD 杆与 BC 延长线的交点上。

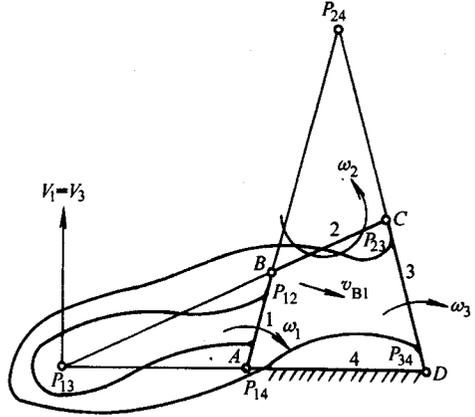


图 2-45 瞬心的应用

根据瞬心的性质： P_{13} 点为 1、3 构件绝对速度相同的同速点，即在 P_{13} 点有 $V_1=V_3$ 即：

$$\omega_1 \overline{P_{13}P_{14}} = \omega_3 \overline{P_{13}P_{34}}$$

所以

$\omega_3 = \omega_1 \frac{\overline{P_{13}P_{14}}}{\overline{P_{13}P_{34}}}$ 。根据构件 1 在 P_{13} 点的速度方向向上知：构件 3 在 P_{13} 点的速度方向向上，故 ω_3 的方向应为顺时针。

P_{24} 点为 2、4 构件的同速点，而构件 4 为机架，速度为零，故构件 2 此瞬时绕 P_{24} 点转动， P_{24} 为绝对速度瞬心，而构件 2 上 B 点的速度与构件 1 上 B 点的速度相等 (B 点为 1、2 构件的同速点)，即 $v_{B2} = v_{B1} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{24}} = \omega_1 \overline{P_{12}P_{14}}$ ，故

$\omega_2 = \omega_1 \frac{\overline{P_{12}P_{14}}}{\overline{P_{12}P_{24}}}$ 。根据 v_{B1} 的方向可以判断 ω_2 的方向为逆时针。

例 2-5 图 2-46 所示曲柄滑块机构 ABC ，原动件 1 以等角速度沿逆时针方向转动，求构件 2 的角速度 ω_2 的大小和方向以及滑块 3 的速度大小和方向。

解

首先在图中注明三个转动副 A 、 B 、 C 形成的速度瞬心 P_{14} 、 P_{12} 和 P_{23} 。3、4 构件构成滑移副， P_{34} 应在垂直于 AC 导杆的无穷远处。根据三心定理： P_{24} 应在 $\overline{P_{23}P_{34}}$ 直线与 $\overline{P_{12}P_{14}}$ 直线的交点处； P_{13} 应在 $\overline{P_{14}P_{34}}$ 直线与 $\overline{P_{23}P_{12}}$ 直线的交点上。分别作图求出 P_{24} 和 P_{13} 。根据瞬心的性质： P_{24} 为

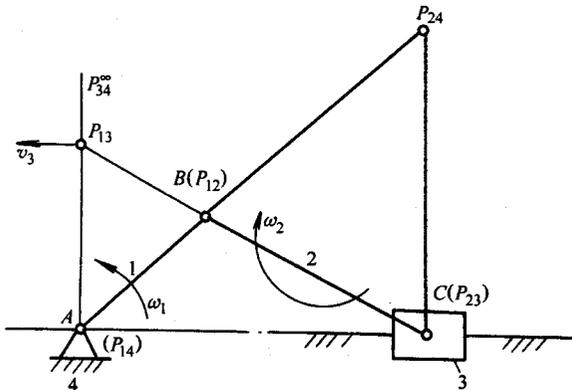


图 2-46 瞬心法在曲柄滑块机构运动分析中的应用

2、4 构件绝对速度相同的同速点，因 4 构件为机架绝对速度为零，构件 2 该瞬时绕 P_{24} 点转动，构件 2 上 B 点的速度 v_B 大小方向已知，故

$$\omega_2 = \frac{v_B}{P_{12}P_{24}} = \omega_1 \frac{\overline{P_{12}P_{14}}}{\overline{P_{12}P_{24}}} \quad \text{方向：顺时针}$$

根据构件 1、3 在 P_{13} 点绝对速度相同知：滑块该瞬时沿水平方向向左移动，其速度大小为：

$$v_3 = \omega_1 \overline{P_{14}P_{13}\mu_l}$$

式中 μ_l ——机构运动简图的作图比例尺。

以上介绍了用瞬心法对平面 II 级机构进行速度分析的例子，瞬心法也能比较容易地对一些复杂机构进行速度分析。

例 2-6 图 2-47 所示按长度比例尺 μ_l 画出的平锻机工件夹紧机构的机构运动简图，该机构是一个复杂的平面 III 级机构。已知原动件 AB 的角速度 ω_1 的大小和方向如图所示，求 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 、 ω_5 的大小及方向。

解

由于构件 2 上 B 点的速度方向及大小已知 ($v_B = \omega_1 \overline{AB}$)，如果能求出 P_{26} ，则 ω_2 和 v_C 可以求出；如果再能求出 P_{36} ，则根据 v_C 可以求出 ω_3 、 v_D 和 v_E ，于是可以解出 ω_4 和 ω_5 。所以解题的关键在于求出绝对瞬心 P_{26} 与 P_{36} 的位置。 P_{36} 和 P_{26} 的位置可按以下方法求出：

标出图中各铰链所示的瞬心 P_{16} 、 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 、 P_{35} 、 P_{46} 和 P_{56} 。根据三心定理， P_{36} 应位于 $\overline{P_{35}P_{56}}$ 直线与 $\overline{P_{46}P_{34}}$ 直线的交点上，在图上作出 P_{36} 。 P_{26} 应位于 $\overline{P_{16}P_{12}}$ 直线与 $\overline{P_{36}P_{23}}$ 直线的交点上，在图上作出 P_{26} 。按前面的分析

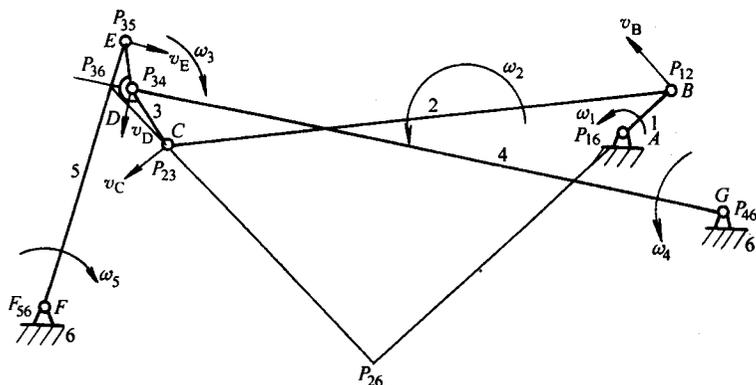


图 2-47 瞬心法在平面Ⅲ级机构运动分析中的应用

$$\omega_2 = \frac{v_B}{P_{12}P_{26}} = \omega_1 \frac{P_{12}P_{16}}{P_{12}P_{26}}, \text{ 方向: 逆时针.}$$

$v_C = \omega_2 P_{26}P_{23}\mu_i$, 方向垂直 $P_{26}P_{23}$ 向左。 μ_i 为该机构运动简图的作图长度比例尺。

故

$$\omega_3 = \frac{v_C}{P_{23}P_{36}} = \omega_2 \frac{P_{23}P_{26}}{P_{23}P_{36}} = \omega_1 \frac{P_{12}P_{16}}{P_{12}P_{26}} \frac{P_{23}P_{26}}{P_{23}P_{36}}, \text{ 方向: 顺时针.}$$

所以:

$$v_D = \omega_3 P_{34}P_{36}\mu_i, \text{ 方向如图.}$$

$$v_E = \omega_3 P_{35}P_{36}\mu_i, \text{ 方向如图.}$$

$$\omega_4 = \frac{v_D}{DG\mu_i} = \omega_3 \frac{P_{34}P_{36}}{P_{34}P_{46}} = \omega_1 \frac{P_{12}P_{16}}{P_{12}P_{26}} \frac{P_{23}P_{26}}{P_{23}P_{36}} \frac{P_{34}P_{36}}{P_{34}P_{46}}, \text{ 方向: 逆时针.}$$

$$\omega_5 = \frac{v_E}{EF\mu_i} = \omega_3 \frac{P_{35}P_{36}}{P_{35}P_{56}} = \omega_1 \frac{P_{12}P_{16}}{P_{12}P_{26}} \frac{P_{23}P_{26}}{P_{23}P_{36}} \frac{P_{35}P_{36}}{P_{35}P_{56}}, \text{ 方向: 顺时针.}$$

应用瞬心法对平面高副机构进行速度分析也十分简便。

例 2-7 图 2-48 所示按长度比例尺 μ_i 作出的平面凸轮高副机构。已知凸轮以角速度 ω_1 沿逆时针方向转动，求从动杆在图示瞬时的运动速度。

解

对于图 2-48 所示的凸轮机构，在图上标出转动副 A 所示的瞬心 P_{13} ，因 P_{23} 在垂直于从动杆的无穷远处，过 P_{13} 作从动杆的垂线 \overline{Ax} ，根据三心定理 P_{12} 应位于 \overline{Ax} 直线上，又根据构件 1、2 的相对速度方向切于凸轮轮廓， P_{12} 应在过两高副元素接触点的公法线上。过两高副元素接触点 C 作两高副元素的公法线与 \overline{Ax} 直线的相交得 P_{12} 点。构件 2 与构件 1 在 P_{12} 点速度相同，故

$$v_2 = v_1 = \omega_1 P_{13}P_{12}\mu_i, \text{ 方向: 向上.}$$

对于滚子从动杆凸轮机构可将滚子与从动杆固结，再根据三心定理求出瞬心 P_{12} 。

3. 平面连杆机构运动分析的相对运动图解法 相对运动图解法是根据“点的绝对运动是牵连运动与相对运动的合成”的基本原理，在运动分析时列出机构中运动参数待求点与运动参数已知点间的运动分析矢量方程式；选择适当的作图比例尺根据所列的矢量方程式作矢量多边形；借助矢量多边形封闭，从封闭矢量多边形中求出待求运动参数的大小或方向的一种图解方法。

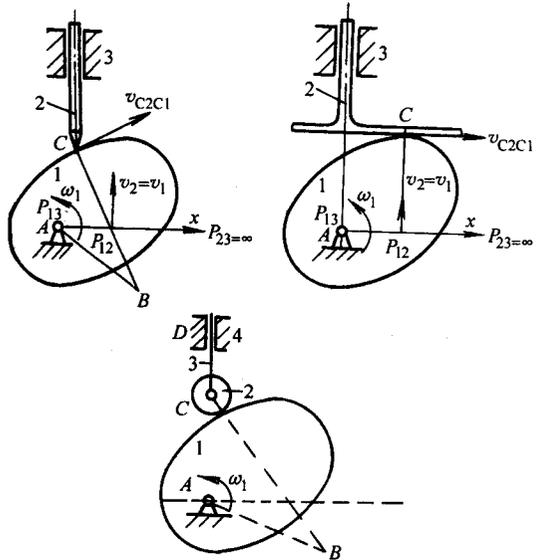


图 2-48 瞬心法在高副机构运动分析中的应用

下面通过几个具体的例子来说明这种方法的应用过程。

例 2-8 已知铰链四杆机构如图 2-49a 所示，曲柄 AB 以 ω_1 向顺时针方向匀速转动。求：机构中 E 点的速度 v_E 和加速度 a_E 以及 2、3 构件的角速度 ω_2 、 ω_3 和角加速度 α_2 、 α_3 。

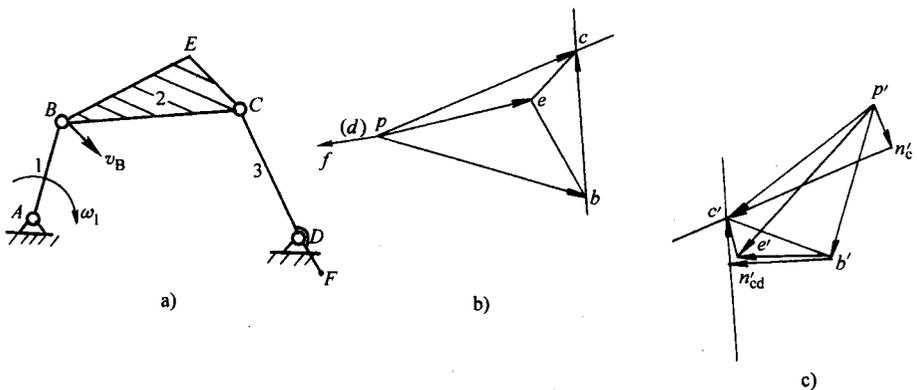


图 2-49 铰链四杆机构运动分析

a) 机构运动简图 b) 速度多边形图 c) 加速度多边形图

解

1. 速度分析

(1) 构件 1、2 在铰链 B 中心点速度相等， $v_B = \omega_1 l_{AB}$ ， v_B 的方向垂直于 \overline{AB} 如图 2-49a 中所示。

(2) 根据运动合成原理, 作一般平面运动的连杆 2 上的各点的运动, 可视为随已知基点 B 平移的牵连运动及绕 B 点的相对转动的合成, 从而可写出构件 2 上 E 点与 B 点间运动分析矢量方程:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{EB}$$

大小	?	$\omega_1 \overline{AB}$?
方向	?	$\perp \overline{AB}$	$\perp \overline{EB}$

式中 \mathbf{v}_{EB} —— E 相对于 B 的相对转动速度, 其大小为 $\omega_2 \overline{EB}$, ω_2 为构件 2 的角速度, 为待求运动参数。

由于一个向量方程只能求解两个未知量 (大小或者方向), 但上式中有三个未知量, 因此不能求解。而构件 2 上铰链 C 的速度方向已知 (垂直于 \overline{CD}), 故应先建立 C 点与 B 点的运动分析矢量方程, 待求出构件 2 的角速度 ω_2 或 C 点的速度后, 再求 E 点速度。同理可写出:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

大小	?	$\omega_1 \overline{AB}$?
方向	$\perp \overline{CD}$	$\perp \overline{AB}$	$\perp \overline{CB}$

式中 \mathbf{v}_{CB} —— C 相对于 B 转动的相对运动速度, $\mathbf{v}_{CB} = \omega_2 \overline{CB}$, $\mathbf{v}_C = \omega_3 \overline{CD}$;
 ω_3 ——构件 3 的角速度, 为待求运动参数。

(3) 为了便于根据机构运动简图画各构件位置的垂线或平行线, 在机构运动简图旁的图纸上选择合适的位置点 p 为作矢量多边形的起始点 (p 点称为速度极点)。选择合适的速度比例尺 $\mu_v = a \text{ (m/s) / mm}$ (即用图纸上 1mm 线段表示 $a \text{ m/s}$ 的速度, a 值的大小应根据所作图形大小比例适度, 便于量度和计算来选取), 将上式中各速度用速度比例尺换算成一定长度带箭头的向量, 按先作大小、方向已知的矢量; 后作方向已知而大小未知的矢量的作图顺序, 从极点出发作矢量方程等式一端的矢量, 然后再从极点出发作矢量方程等式另一端的矢量, 最后利用矢量多边形封闭, 求出未知矢量的大小和方向。在所作的速度矢量多边形 (简称速度多边形) 中, 为了说明矢量所代表的速度, 在矢量矢端用和速度下标相同的英文小写字母表示该速度。

根据上述作图方法和原则, 从 p 点开始先作方程等式右端的矢量 ($\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$)。过 p 点在 \overline{AB} 垂直的方向上画出 $\overrightarrow{pb} = \mathbf{v}_B / \mu_v$, 矢端为 b 。因 \mathbf{v}_{CB} 只知与 \overline{BC} 垂直, 矢量所指的方向未知, 过 b 点作 \overline{BC} 垂线 (图 2-49b)。

从 p 点开始作方程左端矢量 \mathbf{v}_C , 过 p 点作 \overline{CD} 的垂线与过 b 点作的 \overline{BC} 垂线相交于 c , 得 $\mathbf{v}_C = \overline{pc} \mu_v$, C 点速度方向由矢量 \overrightarrow{pc} 所示, 即由 p 指向 c 。因此, $\omega_3 = \frac{\overline{pc} \mu_v}{\overline{CD}}$,

方向为顺时针方向。

根据矢量方程知： \overline{bc} 表示 C 相对于 B 的相对转动速度 $v_{CB} = \omega_2 \overline{BC} = \overline{bc} \cdot \mu_v$ ，故 $\omega_2 = \frac{\overline{bc} \mu_v}{\overline{BC}}$ ，图为速度多边形图中 $b \rightarrow c$ 的方向为机构运动简图中 C 相对于 B 转动的速度方向，故 ω_2 方向为顺时针方向。

(4) 求 v_E 。写出构件 2 上 E 点与 B 点或 E 点与 C 点的速度分析矢量方程：

$$v_E = v_B + v_{EB} = v_C + v_{EC}$$

大小	?	图中已	$\omega_2 \overline{EB}$	图中已	$\omega_2 \overline{EC}$
方向	?	作出	$\perp EB$	作出	$\perp EC$

(5) 根据上式中的任意一个等式即可用作图的方法求出 v_E 。求 v_E 更简单的方法是：在已作好的速度多边形图 2-49b 的基础上，过 b 作 \overline{EB} 的垂线与过 c 作 \overline{CE} 的垂线相交即得 e 点， $v_E = \overline{pe} \mu_v$ ， v_E 的方向为 \overrightarrow{pe} 所示方向。

对比观察图 2-49b 和图 2-49a 可以发现一个重要规律：因为 $\overline{be} \perp \overline{EB}$ ； $\overline{ce} \perp \overline{EC}$ ； $\overline{bc} \perp \overline{CB}$ ，故 $\triangle bce \sim \triangle BCE$ ， $\triangle bce$ 的位置是 $\triangle BCE$ 沿 ω_2 转 90° 的位置，两三角形顶角字母排列顺序完全一致，即： $b \rightarrow c \rightarrow e$ 沿三角周边按逆时针顺序排列， $B \rightarrow C \rightarrow E$ 也按相同的顺序排列。我们把图形 $\triangle bce$ 称为构件 $\triangle BCE$ 的速度影像。

影像方法为我们进行运动分析提供了一个简便的方法，即：当已知一个构件上两点的速度需求该构件上第三点的速度时，可以不必再根据运动向量方程作图来求解，而可以直接利用影像与该构件上对应位置构成的图形相似的方法来求解，从而可以大大地节约作图求解的时间。此外，速度多边形中速度极点 p 是机构中所有速度为零点的影像（即： p 点是 A 、 D 点的影像），因此，如果要求图 2-49a 中构件 3 上 F 点的速度时，也可能直接利用影像的方法来求解。因构件 3 上 C 的速度在图 2-49b 中已作出， D 点的速度影像为 p 点，根据 \overline{CDF} 在一条直线上，在图 2-49b 中 \overline{cp} 的延长线上作 f 点，使 \overline{cpf} 也在一条直线上，且 $\overline{CD} : \overline{DF} = \overline{cp} : \overline{pf}$ ，则可求出 v_F ， $v_F = \overline{pf} \mu_v$ 。利用影像方法进行运动分析应当注意的是：影像方法只适用于已知一个构件上两点的速度来求该构件上其他任意点的速度，而不能套用于机构的运动分析中，即：不能根据已知机构两点的速度去影像该机构上任意一点的速度。

2. 加速度分析

当速度分析完成后，弄清构件上各点的相对速度和各构件的角速度的大小及方向后，便可对机构进行加速度分析。加速度分析与速度分析所采用的方法是完全一样的，不过由于加速度有切向加速度 a^t 和法向加速度 a^n 之分，从而使加速度分析矢量方程中矢量的数量增加了，矢量封闭多边形的形状更复杂了。加速度大小计算的失误或矢量方向判断的错误都容易造成整个分析计算结果的错

误，因此，应当特别注意加速度大小的计算和加速度方向的判断。

(1) 构件 2 上 B 的加速度等于构件 1 上 B 点的加速度。而构件 1 上 B 点是绕固定点 A 转动的，且 ω_1 为常数，故其切向加速度 $a^t=0$ ，而 B 点的法向加速度即为向心加速度，则 $a_B = a_B^n = \omega_1^2 L_{AB}$ 。其方向从机构运动简图上看是由 B 指向 A 的。

(2) 和速度分析一样，先列出构件 2 上待求点 C 与已知点 B 间的加速度分析矢量方程，注意每一点的加速度均等于切向和法向加速度矢量之和，故

$$a_C^n + a_C^t = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t$$

大小	$\omega_2^2 \overline{CD}$?	$\omega_1^2 \overline{AB}$	$\omega_2^2 \overline{CB}$?
方向	$C \rightarrow D$	$\perp \overline{CD}$	$A \rightarrow B$	$C \rightarrow B$	$\perp \overline{CB}$

上式中所有的法向加速度的方向从机构运动简图中看都是指向其相对回转中心的，例如 a_{CB}^n 为： C 相对于 B 转动的法向加速度，其回转中心为 B ，故其方向为 $C \rightarrow B$ 。 a_C^t 的方向是 $C \rightarrow D$ 。所有切向加速度方都是与相应的法向加速度方向垂直的。

(3) 在图 2-49a 和图 2-49b 的附近位置的图纸上，选择作加速多边形的起始点 p' (p' 点称为加速度极点，它是机构中所有加速度为零点的影像)，为了区别速度多边形，加速度多边形中矢端字母均用带“'”的小写英文字母表示。

选择加速度作图比例尺 $\mu_a = b \text{ (m/s}^2\text{) / mm}$ ；将已知加速度用加速度比例尺换算成带箭头的线段， b 值的大小应根据所作图形大小、比例适度和便于量度和计算来选取。从 p' 出发，先作矢量方程等式一端的那些大小、方向已知的矢量，后作含有未知量的矢量，等式一端的矢量全部作完后，再从 p' 出发作等式另一端的矢量；最后由矢量多边形封闭求那些大小或方向未知的矢量。

按上述作图的方法和原则算出 a_B^n 的大小，用加速度作图比例尺算出其线段长 $\overline{p'b'}$ ，按机构运动简图中 $B \rightarrow A$ 的方向，过 p' 点作矢量 $\overline{p'b'}$ 表示 a_B^n ，过矢端 b' 点按机构运动简图上 $C \rightarrow B$ 的方向作 $\overline{b'n'_{cb}}$ 表示 a_{CB}^n 。因 a_{CB}^t 垂直于 \overline{CB} 但具体指向未知，过矢端 n'_{cb} 点作 \overline{CB} 的垂线。

从 p' 出发按机构运动简图中 $C \rightarrow D$ 的方向作 $\overline{p'n'_c}$ 表示 a_C^t ，过矢端 n'_c 点作 $\overline{p'n'_c}$ 的垂线与过 n'_{cb} 点作的 \overline{CB} 的垂线相交得 c' 点。则 $a_C = \overline{p'c'} \mu_a$ ， a_C 的方向为 p' 指向 c' 。 $a_C^t = \overline{n'_c c'} \mu_a$ ，故构件 3 的角加速度 $\alpha_3 = \frac{\overline{n'_c c'} \mu_a}{\overline{CD}}$ ，根据 a_C^t 的方向为 n'_c 指向

c' (向左) 知： α_3 的方向为逆时针。 $a_{CB}^t = \overline{n'_{cb} c'} \mu_a$ ，故构件 2 的角加速度 $\alpha_2 = \frac{\overline{n'_{cb} c'} \mu_a}{\overline{CB}}$ ，注意到 C 相对于 B 的切向加速度方向由 n'_{cb} 指向 c' (向上)，故角加速度 α_2 的方向逆时针 (图 2-49c)。

(4) 求解 \mathbf{a}_E 。根据相对运动原理可以列出下面的加速度分析矢量方程：

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{EB}^n + \mathbf{a}_{EB}^t = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{EC}^n + \mathbf{a}_{EC}^t$$

大小	?	图中已	$\omega_2^2 \overline{EB}$	$\alpha_2 \overline{EB}$	图中已	$\omega_2^2 \overline{EC}$	$\alpha_2 \overline{EC}$
方向	?	作出	$E \rightarrow B$	$\perp EB$	作出	$E \rightarrow C$	$\perp EC$

(5) 由于矢量方程中各矢量的大小、方向均已知，在已作出的加速度多边形的基础上，根据矢量方程的任意一个等式依次作出各矢量不难求出 e' 点，则 $\overrightarrow{p'e'} \mu_a = \mathbf{a}_E$ (图 2-49c)。在图 2-49c 中， $\overrightarrow{b'c'} \mu_a = \mathbf{a}_{CB} = \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t$ ，其中： \mathbf{a}_{CB}^n 的方向与机构运动简图中 \overline{CB} 平行， \mathbf{a}_{CB}^t 的方向与 \overline{CB} 垂直，故 $\overrightarrow{b'c'}$ 与 \overline{CB} 杆夹角为 $\varphi = \arctg\left(\frac{a_{CB}^t}{a_{CB}^n}\right) = \arctg\left(\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}\right)$ 。同理， $\overrightarrow{b'e'} \mu_a = \mathbf{a}_{EB} = \mathbf{a}_{EB}^n + \mathbf{a}_{EB}^t$ ，故 $\overrightarrow{b'e'}$ 与 \overline{EB} 的夹角为： $\arctg\left(\frac{a_{EB}^t}{a_{EB}^n}\right) = \arctg\left(\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}\right) = \varphi$ ， $\overrightarrow{c'e'}$ 与 \overline{EC} 的夹角为 $\arctg\left(\frac{a_{EC}^t}{a_{EC}^n}\right) = \arctg\left(\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}\right) = \varphi$ 。因此加速度多边形中的 $\triangle b'c'e'$ 与构件 $\triangle BCE$ 图形相似， $\triangle b'c'e'$ 位置是 $\triangle BCE$ 位置转过 φ 角的位置，两个三角形顶点的字母转绕三角形按相同顺序方向排列。加速度多边形中 $\triangle b'c'e'$ 称为构件 $\triangle BCE$ 的加速度影像。当已知一个构件上的两点的加速度时，可以利用加速度影像来求该构件上其他任意点的加速度。求解的方法和用速度影像进行速度分析采用的方法完全相同。

例 2-9 图 2-50a 所示导杆机构中，已知 $AB=BC$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， $DE \perp AC$ ，曲柄 AB 以 ω_1 沿顺时针方向匀速转动，用相对运动图解法求：构件 3 的角速度 ω_3 和角加速度 α_3 。

解

1. 速度分析

(1) 构件 2 上 B 的速度已知，大小为 $\omega_1 l_{AB}$ ，方向 $\perp AB$ (\searrow)。

(2) 写出滑块 2、3 导杆在重合点 B 的运动分析矢量方程。根据运动合成原理，构件 2 的运动，可视为随构件 3 运动的牵连转动及构件 2 相对于构件 3 相对移动的合成。故 2、3 构件上重合点 B_2 、 B_3 的速度方程为： $\mathbf{v}_{2B} = \mathbf{v}_{3B} + \mathbf{v}_{2B3B}$ 。由于 \mathbf{v}_{2B} 已知，待求为 \mathbf{v}_{3B} ，则通过移项可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{3B} &= \mathbf{v}_{2B} - \mathbf{v}_{2B3B} \\ &= \mathbf{v}_{2B} + \mathbf{v}_{3B2B} \end{aligned}$$

大小	?	$\omega_1 \overline{AB}$?
方向	$\perp BC$	$\perp AB$ (\searrow)	$\parallel DE$

将上式与例 2-7 中的速度分析矢量方程进行比较，可以看出其中差异：例 2-7 中的相对运动是同一刚体上位置不相同的两点作相对转动，两点间的相对位置

不变，其相对运动速度方向垂直于两点的连线。而在本例题中，其相对运动关系是构成移动副的两个刚体在同一点作相对移动，其相对运动的方向为移动副的导杆方向。

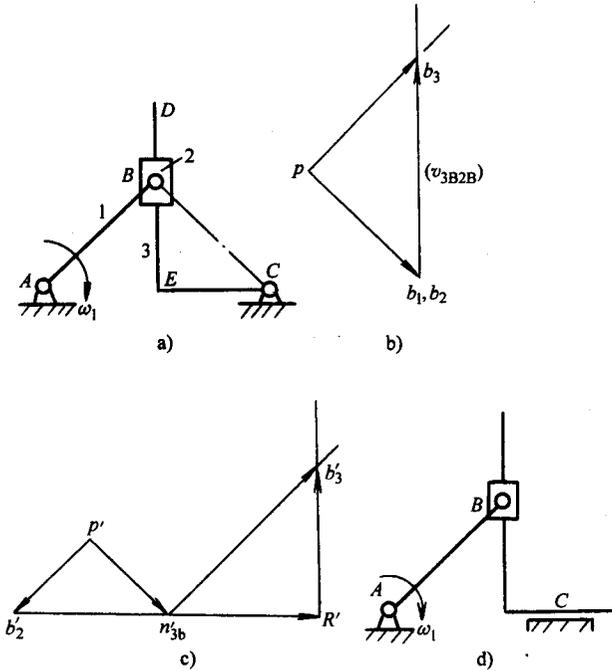


图 2-50 导杆机构运动分析

a) 机构运动简图 b) 速度多边形图 c) 加速度多边形图 d) 无哥氏加速度的正弦机构

(3) 选择合适的速度比例尺 μ_v ，在机构运动简图附近作速度多边形如图 2-50b 所示。由图知： $\overline{pb_3} = \overline{pb_2}$ ，故 $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1$ ， ω_3 与 ω_2 方向相同为沿顺时针转动（滑块与导杆用移动副相联，其角速度相同）。

2. 加速度分析

(1) 因构件 1 作匀速转动，B 点只有法向加速度，故构件 2 上 B 的加速度大小为： $\omega_1^2 l_{AB}$ ，方向是由机构运动简图上的 B 指向 A。

(2) 写出 2、3 构件间加速度分析的矢量方程：

$$\mathbf{a}_{3B}^n + \mathbf{a}_{3B}^r = \mathbf{a}_{2B} + \mathbf{a}_{3B2B}^n + \mathbf{a}_{3B2B}^r + \mathbf{a}_{3B2B}^k$$

大小	$\omega_3^2 \overline{BC}$?	$\omega_1^2 \overline{AB}$	0	?	$2\omega_2 v_{3B2B}$
方向	B→C	$\perp BC$	B→A	0	// DE	$\omega_2 \times v_{3B2B}$

上式中，由于构件 2 是沿直导杆 3 作相对移动，相对加速度中法向加速度 \mathbf{a}_{3B2B}^n 为零（如果是弧形导轨则不为零）而只有沿导杆方向的切向加速 \mathbf{a}_{3B2B}^r ，为了

便于记忆,对于直导轨的情形,今后将 a_{3B2B}^r 均用 a_{3B2B}^r 表示。由于构件3由构件2牵连以 $\omega_2 = \omega_3$ 的角速度转动,构件2、3间又有相对移动,根据哥氏加速度产生的条件知:构件2、3间将产生附加的哥氏加速度 a_{3B2B}^k ,其大小和方向可以用牵连角速度向量 ω_2 和两构件间的相对速度矢量 \mathbf{v}_{3B2B} 的差积表示为: $a_{3B2B}^k = 2\omega_2 \times \mathbf{v}_{3B2B}$,在作图时也可以将速度多边形图中的矢量 $\overrightarrow{p_2 p_3}$ ($\overrightarrow{p_2 p_3}$ 的方向即 \mathbf{v}_{3B2B} 的方向)沿 ω_2 转过 90° 来确定 a_{3B2B}^k 的方向。

在分析哥氏加速度时应注意,第一,两构件必须构成移动副(具有相对移动的条件);第二,移动副中的导杆必须转动(具有牵连运动为转动的条件),只有当上述两个条件均满足时,两构件间才会产生哥氏加速度。像图2-50d所示的正弦机构,虽然构件2、3构成移动副,但导杆3作平移而不转动,故构件2、3间不会产生哥氏加速度。

(3) 选择合适的加速度比例尺 μ_a ,在机构运动简图旁的图纸上按矢量方程作加速度多边形如图2-50c所示。从图中量出 $\overline{n'_{3b} b'_3}$ 的大小,则构件3上B点的切向加速度 $a_{3B}^r = \overline{n'_{3b} b'_3} \mu_a$,构件3的角加速度 $\alpha_3 = \frac{\overline{n'_{3b} b'_3} \mu_a}{BC}$,根据 a_{3B}^r 的方向由 n'_{3b} 指向 b'_3 知: α_3 的方向为顺时针方向。

例 2-10 已知机构运动简图如图2-51a所示,图中已知 $AB=100\text{mm}$, $BC=400\text{mm}$, $CD=DE=200\text{mm}$, $EF=400\text{mm}$,A、B、C共线, $CD \perp BC$, $DF \parallel BC$,AB以匀角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ 沿顺时针方向转动,求 ω_5 、 α_5 的大小和方向。

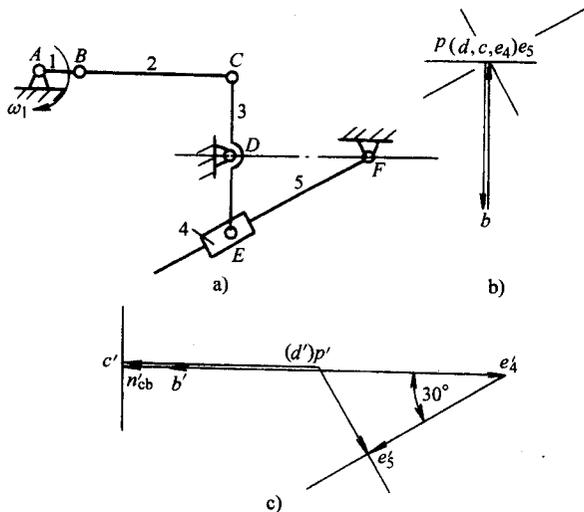


图 2-51 六杆机构运动分析

a) 机构运动简图 b) 速度多边形图 c) 加速度多边形图

解

1. 速度分析

(1) $v_B = \omega_1 \overline{AB} = 1000 \text{ mm/s}$, 方向垂直于 AB 向下。(2) $v_C = v_B + v_{CB}$

大小	?	1m/s	?
方向	$\perp CD$	$\perp AB$	$\perp CB$

(3) 选 $\mu_v = 0.05 \text{ (m/s) / mm}$ 作速度多边形图如图 2-51b 所示。根据矢量封闭原则知: $v_C = 0$, 故 $\omega_3 = 0$, $v_{CB} = -v_B$, $v_{CB} = \overrightarrow{bp} \mu_v = 1000 \text{ mm/s}$, 方向由 $b \rightarrow p$, 故 $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{CB} = 2.5 \text{ s}^{-1}$, 方向为逆时针方向。

(4) 用影像法求 v_E 。因 C 、 D 的影像均在 p 点, 故构件 3、4E 点的影像也在 p 点, 即 $v_E = 0$ 。

(5) 建立构件 4、5 间的运动分析矢量方程:

$$v_{5E} = v_{4E} + v_{5E4E}$$

大小	?	图中已	?
方向	$\perp EF$	作出	$\parallel EF$

(6) 在图 2-51b 的基础上, 过 e_4 点 (即 p 点) 作 EF 的平行线, 与过 p 点作 EF 的垂线交于 p 点, 故: $v_{5E} = 0$, $\omega_5 = 0$ 。

2. 加速度分析

(1) 因 ω_1 为匀速, $a_1 = 0$, $a_B = a_{1B}^n = \omega_1^2 \overline{AB} = 10000 \text{ mm/s}^2$, 方向 $B \rightarrow A$ 。(2) $a_{CB}^n = \omega_2^2 \overline{CB} = 2500 \text{ mm/s}^2$, 方向 $C \rightarrow B$ 。因 $\omega_3 = 0$, $a_C^n = 0$ 。

$$a_C^n + a_C^t = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t$$

大小	0	?	10m/s ²	2.5m/s ²	?
方向		$\perp CD$	$B \rightarrow A$	$C \rightarrow B$	$\perp CB$

(3) 选加速度比例尺 $\mu_a = 0.5 \text{ (m/s}^2\text{) / mm}$, 作加速度多边形如图 2-51c 所示, 得 c' 点, 故 $a_C = \overrightarrow{p'c'} \mu_a = 12500 \text{ mm/s}^2$, 方向: 水平向左。

(4) 用影像法求 a_E 。根据 C 、 D 、 E 在一直线上, 且 $\overline{CD} = \overline{DE}$ 。在加速度多边形图中, 作 c' 、 d' 、 e' 在一直线上, 且 $\overline{c'd'} = \overline{d'e'}$ 得 e' 点 (即 3、4 构件上的 e_3' 和 e_4' 点), $a_E = \overrightarrow{p'e'} \mu_a = 12500 \text{ mm/s}^2$, 方向: 水平向右。

(5) 建立构件 4、5 间的加速度分析矢量方程:

$$\mathbf{a}_{E_5}^n + \mathbf{a}_{E_5}^t = \mathbf{a}_{E_4} + \mathbf{a}_{E_5 E_4}^r + \mathbf{a}_{E_5 E_4}^t$$

大小	0	?	图中已	?	0
方向		$\perp EF$	作出	$\parallel EF$	

式中：因 $\omega_5 = 0$, $a_{E_5}^n = 0$, $a_{E_5 E_4}^t = 2\omega_5 v_{E_5 E_4} = 0$

(6) 按矢量方程作矢量图得 e'_5 点。因为 $\angle e'_5 e'_4 p' = 30^\circ$, $\overline{e'_5 p'} = \frac{1}{2} \overline{e'_4 p'}$, $a_{E_5} = a_{E_5}^t = \overline{p' e'_5} \mu_a = \frac{1}{2} p' e'_4 \mu_a = 6250 \text{ mm/s}^2$, 方向垂直于 \overline{EF} 向下 (图 2-51c)。构件 5 的角加速度 $\alpha_5 = \frac{a_{E_5}^t}{EF} = 15.625 \text{ s}^{-2}$, 方向为逆时针方向。

4. 平面连杆机构运动分析的解析法 用图解法对平面机构进行运动分析, 虽然比较简洁直观, 但分析精度较低, 对机构进行速度分析尚比较简单, 但进行加速度分析就比较麻烦。此外, 当对机构不同运动位置进行分析, 或需作出机构的运动线图时, 需大量地重复作图, 费工费时, 而且不便于把机构分析与综合问题联系起来。因此, 随着对机构设计要求的不断提高, 随着电子计算技术的不断发展, 解析法得到愈来愈广泛的应用, 成为机构运动分析的主要方法。

用解析法对机构进行运动分析, 首先需要建立被分析机构各构件位置关系的数学表达式 (称为机构位置方程), 位置方程一旦求出, 只需将位置方程中的变量对时间 (或对原动件的角位置变量) 求导, 即可得到机构速度方程, 再将速度分析方程中的变量对时间求导即得机构加速度方程, 解上述这些方程便可得到所需的分析结果。因此, 如何建立机构的位置方程是机构运动分析的关键, 也是本节将讨论的重点。

建立机构位置方程的方法很多, 方程的形式与采用的数学工具 (如代数、三角、向量、复数以及矩阵等等) 及所选择的分析对象有关, 主要的方法有: 矢量投影法、复数矢量法等。上述方法的主要特点是: 将机构中的各杆作为长度不变的矢量来建立机构的封闭矢量多边形, 通过矢量方程来表达各构件之间的位置关系式。例如对图 2-52a 所示曲柄滑块机构的滑块进行运动分析时, 可将曲柄滑块机构各杆的位置关系用图 2-52b 所示的封闭矢量多边形表示为:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{X}_c$$

用复数表示矢量, 或将矢量分别向直角坐标系的 $O-xy$ 的 x 、 y 轴投影可

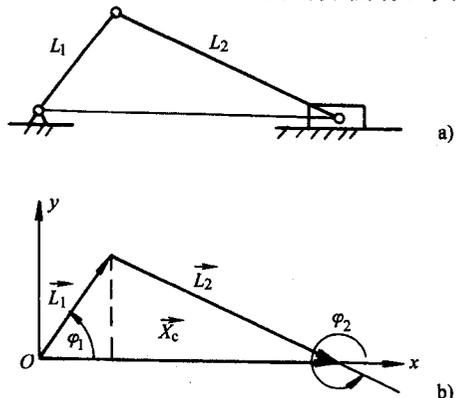


图 2-52 曲柄滑块机构运动分析

得

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ x_c &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

为了求出用角变量 φ_1 表示 x_c 比较简洁的解析解。设 $\frac{l_1}{l_2} = \lambda$ ，由上式中的第一式得

$$\sin \varphi_2 = -\lambda \sin \varphi_1 \quad \text{或} \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1}$$

用幂级数将 $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1}$ 展开取前两项表示 $\cos \varphi_2$ (已能精确到小数点后三位)，得：

$$\cos \varphi_2 = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi_1$$

所以

$$\left. \begin{aligned} x_c &\approx l_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi_1 \right) \\ v_c &\approx -l_1 \omega_1 \left(\sin \varphi_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_1 \right) \\ a_c &\approx -l_1 \omega_1^2 (\cos \varphi_1 + \lambda \cos 2\varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

式中 ω_1 ——曲柄的角速度。

从上面分析过程可知：这种方法几何意义清楚，方程易于建立，但常需解超越方程，当机构比较复杂时，求解不太容易。另一方面，上述方法需根据机构的具体结构来建立机构运动分析的数学模型，通用性不强。本节将介绍更加通用的、按基本杆组建立运动分析模型的基本杆组法。

下面以平面运动刚体和机构中最常见的三种 II 级基本杆组为例，分别讨论其运动分析方程的建立过程。建立运动分析方程主要采用的方法是矢量投影，即用矢量表示刚体，用封闭矢量表示杆组，通过向坐标系投影得到其运动分析方程表达式。

(1) 平面运动刚体的运动分析方程。在图 2-53 所示平面直角坐标系 $O-xy$ 中，设刚体 $P_1P_2P_3$ 上 $\overline{P_1P_2}$ 与 x 轴夹角为 θ ， $\overline{P_1P_2}$ 与 $\overline{P_1P_3}$ 夹角为 φ ； θ 、 φ 角以 x 轴沿逆时针方向计算为正。 $\overline{P_1P_2} = r$ ， $\overline{P_1P_3} = s$ ， P_1 点的运动参数已知：位置为 (x_1, y_1) ，速度为 (\dot{x}_1, \dot{y}_1) ，加速度为 (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1) ，刚体运动

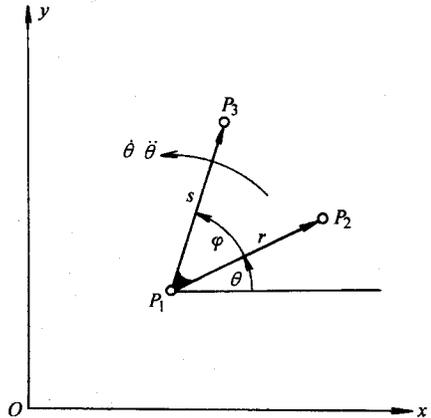


图 2-53 平面运动刚体运动分析

的角速度和角加速度分别为 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ ， $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ 以逆时针方向为正。求刚体上 P_2 及 P_3 点的位置、速度和加速度。刚体上 P_2 、 P_3 点的位置坐标为：

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + r \cos \theta \\ y_2 &= y_1 + r \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 + s \cos (\varphi + \theta) \\ y_3 &= y_1 + s \sin (\varphi + \theta) \end{aligned} \right\}$$

将上两式对时间微分得 P_2 、 P_3 点的速度和加速度分析方程：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 - \dot{\theta} r \sin \theta \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \dot{\theta} r \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 - \ddot{\theta} r \sin \theta - \dot{\theta}^2 r \cos \theta \\ \ddot{y}_2 &= \ddot{y}_1 + \ddot{\theta} r \cos \theta - \dot{\theta}^2 r \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{x}_1 - \dot{\theta} s \sin (\varphi + \theta) \\ \dot{y}_3 &= \dot{y}_1 + \dot{\theta} s \cos (\varphi + \theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_3 &= \ddot{x}_1 - \ddot{\theta} s \sin (\varphi + \theta) - \dot{\theta}^2 s \cos (\varphi + \theta) \\ \ddot{y}_3 &= \ddot{y}_1 + \ddot{\theta} s \cos (\varphi + \theta) - \dot{\theta}^2 s \sin (\varphi + \theta) \end{aligned} \right\}$$

对于原动曲柄，其角速度 $\dot{\theta}$ 和角加速度 $\ddot{\theta}$ 已知。如果将曲柄上 P_1 点的坐标设在坐标原点，则 $x_1=0$ ， $y_1=0$ ， $\dot{x}_1=0$ ， $\dot{y}_1=0$ ， $\ddot{x}_1=0$ ， $\ddot{y}_1=0$ 。将这些参数和曲柄的几何参数 r 、 s 和 φ 一并代入上式，可求出曲柄上任意两点 P_2 、 P_3 的运动参数。

(2) 第一类 II 级基本杆组运动分析方程。第一类 II 级基本杆组由两个构件和三个转动副构成，如图 2-54a 所示。已知两构件杆长分别为 r_1 和 r_2 ，在直角坐标系 $O-xy$ 中，两外接运动副 P_1 、 P_2 的运动参数为 (x_1, y_1) ， (\dot{x}_1, \dot{y}_1) ， (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1) 和 (x_2, y_2) ， (\dot{x}_2, \dot{y}_2) ， (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) 。求内接转动副 P_3 点位置、速度、加速度及两构件的角速度、角加速度。将杆组用封闭矢量三角形表示如图 2-54a 所示，从图中容易求出：

P_1 到 P_2 点的距离 d 为：

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

设 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 x 轴的夹角为 φ ，

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

设 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 间的夹角为 α ,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2r_1d}\right)$$

因为同一长度的 r_1 、 r_2 有两种可能的装配模式, 如图 2-54b 中实线和虚线所示, 故 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 与 x 轴的夹角 θ_1 为

$$\theta_1 = \alpha \pm \varphi$$

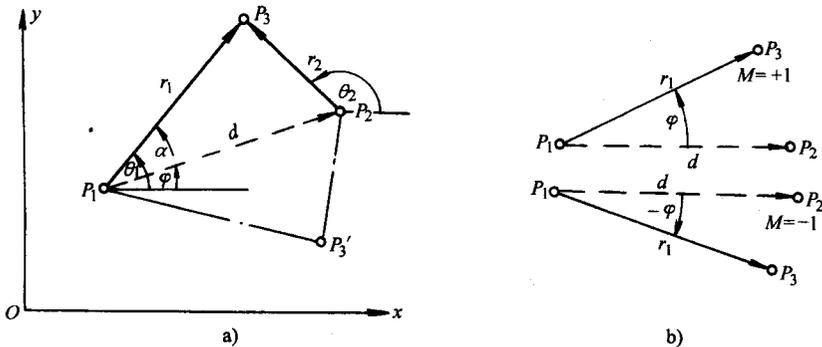


图 2-54 第一类 I 级基本杆组运动分析

在计算机程序中, 由于装配模式是计算机无法自动识别的, 故上式中的正、负号必须人为确定, 在计算机语言中, 用给定装配模式系数 M 的方法确定。确定的方法是: 当 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 矢量沿逆时针方向转动与 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 矢量重合时, 装配模式系数取 “+1”, 否则取 “-1”。 θ_1 求出后由图 2-54a 可得:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 + r_1 \cos \theta_1 \\ y_3 &= y_1 + r_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 + r_2 \cos \theta_2 \\ y_3 &= y_2 + r_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

所以

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)$$

联立式(2-11)和式(2-12)并对时间微分, 代入已知条件可解出:

$(x_3, y_3), (\dot{x}_3, \dot{y}_3), (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3), \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 和 $\ddot{\theta}_2$ (详见附录)。

(3) 第二类 I 级基本杆组运动分析方程。第二类 I 级基本杆组的两个外接运动副一个为转动副, 另一个为移动副, 内接运动副为转动副如图 2-55a 所示。已知, 外接传动副 P_1 点的运动参数 $(x_1, y_1), (\dot{x}_1, \dot{y}_1), (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1)$ 和 P_1 到 P_3 的距离 r_1 , 导杆上的任选外接转动副点 P_2 的运动参数 $(x_2, y_2), (\dot{x}_2, \dot{y}_2), (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2)$;

导杆的角位置 β 、角速度 $\dot{\beta}$ 及加速度 $\ddot{\beta}$ 。求：内接副 P_3 点的位置、速度、加速度，构件 $\overline{P_1P_3}$ 的角位置 θ_1 、角速度 $\dot{\theta}_1$ 、角加速度 $\ddot{\theta}_1$ 及滑块在导杆上的相对位置 r_2 、相对速度 \dot{r}_2 和相对加速度 \ddot{r}_2 。该基本杆组的运动分析可按如下过程进行：

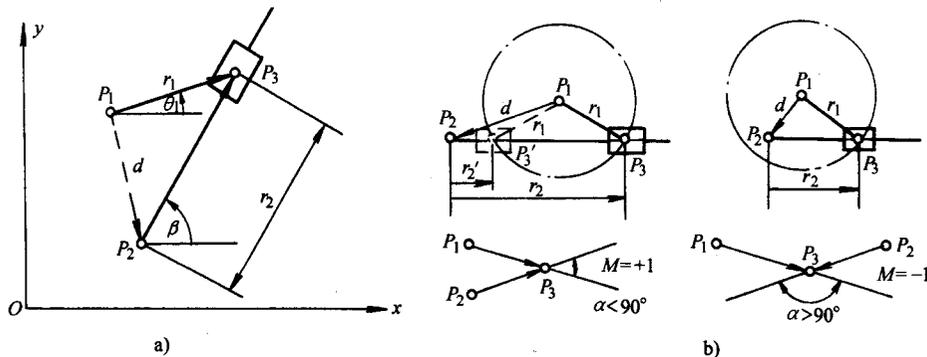


图 2-55 第二类 II 级基本杆组运动分析

a) 向量三角形图 b) 装配模式的确定

在直角坐标系 $O-xy$ 中建立封闭矢量三角形如图 2-55a 所示。

设 P_1 到 P_2 的距离为 d ， P_3 到 P_2 点的距离为 r_2 ，由图 2-55a 可知：

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (2-13)$$

$$r_1^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 + r_2 \cos \beta \\ y_3 &= y_2 + r_2 \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

所以

$$r_1^2 = (x_2 + r_2 \cos \beta - x_1)^2 + (y_2 + r_2 \sin \beta - y_1)^2$$

展开上式，注意到式(2-13)得：

$$r_1^2 = d^2 + r_2^2 + 2r_2[(x_2 - x_1)\cos\beta + (y_2 - y_1)\sin\beta] \quad (2-14)$$

令

$$E = 2[(x_2 - x_1)\cos\beta + (y_2 - y_1)\sin\beta]$$

$$F = d^2 - r_1^2 \quad (2-15)$$

由式(2-14)得：

$$r_2^2 + r_2 E + F = 0 \quad \text{或} \quad r_2 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4F}}{2} \quad (2-16)$$

从式(2-16)解 r_2 ，有三种可能结果，必须根据基本杆组的结构进行处理：

1) 舍去负根。

2) 当 $4F > E^2$ 时， r_2 为虚根，对机构分析无意义应舍去。

3) 当 $4F < E^2$, 且 $F > 0$ 时, 由式 (2-15) 知这时 $d > r_1$, r_2 有两个实数解; 式 (2-16) 根号前取正号, r_2 有较大值, 基本杆组如图 2-55b 实线所示形式装配; 根号前取负号, r_2 有较小值, 基本杆组按虚线所示形式装配。当 $4F < E^2$, 但 $F < 0$, 由式 (2-15) 知: $d < r_1$, r_2 只有一个解, 根号前应取正值。上述正、负号的选取, 应由设计者用装配模式系数 M 来确定。确定的方法是: 在机构运动简图中观察; $\overrightarrow{P_1P_3}$ 矢量与 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 矢量夹角取 “+1”, 否则取 “-1”。

当 r_2 确定后, 因为

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_2 + r_2 \cos \beta = x_1 + r_1 \cos \theta_1 \\ y_3 &= y_2 + r_2 \sin \beta = y_1 + r_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \right\}$$

从上式中可求出 (x_3, y_3) 和 θ_1 。再分别用上式对时间微分, 可进一步解出 (\dot{x}_3, \dot{y}_3) , (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3) , $\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1$ 和 \dot{r}_2, \ddot{r}_2 (滑块相对 P_2 点的相对速度和相对加速度)。

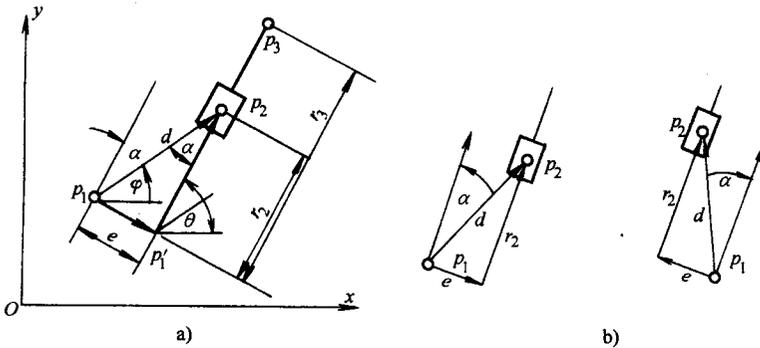


图 2-56 第三类 II 级基本杆组运动分析
a) 矢量三角形图 b) 装配模式的确定

(4) 第三类 II 级基本杆组运动分析方程。第三类 II 级基本杆组两外接副为转动副, 内接副为移动副, 如图 2-56a 所示。为了便于对与该基本杆组相连的其他基本杆组进行运动分析, 在该基本杆组导杆上增设了 P_3 点。在直角坐标系 $O-xy$ 中, 已知两外接运动副 P_1, P_2 点的运动参数分别为 $(x_1, y_1), (\dot{x}_1, \dot{y}_1), (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1); (x_2, y_2), (\dot{x}_2, \dot{y}_2), (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2)$ 和 P_1 点到导杆的距离 $\overline{P_1P_1'} = e$, P_3 在导杆的相对位置 r_3 , 求导杆的位置角 θ 、角速度 $\dot{\theta}$ 、角加速度 $\ddot{\theta}$ 及滑块在导杆上的相对位置 r_2 、相对速度 \dot{r}_2 、相对加速度 \ddot{r}_2 和 P_3 点的位置 (x_3, y_3) , 速度 (\dot{x}_3, \dot{y}_3) 和加速度 (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3) 。

首先建立矢量三角形如图 2-56a 所示, 图中

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

从图 2-56 中可知:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 - e^2}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{e}{d} \right)$$

所以

$$\theta = \varphi \pm \alpha$$

角 α 前的正、负号应根据杆组的具体结构确定: 当矢量 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 沿逆时针方向转动与导杆平时 (图 2-56a), α 前取正号; 当矢量 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 沿顺时针方向转动与导杆平行 (图 2-56b), α 前取负号, 在计算机语言中也用装配模式系数 M 取 “+1” 或 “-1” 表示。

θ 求出后, 由图 2-56 可得:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 + r_3 \cos \theta + e \sin \theta \\ y_3 &= y_1 + r_3 \sin \theta - e \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + r_2 \cos \theta + e \sin \theta \\ y_2 &= y_1 + r_2 \sin \theta - e \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

由式 (2-18) 消去 r_2 后对时间微分可求出 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 。将式 (2-17) 对时间微分后, 代入 $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ 可解出 (\dot{x}_3, \dot{y}_3) 、 (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3) 。将式 (2-18) 对时间微分, 代入 $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ 可解出 \dot{r}_2 、 \ddot{r}_2 (滑块相对 P_1' 点的相对滑动速度和相对滑动加速度)。

将以上运动分析方程编写成计算机子程序, 根据待分析机构的结构特征及已知条件, 从机构的原动件开始, 依次调用相应的刚体或基本杆组的子程序, 即可很方便地完成机构的运动分析。所有子程序及分析示例可参考机械原理课程设计手册。

三、平面四杆机构的合理选用

运动分析的目的, 一是为了校核所设计出的机构是否达到了预期的运动要求; 二是为机构的力分析提供必需的运动参数, 除此之外, 通过运动分析可以了解常用典型机构的运动规律, 为选用提供正确的依据。下面列举了一些常用平面四杆机构通过运动分析比较所得出的一些结论, 对合理地选择机构有一定的意义, 可供设计者参考。

(1) 平行四边形机构和双转块机构均能实现主、从动构件运动参数不变的运动传递, 从图 2-57 可知, 双转块机构中 $\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{1}{2} \varphi_2$; $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2$, 即十字滑

块的转动速度是输入转速的一倍，其质心产生的离心惯性力大，且不能被完全平衡，对机构运动的平稳性影响较大，故这种机构不适用于高速转动的场合。相比之下，平行四边形机构连杆质心的惯性力容易实现完全平衡，故它更适合转速相对较高的场合使用。图 2-58 中，转动导杆机构当曲柄与机架长度相等时，曲柄转角 φ_1 与导杆转角 φ_3 之间存在 $\varphi_1 = 2\varphi_3$ ； $\dot{\varphi}_1 = 2\dot{\varphi}_3$ ，曲柄匀速转动，导杆也匀速转动，但曲柄转速是导杆转速的一倍，曲柄转两周，导杆转一周。与之类似图 2-5b 所示的等腰双曲柄机构短曲柄转两周，长曲柄转一周，但不同的是当短曲柄匀速转动时，长曲柄作变速转动。

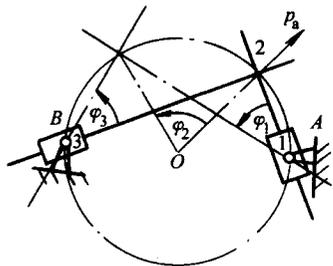


图 2-57 双滑块机构运动分析

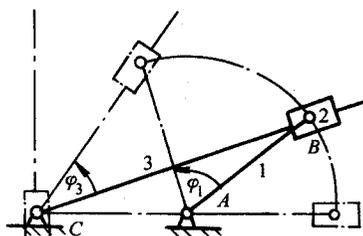


图 2-58 转动导杆机构运动分析

(2) 十字滑块曲柄机构（正弦机构）可以看成是曲柄滑块机构将滑块上的转动副变异成移动副得到的。因此，十字滑块曲柄机构可以看成是具有无限长连杆的曲柄滑块机构。十字滑块曲柄机构的滑块的行程为 $S = l_1 \cos \varphi_1$ ，微分可得滑块的速度和加速度： $v = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1$ ， $a = -l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1$ ，而曲柄滑块机构的运动要复杂得多，由式 (2-10) 知

$$S = l_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{l_2}{l_1} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi_1 \right)$$

$$v = -l_1 \omega_1 \left(\sin \varphi_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_1 \right)$$

$$a = -l_1 \omega_1^2 (\cos \varphi_1 + \lambda \cos 2\varphi_1)$$

式中： λ 等于曲柄长 l_1 与连杆长 l_2 之比值，当连杆长无穷大时 $\lambda = 0$ ，将 $\lambda = 0$ 代入上式中得十字滑块曲柄机构的速度与加速度公式。由此可知：曲柄滑块机构的速度与加速度的最大值均比十字滑块曲柄机构大。

(3) 偏置式曲柄滑块机构、曲柄摇杆机构和摆动导杆机构均能实现从动构件的急回运动，但从保证机构具有良好的运动性能方面考虑（见受力分析关于传动角一节内容），偏置式曲柄滑块机构和曲柄摇杆机构的行程时间比系数 K 不能取得太大，通常不超过 1.3，而摆动导杆机构 K 值可以达到 2 左右，机构的行程时间比系数愈大，机构执行构件在“慢进”时的运动相对愈平稳，故导杆机构是往

复运动从动杆能实现较大 K 值的急回运动, 且运动性能和动力性能均比较好的四杆机构。图 2-59a 给出了导杆机构和具有相同行程时间比系数的曲柄摇杆机构的运动输出构件的速度线图, 图 2-59b 是在具有相同的行程时间比系数情况下画出的导杆机构曲柄摇杆机构摇杆的加速度线图。通过比较可以看到: 导杆机构的输出速度在慢行程中比较平稳, 而后的加速度变化比较剧烈。

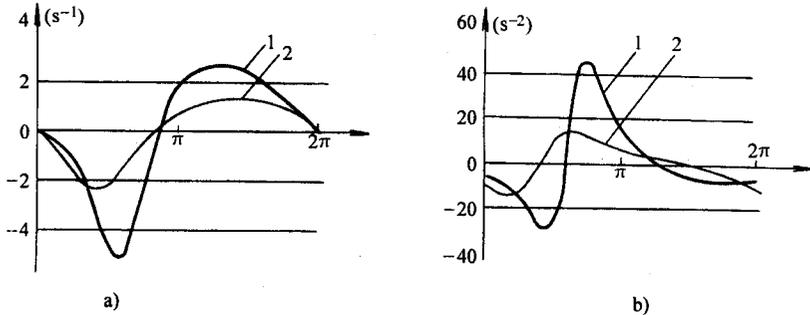


图 2-59 导杆机构与曲柄摇杆机构运动输出特性比较

a) 速度特性 b) 加速度特性

1—曲柄摇杆机构 2—导杆机构

(4) 平行四边形机构的连杆可作刚体平移导引, 其他平面四杆机构的连杆能实现复杂平面轨迹运动和刚体的导引, 但曲柄摇杆机构的连杆曲线变化最丰富、最复杂, 并且有比较系统、详细的图册可查阅, 故最富有应用价值。

(5) 表 2-1 中所示的双滑块机构可以实现两个不同方向移动的运动变换。因为该机构连杆中点 O_1 的运动轨迹为以两导路交点 O 为圆心的圆, 故可以在 O 点和连杆中点 O_1 之间安装一个长度为 $\overline{O_1O}$ 的曲柄来驱动两滑块运动。根据运动分析知: 连杆的绝对瞬心 P_{24} 的运动轨迹 (称瞬心线) 是圆心在 O_1 直径为连杆长的圆, 由于连杆中点 O_1 绕 O 点转动, 故机构也可以变异为半径等于 $\overline{O_1O}$ 的小圆在半径为 2 倍 $\overline{O_1O}$ 大圆中作纯滚动的高副机构 (称为行星齿轮机构) (图 2-60), 这时可将两滑块用转动副 (或高副) 联接在小圆的圆周上, 并使滑块的导路通过大圆的中心 O 点, 从而实现用其他机构实现相同的运动输出。

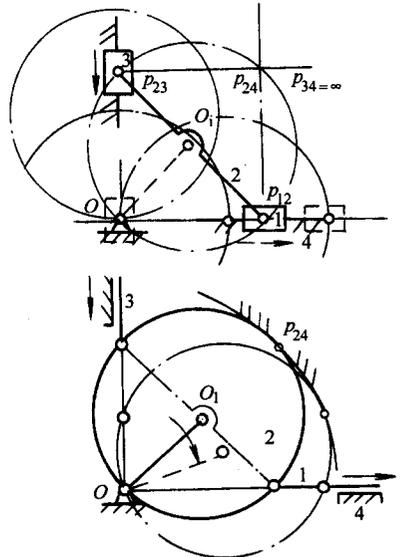


图 2-60 双滑块机构及其变异机构

第三节 平面四杆机构的传力特性与受力分析

机构的设计方案不仅要能实现理想的运动，还必须满足设计提出的各种受力要求，在考虑如何使机构能获得理想运动的同时，还必须考虑如何用体积最小、重量最轻、最经济的材料使机构能有较高的使用寿命；如何使机构在运动时有较高的传动效率；选用什么样的原动机、多大的功率才能使机构正常运转…。另一方面，由于机构中的摩擦力（矩）、运动构件上的惯性力（矩）以及作用在机构上的生产阻力与驱动力的复杂性与多样性，使机构的运动不仅仅只取决于机构的几何尺寸和结构形式，而且也与作用在机构上的各种力的性质有关。设计者对作用在机构上力的影响估计不足，力的分析失误，都可能影响机构的设计质量，或造成机构工作效率低，机构在运动时有强烈的振动、噪声、冲击，影响机构的正常使用，甚至还可能造成构件的损坏，使机构无法使用…。因此，了解机构的传力特性，对机构作正确的受力分析是机构设计者必须掌握的重要内容。

一、机构中的摩擦及传动效率

（一）作用在机构上的力

按力对运动的影响分，作用在机构上的力可分为驱动力和阻力两大类。

平面运动构件上凡是与构件运动速度方向夹锐角的力称为驱动力，与运动角速度方向一致的力矩称为驱动力矩。原动机发出的力是驱动力；构件质心位置下降时，重力是驱动力；构件作减速运动时，惯性力（矩）是驱动力（矩）；摩擦传动中的摩擦力是驱动力。

平面运动构件上凡是与构件运动速度方向夹钝角的力称为阻力，与构件角速度方向相反的力矩称为阻力矩。阻力（矩）分为工作阻力和有害阻力。冲床在冲压金属时，金属材料对冲头的阻力是工作阻力；吊车在起吊重物时，重力是工作阻力，由于克服了这些阻力，机器作出了有益功，故工作阻力（矩）又称为有益阻力（矩）。阻碍作有益功的力（矩）称为有害阻力（矩）；运动副中的摩擦力（矩）是机械运动的一种主要有害阻力。

作用在运动副元素上的力称为约束力（或约束反力）。对机构而言，约束力是内力；对构件而言，它们是外力。单独由惯性力（矩）引起的约束反力称为附加动压力。约束反力可分为沿运动副元素接触点的法向力和切向力，法向力是唯一运动而不作功的力；切向力即运动副中的摩擦力，计入摩擦力的约束反力称为运动副中的总反力。摩擦除了使运动副磨损造成运动精度降低缩短机械的使用寿命外，还是影响机械传动效率的主要因素。因此，我们首先来分析运动副中的摩擦和机构效率的计算方法。

（二）低副中的摩擦

(1) 移动副中的摩擦力和总反力。图 2-61 所示移动副，当载荷为 Q 的滑块 1 在驱动力 P 水平作用下相对构件 2 以匀速 v_{12} 水平移动时，根据库仑定理，构件 2 作用在滑块 1 上的法向反力 N_{21} 与摩擦力有以下关系：

$$f_{21} = N_{21} \mu = Q \mu$$

式中 μ ——摩擦系数，当运动副元素是平面时，不同材料组合测得的摩擦系数参见表 2-2。

由于 $\frac{f_{21}}{N_{21}} = \mu$ 是一个常数，在计入摩擦的受力分析时，为了简化分析过程，通常不单独分析 N_{21} 和 f_{21} ，而研究它们的合力 R_{21} ， R_{21} 称为构件 2 对构件 1 的总反力。从图 2-61 中可以看到： R_{21} 与 N_{21} 之间的夹角 $\varphi = \arctg\left(\frac{f_{21}}{N_{21}}\right) = \arctg \mu$ ， φ 称为

构件的摩擦角。因为 R_{21} 与 v_{12} 之间夹 $90^\circ + \varphi$ 角，故 R_{21} 是运动的阻力。引入摩擦角的概念对分析构件的运动十分方便，当与滑移副导轨的垂直方向夹 α 角的驱动力 P 的作用线作用在摩擦角以内时（即 $\alpha < \varphi$ 时），无论驱动力 P 加到多大，其水平分力永远小于摩擦力 f_{21} ，滑块原来不动将永远

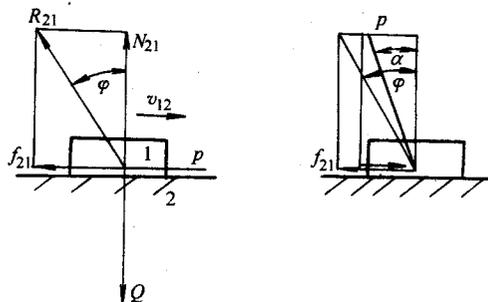


图 2-61 移动副的受力分析

将作减速运动，直至运动停止。当 $\alpha > \varphi$ 时滑块将加速运动。当 $\alpha = \varphi$ 时滑块原来不动仍不会运动，原来在运动将继续保持原方向匀速运动。

表 2-2 两运动副元素是平面，不同材料组合的摩擦系数表

材料副名称	摩擦系数			
	静摩擦		动摩擦	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢-钢	0.15	0.10~0.12	0.10	0.05~0.10
钢-铸铁	0.2~0.3		0.16~0.18	0.05~0.15
钢-青铜		0.10~0.15	0.15~0.18	0.07
铸铁-铸铁		0.15~0.16	0.15	0.07~0.12
铸铁-青铜	0.28	0.16	0.15~0.21	0.07~0.15
青铜-青铜			0.15~0.20	0.04~0.10
皮革-铸铁或钢			0.30~0.50	0.12~0.15
橡胶-铸铁			0.8	0.5

摩擦力除了与正压力和两运动副元素的材料有关，也与两运动副元素的几何形状有关。在实际工程应用中，为了保证滑移副沿确定的方向运动，通常总是将滑块与导杆的接触面作成V形的槽面接触如图2-62a所示。设V形槽面的槽形角为 2θ ，因为 $N_{21} = \frac{Q}{\sin\theta}$ ，所以作用在V形槽面上的摩擦力

$$f_{21} = N_{21}\mu = \frac{\mu}{\sin\theta}Q$$

令

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\sin\theta}$$

则

$$f_{21} = \mu_0 Q$$

式中 μ_0 ——当量摩擦系数。

从上式可以看出：因为 $\sin\theta < 1$ ，所以 $\mu_0 > \mu$ ，即槽面接触使两构件间的摩擦力增大。因此，为了增大联接螺纹与螺母间的摩擦，使螺母不易松脱，联接螺纹的牙形常作成三角形。为了增加带轮与传动带之间的摩擦，增大传动的转矩，传动带也常作成三角形，使之与带轮能保持三角形的槽面接触（图2-62b）。

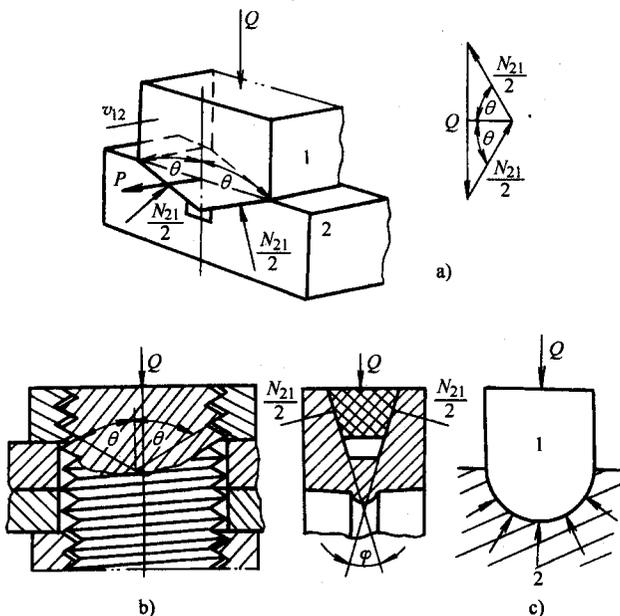


图 2-62 槽面的受力分析

a) 槽面的受力分析 b) 槽面摩擦的应用 c) 圆弧面接触的受力

引入当量摩擦系数后，不论两运动副元素的几何形状如何，均可以用统一计算公式来计算两构件间的摩擦力、摩擦角和总反力，这时只需根据运动副元素的

几何形状, 采用相应的当量摩擦系数即可, 从而为运动副元素是复杂曲面的摩擦力的计算提供了方便。例如图 2-62c 所示两构件沿一圆弧面接触, 在载荷 Q 的作用下, 构件 1 所受的反力沿整个接触面的法向分布, 其法向分力的铅垂方向分量之和与 Q 相等, 显然计算这些法向分力和由这些力产生摩擦力是比较复杂的。采用当量摩擦系数 μ_0 , 计算由 Q 力引起的摩擦 f_{21} 就比较简单,

$$f_{21} = \mu_0 Q$$

$$\mu_0 = k\mu$$

式中 μ ——两运动副元素是平面时的摩擦系数, 其值可从表 2-2 中查出;

k ——通过实验测得, 其值为 $1 \sim 1.57$ 。

需要指出的是: 根据两构件接触面的形状, 采用不同的当量摩擦系数来计算两构件相对运动时产生的摩擦力, 这并不是因为两构件的摩擦系数发生了变化, 而是运动副元素的几何形面使法向反力的计算发生了变化。采用根据理论和实验分析得到的当量摩擦系数, 可以不必计算这些复杂的法向反力就可以求出作用在运动副中的摩擦力, 从而大大地简化了摩擦力的分析计算过程。

(2) 转动副中的摩擦与总反力。

当两构件形成转动副时, 支承转轴的零件称为轴承, 转轴上被轴承支承的部分称为轴颈。按受力状态分, 轴颈可分为两种: 载荷沿直径方向作用的轴颈, 称为径向轴颈 (图 2-63a)。载荷沿轴方向作用的轴颈, 称为轴踵 (图 2-63b) 也称止推轴颈。

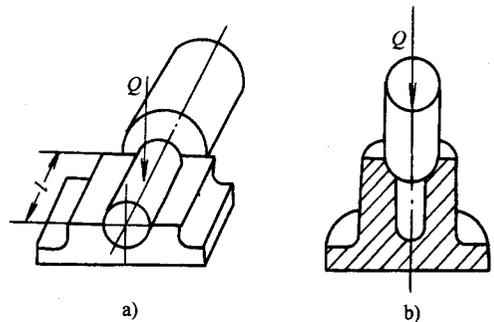


图 2-63 转动副在工程中的应用

a) 径向轴颈 b) 止推轴颈

1) 径向轴颈中的摩擦。径向轴颈是转动副最常见的结构形式。设径向轴颈 1 上沿轴的直径方向上作用有载

荷 Q , 在驱动力矩 M_d 的作用下, 轴以等角速度 ω_{12} 相对轴承 2 转动 (图 2-64a)。轴承对轴颈的法向反力在圆柱面上分布比较复杂, 为此, 引入当量摩擦系数来计算轴颈上的摩擦力,

$$f_{21} = \mu_0 Q$$

根据实验及理论分析: 对于配合紧密未经跑合的轴颈, $\mu_0 = 1.57\mu$; 对于配合轻松跑合过的轴颈, $\mu_0 = 1.27\mu$, μ 为运动副元素是平面时的摩擦系数。

设摩擦力 f_{21} 在轴颈上形成的摩擦力矩为 M_f

$$M_f = f_{21}r = Q\mu_0 r$$

式中 r ——轴颈的半径。

当轴颈以匀角速度 ω_{12} 相对轴承匀速转动时, 根据作用在轴颈上力的平衡条件

可知：轴颈上的总反力 R_{21} 与载荷 Q 大小相等、方向相反，形成阻力矩 M_f 与驱动力矩 M_d 平衡，设 Q 与 R_{21} 的距离为 ρ ，则

$$R_{21}\rho = M_d = M_f = Q\mu_0 r = R_{21}\mu_0 r$$

所以

$$\rho = \mu_0 r$$

(2-19)

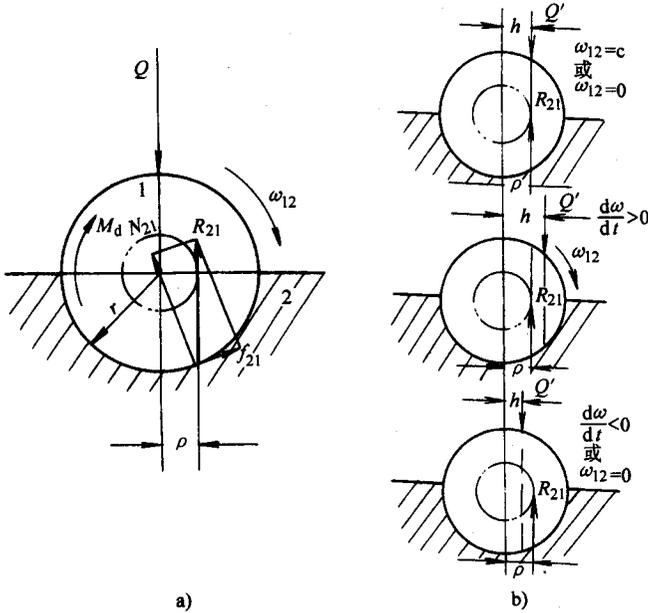


图 2-64 径向轴颈的受力分析

a) 匀速转动的径向轴颈 b) 径向载荷改变对轴运动的影响

因为 μ_0 、 r 为常数，故 ρ 是一定值。 ρ 确定了总反力 R_{21} 与轴的回转中心的距离。当轴上载荷的方向改变时， R_{21} 的方向也将发生改变，但 R_{21} 与轴的回转中心距离 ρ 不会改变。因此，我们可以根据 R_{21} 始终与半径为 ρ 的圆相切，方向是使轴沿 ω_{12} 方向相反方向转动，来确定 R_{21} 的方向与力的作用位置。半径为 ρ 的圆称为摩擦圆。

引入摩擦圆的概念便于用图解法进行受力分析时确定总反力的方位，并有利于对轴在力作用下的相对运动进行分析。将图 2-64a 中作用在转轴上的载荷 Q 和驱动力矩 M_d 用图 2-64b 所示的用偏离转轴中心的载荷 Q' 来代替，设驱动力 Q' 与轴心的距离为 h ，则 $h = M_d/Q$ ， Q' 偏离 Q 的方向以 Q' 对轴心之矩的方向与 M_d 的方向相同来确定，由力的平衡原理可知，无论 Q' 及 h 的大小如何变化，由 Q' 引起的约束反力 R_{21} 大小总是与之相等并切于半径为 ρ 的摩擦圆上。因此，当 $h = \rho$ 时，即 Q' 与 R_{21} 共线，轴 1 若原来以匀角速度 ω_{12} 转动，现仍将以 ω_{12} 继续转动；若轴 1 原来不动，现仍将不动。当 $h > \rho$ 时，即力 Q' 作用在摩擦圆以外，轴 1 将加速转动；

当 $h < \rho$ 时, 力 Q' 作用于摩擦圆以内, 若轴原来以 ω_{12} 转动, 轴将减速转动, 直至转动停止; 如果轴原来不动, 由于这时 Q' 力对转轴形成的驱动力矩总是小于总反力 R_{21} 形成的阻力矩, 无论 Q' 力多大, 轴均不能转动。

根据上面的分析可知: 当机构中出现作用力作用在摩擦角内的移动副, 或作用力作用在摩擦圆内的转动副时, 无论作用在机构上的驱动力怎样增大, 连接上述运动副的两构件都不能产生相对运动, 机构也不能运动, 机构这种与驱动力大小无关不能运动的现象称为“机构自锁”。

分析机构自锁的条件在机构设计中有十分重要的意义, 一方面通过分析自锁发生的原因可以避免机构发生自锁; 另

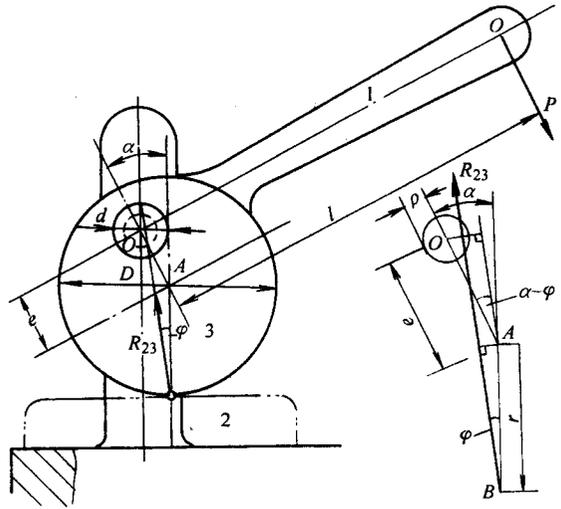


图 2-65 偏心夹具

一方面可以利用机构自锁使机构在有较大载荷作用的条件下使各构件能保持某种相对固定不动的状态, 实现可控制的暂时稳定。例如在图 2-65 所示的偏心夹具, 为了使作用在手柄上的 P 力卸掉后, 偏心圆盘 3 能将工件 2 继续夹紧, 应使工件给偏心圆盘的总反力 R_{23} 作用在偏心圆盘上转动副的摩擦圆内 (图 2-65 中转轴中的虚线圆), 使机构自锁, 让各构件处于暂时固定不动的状态。由此可以导出该夹具设计的几何条件为:

$$e \sin(\alpha - \varphi) - r \sin \varphi \leq \rho$$

即

$$\alpha \leq \arcsin\left(\frac{r \sin \varphi + \rho}{e}\right) + \varphi$$

式中 r ——偏心圆盘的半径;

e ——转动副中心至偏心圆中心的距离;

ρ ——摩擦圆半径 $\rho = \mu_0 r$;

μ_0 ——转动轴颈的当量摩擦系数;

φ ——偏心圆盘与工件间的摩擦角。

对于既有滚动又有滑动的高副, 由于滚动摩擦远远小于滑动摩擦, 可以近似用滑动摩擦系数来计算高副处的摩擦角。

2) 止推轴颈中的摩擦。止推轴颈是以轴端面与轴承平面相接触的。实验表明: 在轴向载荷 Q 的作用下轴端面上的压强分布是不均匀的, 外圆周的压强相对较

小,内圆中心压强较大,容易磨损,故一般将止推轴颈做成中空形如图 2-66a 所示。

对于未跑合过的止推轴颈,其轴端面压强近似相等,按此条件计算轴端面上单位圆环面积上的正压力为 $dN = p2\pi\rho d\rho$ (图 2-66b)。

式中 p ——单位面积上的压强;

ρ ——单位圆环的内径。

设:轴端中空小圆半径为 r ,轴的半径为 R ,作用在轴端面上的摩擦力矩 M_t 可以由下式算出。

$$M_t = \int_r^R \rho \mu dN \quad \text{即}$$

$$M_t = \int_r^R p \mu 2\pi \rho^2 d\rho = p \frac{2}{3} \pi \mu (R^3 - r^3) \quad (2-20)$$

而整个环面上的正压力为

$$N = \int_r^R p ds = \pi p (R^2 - r^2) = Q$$

故

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)}$$

将 p 代入式(2-20)中得

$$M_t = \frac{2}{3} Q \mu \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)}$$

对于跑合止推轴颈,由于外圆周相对速度大磨损快,经一段时间磨损后外圆周接触较中部松。实验表明:当压强与回转半径之积为常数时,止推轴颈接触状态保持相对稳定,即对于跑合止推轴颈可按 $p \cdot \rho = \text{常数}$ 来推导作用在轴端面上的摩擦力矩,根据这一结论按上述类似的方法推导可得

$$M_t = \frac{1}{2} Q \mu (R+r)$$

(3) 螺旋副中的摩擦。螺旋副的摩擦分析可以简化为斜面摩擦来分析,其实质是一个移动副的摩擦分析。如果将螺栓直立,将螺母上与螺纹接触的一小部分视为滑块,则滑块将沿与水平面成一定螺旋升角的斜面运动,当螺母向上旋进时,滑块的重力和滑块上的载荷将成为阻力,向下旋进时,重力和载荷将成为驱动力。

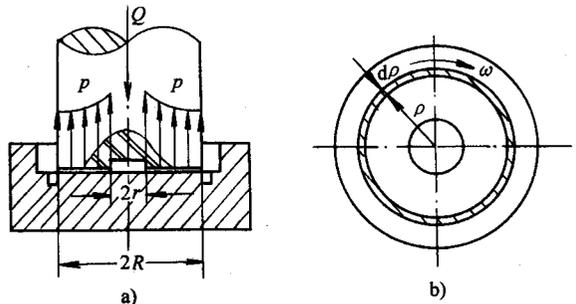


图 2-66 止推轴颈的受力分析

a) 推力轴颈的一般结构及载荷分布 b) 止推轴颈端面的正压力求解

(三) 机构的传动效率

由于运动副中摩擦的存在，机构在运动中总有一部分能量要用来克服摩擦而损失掉，从而使输入功的有效利用程度降低。工程中把克服工作阻力所作的有益功与输入功的比值称为机械效率。

对于稳定运转的机械，原动件的速度和加速度从某一数值开始变化，经过最短时间又回复到原来数值的时间称为机械的运动周期。机械一个运动周期的运动过程称为机械的一个运动循环。质量不变的机械系统在稳定运转的一个运动循环开始与结束时，由于速度没有改变，机械的动能没有改变，因此，机械的输入功 A_d 应等于克服工作阻力作的有益功 A_r 与克服有害阻力作的有害功 A_f 之和，即

$$A_d = A_r + A_f$$

设以 η 表示机械的效率，根据机械效率的定义

$$\eta = \frac{A_r}{A_d} = 1 - \frac{A_f}{A_d}$$

将上式中分子、分母同除以运动周期时间 T ，可得用平均功率表示的机械效率公式

$$\eta = \frac{N_r}{N_d}$$

对于可近似认为作匀速运动的机械，其机械效率也可以用驱动力（矩）与生产阻力（矩）的比值来表示。在图 2-67 所示机械系统中，当该机械系统有摩擦存在，设驱动重力为 P 的重物以匀速 v_p 速度下降时，能使阻力为 Q 的重物以匀速 v_Q 上升，该瞬时机械的效率为

$$\eta = \frac{N_r}{N_d} = \frac{Qv_Q}{Pv_p} < 1 \quad (2-21)$$

如果该机械为没有摩擦的理想机械，即 $\eta = 100\% = 1$ ，这时驱动重力为 P 的重物在以匀速 v_p 速度下降时，由于不必消耗能量去克服摩擦，必然会提起比 Q 更重的重物 Q_0 以匀速 v_Q 上升，即

$$\eta = \frac{Q_0 v_Q}{P v_p} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{v_Q}{v_p} = \frac{P}{Q_0} \quad (Q_0 > Q) \quad (2-22)$$

或者说，阻力为 Q 的重物以匀速 v_Q 上升时，只需要用比 P 小的重力 P_0 就能以匀速 v_p 下降，

$$\text{即} \quad \eta = \frac{Qv_Q}{P_0 v_p} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{v_Q}{v_p} = \frac{P_0}{Q} \quad (P_0 < P) \quad (2-23)$$

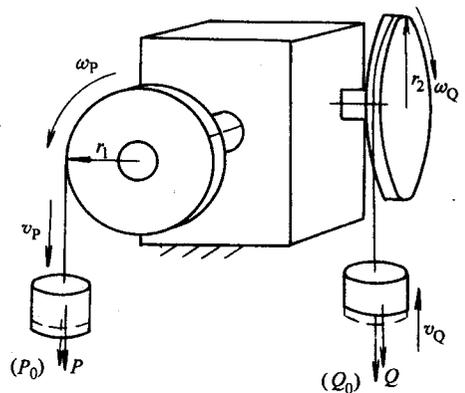


图 2-67 匀速机构效率分析

将式(2-22)或式(2-23)代入式(2-21)中得:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0} < 1 \quad (2-24)$$

式(2-24)表明:机械效率等于在工作阻力 Q 不变的条件下,同一机械计入摩擦时的驱动力 P 与不计摩擦时的驱动力 P_0 的比值;或者说,在驱动力 P 不变的条件下,同一机械不计摩擦时能克服的生产阻力 Q_0 与计入摩擦时能克服的生产阻力 Q 的比值。

将式(2-24)改写为:

$$\eta = \frac{Qv_Q}{Pv_p} = \frac{Qr_2\omega_Q}{Pr_1\omega_p} = \frac{M_r\omega_Q}{M_d\omega_p} < 1$$

式中 r_1 ——驱动力距轴心的半径;

r_2 ——阻力距轴心的半径;

M_r ——工作阻力矩;

M_d ——驱动力矩。

和上述推导过程一样,可得

$$\eta = \frac{M_d^0}{M_d} = \frac{M_r}{M_r^0}$$

式中 M_d^0 ——克服相同生产阻力矩 M_r 不计摩擦时所需的驱动力矩;

M_r^0 ——在驱动力矩 M_d 不变的条件下不计摩擦时所能克服的生产阻力矩。

机械在正常工作时, $0 < \eta < 1$ 。但如果 $A_d = A_r$, $\eta = 0$, 则 A_r 必为零, 说明机械不能输出功。这时的机械如果原来在运动, 现在仍将维持原状态继续运动但不能对外做功, 机械的这种运动状态称为空转。如果机械原来是静止的, 因没有多余的功可以转变为机械的动能, 机械肯定无法动起来。如果 $A_d < A_r$, $\eta < 0$, 这时机械完成的功尚不足克服有害阻力所需的功, 所以不论机械原来的运动情况如何, 最终必将减速直至运动停止; 原来是静止不动的机械, 肯定不能再运动起来。机械出现上述状态称为机械自锁。故机械发生自锁的条件可以表述为:

$$\eta \leq 0$$

根据机械自锁的条件也可以对机构的几何参数进行设计。

例 2-11 如图 2-68a 所示楔块式压榨机, 水平运动楔块的楔紧角(楔块斜面与楔块运动方向夹的锐角)较小为 λ ; 竖直运动楔块的楔紧角较大为 $90^\circ - \lambda$; 楔块各摩擦面的摩擦系数均为 μ 。求: 当不继续向水平运动楔块施加压力, 而被榨物体不致松开时, 楔块的楔紧角 λ 应为多少?

解

设压榨机向被压榨物体加压时, 水平驱动力为 P , 这时被压物体所荷载荷为 Q 。2、3 构件之间为一斜平面移动副, 将斜面上的受力简化, 用集中于接触面中央

的集中力代替，其总反力与斜面的法线夹一摩擦角。根据机构各构件间的几何关系及相对运动方向，画出楔块 2、3 的受力分析图和力封闭多边形如图 2-68b 所示，从力封闭多边形可得：

$$P = \frac{R_{32} \sin(\lambda + 2\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$Q = \frac{R_{23} \cos(\lambda + 2\varphi)}{\cos\varphi}$$

式中： $\varphi = \arctg\mu$

因为

$$|R_{23}| = |R_{32}|$$

所以

$$P = Q \operatorname{tg}(\lambda + 2\varphi)$$

(2-25)

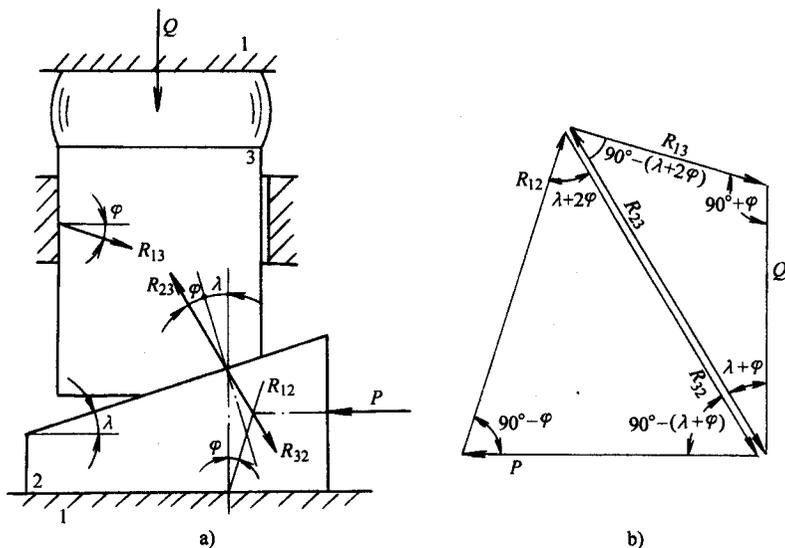


图 2-68 楔块式压榨机的受力分析

a) 受力分析图 b) 力封闭多边形

令式(2-25)中 $\varphi=0$ ，得无摩擦的理想压榨机驱动力 P_0 与生产阻力 Q 的关系式

$$P_0 = Q \operatorname{tg}\lambda$$

根据机械效率的定义，当 P 为驱动力向被压物体施压时的效率为：

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + 2\varphi)} \quad (2-26)$$

为了避免机械这时发生自锁，应使 $\eta > 0$ ，故

$\operatorname{tg}(\lambda + 2\varphi) > 0$ ，即 $\lambda + 2\varphi < 90^\circ$ ，于是得机构的楔紧角 λ 为：

$$\lambda < 90^\circ - 2\varphi \quad (2-27)$$

当停止施压时，被压物体的重力和弹性恢复力 Q 成为机构运动的驱动力，这

时机构中各构件的运动方向与压榨时相反，将式(2-25)中的摩擦角 φ 用 $-\varphi$ 代替得：

$$P = Q \operatorname{tg}(\lambda - 2\varphi)$$

上式为在驱动力 Q 作用下机构匀速运动时应在楔块1上施加的阻力 P 与 Q 的关系式。在不计摩擦的理想压榨机中，令 $\varphi=0$ 得理想机械的生产阻力 P_0 与 Q 的关系式

$$P_0 = Q \operatorname{tg} \lambda$$

根据机械效率的定义，得在 P 为阻力时的机械效率为：

$$\eta' = \frac{P}{P_0} = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - 2\varphi)}{\operatorname{tg} \lambda} \quad (2-28)$$

这时若要保证被榨物不被松开，应使机构自锁，令 $\eta' \leq 0$ 得：

$$\lambda - 2\varphi \leq 0 \quad \text{即} \quad \lambda \leq 2\varphi \quad (2-29)$$

比较式(2-28)和式(2-30)知：因 2φ 远远小于 90° ，在 $\lambda \leq 2\varphi$ 的条件下，压榨机既能向被压榨物体加压，又能在加压停止后保证被压榨物不被松开（即机构反行程将自锁）。当 $2\varphi < \lambda < (90^\circ - 2\varphi)$ 时，机构将不会自锁，可在力的作用下沿正、反两个方向运动，但效率不一定相等。

将式(2-28)除以式(2-26)得：

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + 2\varphi) \operatorname{tg}(\lambda - 2\varphi)} = \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda}{\operatorname{tg}^2 \lambda - \operatorname{tg}^2 2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda - \operatorname{tg}^4 \lambda \operatorname{tg}^2 2\varphi}{\operatorname{tg}^2 \lambda - \operatorname{tg}^2 2\varphi}$$

当 $\lambda = 45^\circ$ 时， $\eta = \eta'$ 。

当 $2\varphi < \lambda < 45^\circ$ 时，因为 $\operatorname{tg}^4 \lambda < 1$ ，所以 $\frac{\eta}{\eta'} > 1$ ，即 $\eta > \eta'$ ，说明：当驱动力作用于楔紧角较小的楔块使机构运动时，比驱动力作用于楔紧角大的楔块使机构运动时的效率高，同一楔块机构正反行程运动时的机械效率并不相等。这一现象在机构中普遍存在，在正、反行程运动均需要利用的机构设计中，应分别对其正反行程的效率进行计算。

机械正、反行程效率不等这一性质在工程设计中也被广泛的应用。图2-69所示螺旋千斤顶就是其中的设计应用例子。螺旋千斤顶中的螺旋一般采用矩形螺纹，在螺纹的螺旋面上，螺纹内径的螺旋升角大，而外径的螺旋升角小，工程中为了简化计算，常以螺纹中径（即内径与外径的平均值）上的螺旋升角来计算螺旋副中的受力。设中径上的螺纹升角为 λ ，则 $\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{z\rho}{\pi d} \right)$ 。

式中 z ——螺纹的头数；

ρ ——螺距；

d ——螺纹中径， $d = \frac{r_{\text{内}} + r_{\text{外}}}{2}$ 。

千斤顶中的螺杆可以看成是将升角为 λ 的斜面包裹在一圆柱体上形成的 (图 2-69b), 螺杆与螺母之间的相对运动关系如同一个滑块沿斜平面运动, 这种情况与

[例] 2-11 讲的压榨机的受力情况相似, 当螺旋升角 $\lambda \leq 2\varphi$ 时, 驱动螺杆, 螺杆向上运动托起重物; 但驱动停止时, 由于反行程机构自锁, 螺杆将重物顶住不致下落。

从上面的分析可以看出, 摩擦对机械的工作带来许多不利的影响: 它使机械的效率降低; 使运动副磨损, 降低了机械的使用寿命工作精度。但摩擦又不可避免, 在设计时应采取措施降低摩擦对机械工作带来的不利影响。例如: 尽量减少机械中运动副的数量; 减轻构件的自重和惯性力; 用滚动副替代移动副; 选用合理的运动副元素的材料; 选择合适的润滑等等。另一方面, 摩擦也有其有利的一面。例如: 带传动、摩擦式

离合器均是利用摩擦来实现运动和动力的传递; 三角螺纹借助增大摩擦来提高联接的可靠性; 图 2-65 所示的例子是利用摩擦使机构自锁设计而成的夹具。除此之外, 千斤顶、摩擦式制动器等都是充分利用摩擦有利的一面而设计制造的。因此, 减少摩擦和巧妙地利用摩擦, 对机械设计者是同样重要的两个方面。《摩擦学》这门新兴的学科也正是在人们对摩擦理论不断深入的认识中而逐渐形成的。关于摩擦学方面的内容可查阅有关书籍和文献。

二、平面连杆机构的传力特性

机构在传递运动的同时也要传力和对外做功, 机构传力性能和对外做功能力的好坏是我们评价和选择机构的重要内容, 也是机构设计必须研究的重要问题。机构传力特性通常是通过对机构压力角、传动角及与之相关的力学结构特征分析来描述的。

(一) 平面连杆机构的压力角与传动角

平面连杆机构传力最显著的特点是: 机构传力和对外做功的能力随机构运动位置的变化而改变。例如图 2-70 所示曲柄摇杆机构, 在忽略了构件的惯性力、重力、运动中的摩擦力的条件下, 设从动杆受力为 F ; 受力点的绝对速度为 v , 从动

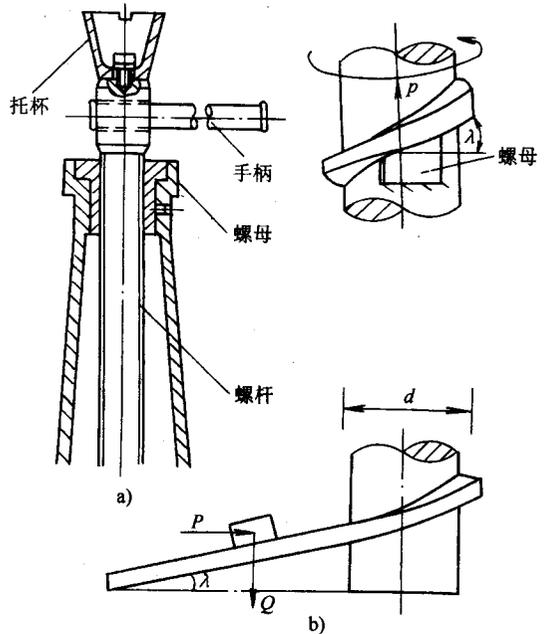


图 2-69 螺旋机构受力分析
a) 结构示意图 b) 受力分析图

杆上瞬时输出功率为：

$$F \cdot v = Fv \cos \alpha = F_t v$$

式中 F_t ——连杆传给机构从动件的力在力作用点速度方向上的投影；

α ——机构从动杆受力点处力的方向与受力点速度方向夹的锐角，称为机构的压力角。

显然，平面连杆机构在运动中压力角 α 愈小，机构对外作功能力愈强，机构的传动效率愈高，对机构的运动愈有利。为了能比较方便地从平面连杆机构运动简图中直接观察机构传力性能的好坏、判断机构的传动质量，同时也为了能方便地对机构进行设计，特定义连杆机构中连杆与从动杆夹的锐角为机构的传动角，用 γ 表示。如果 γ 是钝角，应计算其补角。因为 $\alpha + \gamma = 90^\circ$ ，故 γ 值愈接近 90° ，机构的传力性能愈好，对机构的运动愈有利。由于传动角随机构运动在不断地变化，因此，在设计时应尽可能保证机构在运动的全过程中传动角之值较大，尤其是当机构从动杆运动至需对外输出力（矩）时，更应注意保证传动角的值较大。例如图 2-71 所示采用连杆机构设计的手动金属板剪，该设计充分利用了力杠杆可以增力的特点，将板剪的手柄做得较长而剪刀刃做得较短，并且使剪刀刃在剪切金属板时，机构的传动角接近 90° ，从而使工人能比较省力地剪断金属板材。

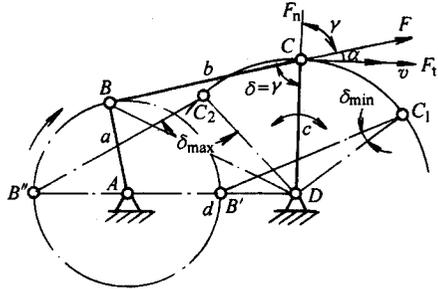


图 2-70 机构的压力角与传动角

由于平面连杆机构的传动角随机构的运动在不断地变化，考虑到运动副中摩擦力和重力、惯性力对机构运动不利方面的影响，为了保证机构传动性能良好，在设计平面连杆机构时应保证机构的最小传动角 γ_{\min} 不应小于 40° ；在高速和大功率机械中，不应小于 50° 。新设计的平面连杆机构，在其他设计要求均已满足时，应校验 γ_{\min} 是否符合上述要求。

曲柄摇杆机构的最小传动角及其机构在最小传动角时的位置可用下面的方法求出。在图 2-70 所示四杆机构 ABCD 中，设曲柄、连杆、摇杆和机架长度分别为 a 、 b 、 c 和 d ，设连接 B、D 铰链的线段长度为 k ，则：

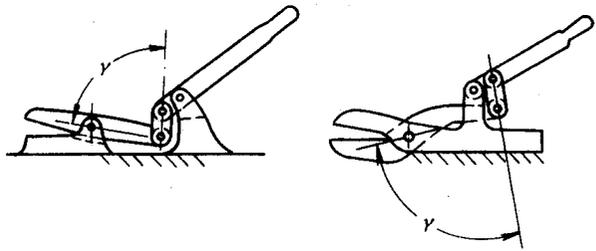


图 2-71 增力机构传动角的设计

曲柄摇杆机构的最小传动角及其机构在最小传动角时的位置可用下面的方法求出。在图 2-70 所示四杆机构 ABCD 中，设曲柄、连杆、摇杆和机架长度分别为 a 、 b 、 c 和 d ，设连接 B、D 铰链的线段长度为 k ，则：

曲柄摇杆机构的最小传动角及其机构在最小传动角时的位置可用下面的方法求出。在图 2-70 所示四杆机构 ABCD 中，设曲柄、连杆、摇杆和机架长度分别为 a 、 b 、 c 和 d ，设连接 B、D 铰链的线段长度为 k ，则：

$$\cos\delta = \frac{b^2 + c^2 - k^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi_1)}{2bc} \quad (2-30)$$

式中 φ_1 ——曲柄 a 与机架 d 的夹角。

当曲柄与机架共线、铰链 B 运动至 B' 位置时, $\varphi_1 = 0$, k 有极小值 $k_{\min} = d - a$; 当铰链 B 运动至 B'' 位置时, $\varphi_1 = 180^\circ$, k 有极大值 $k_{\max} = d + a$ 。将 k_{\min} 和 k_{\max} 分别代入式 (2-30) 中, 求出 δ_{\min} 和 δ_{\max} ,

$$\cos\delta_{\min} = \frac{b^2 + c^2 - (d - a)^2}{2bc}$$

$$\cos\delta_{\max} = \frac{b^2 + c^2 - (d + a)^2}{2bc}$$

如果 δ_{\max} 是锐角, 机构的最小传动角 $\gamma_{\min} = \delta_{\min}$; 如果 δ_{\max} 是钝角, γ_{\min} 应为 δ_{\min} 和 $180^\circ - \delta_{\max}$ 中的最小者。

分析式 (2-30) 可知: 在条件许可的情况下, 减小曲柄 a 的长度有利于增大机构的最小传动角。

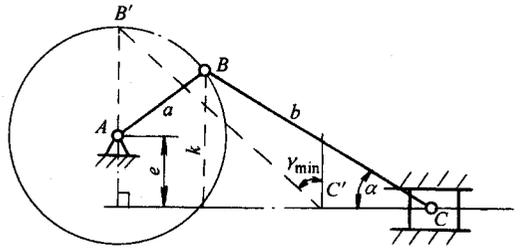


图 2-72 曲柄滑块机构最小传动角位置

对于曲柄滑块机构, 由于 $\sin\alpha = \frac{k}{b}$ (图 2-72), 故当曲柄与滑块导路垂直时机构的压力角最大, 因为 $\gamma_{\min} = 90^\circ - \alpha_{\max}$, 所以曲柄与滑块导路垂直时机构的传动角最小。因此, 要增大机构的最小传动角, 在满足 $a + e \leq b$ 的条件下适当减小曲柄 a 和偏距 e 的尺寸或增大连杆 b 的长度, 有利于增大机构的最小传动角。

导杆机构由于导杆受力与受力点的速度方向夹角在机构运动中始终为零, 故机构的传动角为 90° 不变 (图 2-73)。

多杆机构由于机构中构件的运动和受力情况比较复杂, 一般不能直接用连杆与从动杆的夹角来确定机构的传动角。图 2-74 所示瓦特型铰链六杆机构, 其传动角 γ 可按两个铰链四杆机构分别进行分析。

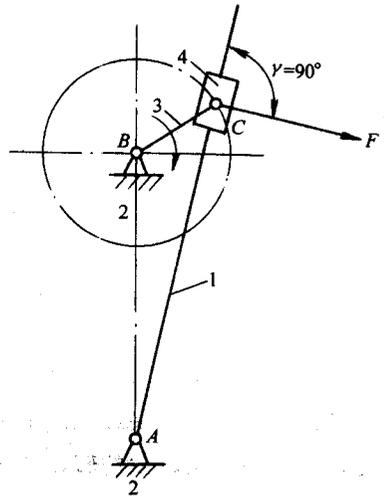


图 2-73 导杆机构传动角

(二) 机构中力的增益与“死点”

曲柄滑块机构和曲柄摇杆机构当曲柄与连杆运动至接近共线位置时, 曲柄上较小的力矩能在从动杆 (滑块或摇杆) 上产生很大的输出力 (矩)。这一特征常称为力的增益, 并常

常被设计者在设计中加以利用。冲压机床中普遍采用曲柄滑块机构作为冲压机构，总是将冲压零件的位置设计在曲柄与连杆接近共线的位置附近，使机构的传动角 γ 接近 90° ，从而使冲头（滑块）能向工件施加更大的冲击力。反过来，若以滑块或摇杆为主动件，当从动连架杆与连杆接近共线时，由于机构的传动角 γ 很小，作用于摇杆或滑块上的驱动力却很难使从动连架杆转动。当机构的传动角 $\gamma=0$ 时，整个机构被“顶死”而无法运动。故以往复运动构件为主动、连杆与从动连架杆共线，机构传动角 $\gamma=0$ 的位置称为机构的死点（图 2-75）机构在死点位置。从动连架杆在死点位置有两种受力状态：受拉或者受压。如果从动连架杆在死点受压，由于压杆极易在外力的干挠下失稳，故可以用较小的外力来破坏被顶死的机构，使机构重新运动。利用连杆机构的这一性质，工程中设计出如图 2-76a 所示的工件夹紧机构，图 2-76b 所示为可远距离操纵的电源分合闸机构等等。

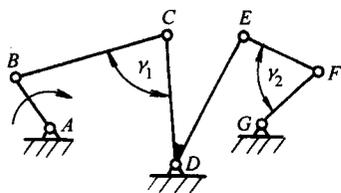


图 2-74 瓦特型六杆机构的传动角

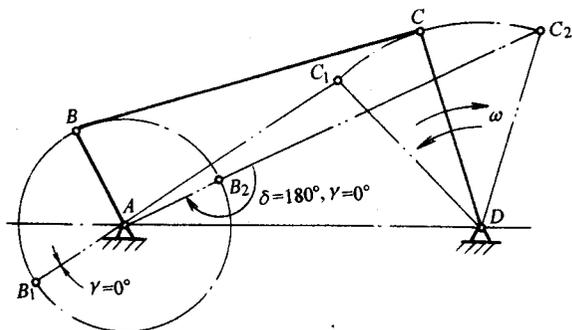


图 2-75 铰链四杆机构的死点位置

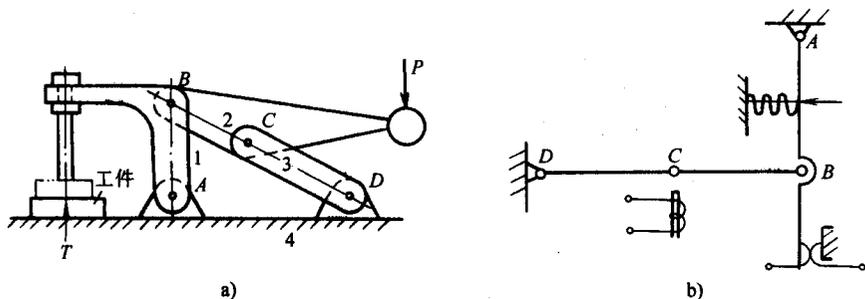


图 2-76 铰链四杆机构死点应用

a) 夹紧机构 b) 电源分合闸机构

当不希望以往复运动构件为主动驱动曲柄转动的机构在死点位置被顶死，可根据机构的结构特点采取相应的措施。例如脚踏式缝纫机和单缸柴油机，是用安装飞轮，借助飞轮较大的转动惯量来克服死点；火车头上的蒸汽机和汽车上的内燃机，用多套机构错位安装，使驱动同一曲柄的每套机构死点位置相互错开，以避免机构因死点而被顶死（图 2-77）。

双摇杆机构也会出现死点(图 2-78a)。避免双摇杆机构因死点被顶死的办法,是限制摇杆的摆动范围。

需要指出的是:平行四边形机构当从动曲柄与连杆位置共线时,虽然这时机构的传动角 $\gamma=0$,但由于机构中无往复运动的原动件,因此机构不会被顶死。但随着机构的传动角逐渐趋于零,机构的传动性能变坏,机构向外输出力(矩)和对外做功的能力逐渐丧失。当机构传动角等于零时,从动曲柄可能向正、反两个方向中的任意一个方向运动。增大从动曲柄的转动惯量,可以解决从动曲柄运动方向不确定的问题。如果采用多套机构错位排列(即增加虚约束构件),既能解决从动曲柄运动方向不确定的问题,又能改善机构的传力性能(图 2-78b)。

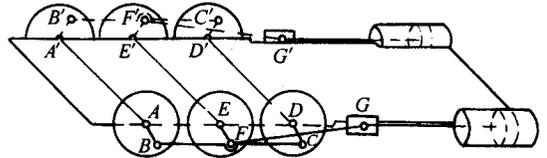


图 2-77 多套机构的错位安装

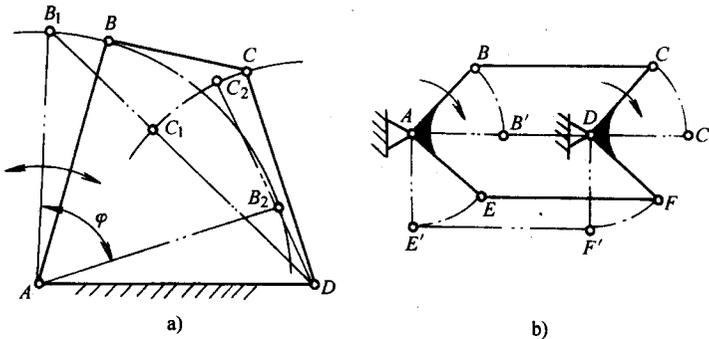


图 2-78 机构的死点及运动不确定性

a) 双摇杆机构的死点位置 b) 平行四杆机构的错位结构

三、平面连杆机构的静力学分析

在分析机构由其结构所确定的传力特性和原动力的有效利用程度或力的增益时,一般可以采取不考虑动力的静力分析方法。对于运动速度较低的机械,在分析其受力状况,计算各构件及运动副元素中所受的力时,也可用静力平衡的分析方法。因此静力分析仍是连杆机构受力分析的一个基本内容,也是动力分析的基础。

静力分析已在力学中作了详细的介绍。在此我们将针对连杆机构这一具体工程对象,讨论如何更方便地建立实用的力分析模型的方法,以进一步了解机构的受力分析过程和传动效率计算方法以及受力分析的应用。

平面连杆机构受力分析方法主要有图解法和解析法。图解法比较简单,也有

一定的分析精度，在一般工程问题中有一定的适用性。此外，弄清图解法的分析过程，有助于加深对解析法的理解。本节主要介绍静力分析的图解法。

(一) 连杆机构忽略摩擦时的静力分析

通常，力分析是取单个构件为示力体来进行的，采用图解法时，不仅作图工作量大，还会反复作那些大小相等、方向相反的作用力和反作用力。由于平面连杆机构中仅有转动副和移动副，在不计摩擦的条件下，转动副中的约束反力的作用点是通过回转中心的，仅大小、方向两个量未知；移动副中的约束反力方向是垂直导轨的，仅大小和力的作用点位置两个量未知，故在有 P_L 个低副的连杆机构中，共有 $2P_L$ 个力的未知量。根据力的平衡条件，一个构件可以列出 3 个力的平衡方程，有 n 个可动构件的连杆机构，共可列出 $3n$ 个力的平衡方程。如果 $2P_L$ 个待求参数可以全部解出，则应有

$$3n - 2P_L = 0$$

而这一条件正好也是基本杆组的结构条件，就是说：作用于基本杆组上的力是静定的，以基本杆组作力多边形，其力多边形是封闭的。因此，连杆机构在进行力分析时，可以采用以基本杆组为示力体，从而可以使作图求解过程更加简洁、清楚，也有利于提高分析精度。

图解法是通过作基本杆组受力的力封闭多边形，来求未知力的大小和方向的。因为作用在基本杆组上力的方向总是与基本杆组各构件的位置密切相关的，为了使分析结果更加准确，必须先准确地画出机构运动简图及各基本杆组图。其次，应选择合适的力比例尺，使力多边形的图形大小适度，便于计量。力比例尺 μ_F 的单位是 (a N/mm)，即图上每毫米长度代表 a 牛顿力。

例 2-12 图 2-79a 所示为用长度比例尺 μ_l 画出的四杆机构 ABCD，原动件 AB 上作用有驱动力矩 M_d 使原动件匀速运动，从动杆 CD 上在 E 点作用有阻力 Q。要求用图解法在不考虑运动副中的摩擦、重力和惯性力时，求各运动

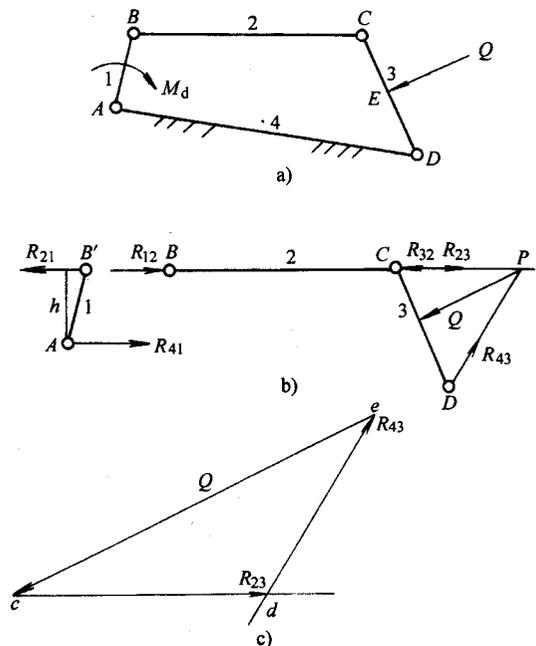


图 2-79 铰链四杆机构的静力分析

a) 机构运动简图及受力 b) 基本杆组及原动件的受力分析 c) 力封闭多边形

副中的约束反力及原动件上的驱动力矩 M_d 的大小。

解

该机构是由一个 I 级基本杆组组成的 II 级机构，画出原动件和 I 级基本杆组如图 2-79b 所示。

作用在基本杆上的三力 R_{12} 、 Q 和 R_{43} 应汇交于一点。因构件 2 为无力偶作用的二力构件，作用在构件 BC 上的二力 R_{12} 与 R_{32} 共线通过 \overline{BC} ，故基本杆组 BCD 上的三个力 R_{12} 、 Q 和 R_{43} 应汇交于 Q 与 BC 杆延长线的交点 P 上，从而确定出三力的作用线。选用力比例尺 μ_F 画出 Q ，过 Q 的两端作 R_{23} 和 R_{43} 力的平行线得出力封闭三角形 Δcde 如图 2-79c 所示，故

$R_{12} = R_{23} = \overline{cd} \mu_F$ ，方向：沿 BC 杆向右； $R_{43} = \overline{de} \mu_F$ ，方向：由 D 指向 P 。

在原动件上 B' 点作 R_{12} 的平行矢量 R_{21} ，量得 R_{21} 至 A 的距离为 h ，则：

$M_d = R_{12} h \mu_F = \overline{cd} \mu_F h \mu_l$ ，

$R_{41} = R_{12}$ 。 R_{41} 与 R_{21} 大小相等，平行而方向相反。

(二) 考虑摩擦的静力分析

对于受力比较简单的平面连杆机构，掌握了转动副、移动副中总反力的作图方法，就不难对平面连杆机构作计入摩擦时的静力分析。在机构的同一运动位置，分别作出计入和忽略摩擦时的图解计算结果代入效率计算公式，就可以求出机构在该运动位置时的传动效率。下面举例说明其分析过程。

例 2-13 在图 2-80a 所示的曲柄滑块机构中，已知各构件尺寸，各转动副的半径和当量摩擦系数以及滑块与导路间的摩擦系数。设不计各构件的自重和惯性力，求在图示位置当滑块上作用有生产阻力 Q 时，原动件上

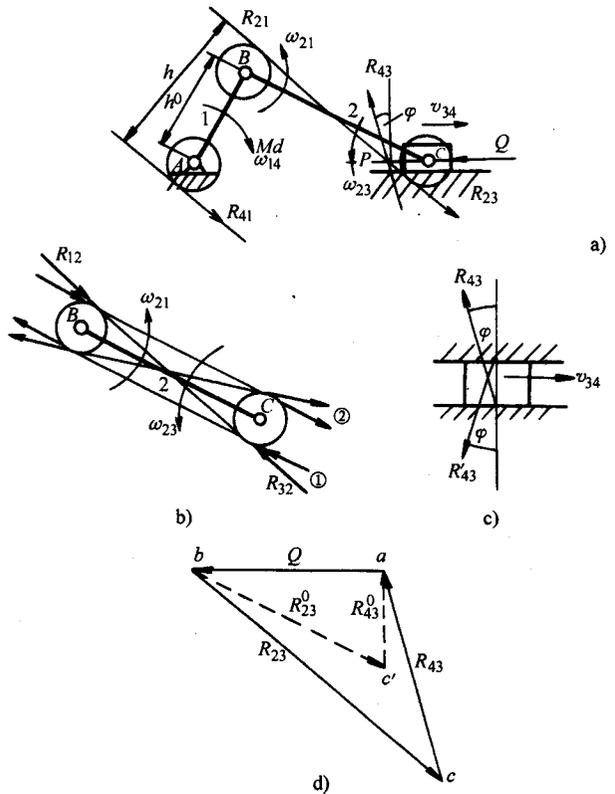


图 2-80 考虑摩擦时曲柄滑块机构的受力分析
a) 机构运动简图及受力分析 b) 连杆上约束反力方向的分析 c) 机架作用于滑块的约束反力方向的分析
d) 用力封闭多边形计算机构的传动效率

的驱动力矩 M_d ，并求该位置机构的效率。

解

1) 在图纸上选择适当的长度比例尺 μ_l 准确地画出机构在该位置时的机构运动简图；画出生产阻力 Q 的作用点及方向，根据式 (2-19) 算出各转动副的摩擦圆半径，并在机构图上画出这些摩擦圆。

2) 用虚位移法确定在 M_d 驱动下各构件间的相对运动方向。所谓虚位移法即假定原动件沿驱动力（矩）的作用方向运动一个微小位移，分析各运动副联接的两构件间位置或角位置的变化，从而确定出两构件间的相对运动速度或相对角速度方向的方法。用转动副联接的 1、2 构件如果夹角 φ 变大，则 ω_{12} 、 ω_{21} 的方向是使两构件夹角变大的方向转动；用移动副联接的 1、2 构件，构件 1 相对构件 2 的位移的方向即 v_{12} 的方向。

从图 2-80 中容易看出：在 M_d 的驱动下， $\angle ABC$ 变大，故 ω_{21} 的方向为逆时转动（ ω_{21} 和 ω_{12} 中只需确定一个即可）。 $\angle BCA$ 变小，故 ω_{23} 的方向为逆时转动。滑块向右移，故 v_{34} 水平向右。

3) 作计入运动副中的摩擦时各构件上的约束反力及力的作用线。

曲柄上作用有 R_{21} 、 R_{41} 、 M_d ，为有力偶矩作用的二力构件，故 R_{21} 、 R_{41} 平行、方向相反，形成的力偶与 M_d 大小相等，方向相反。

连杆上仅作用有 R_{12} 、 R_{32} ，故二力共线，因连杆受压， R_{12} 、 R_{32} 力矢量的箭头方向相对。

滑块上作用有 R_{23} 、 R_{43} 、 Q ，因无力偶矩作用，三力应汇交于一点。

为了确定作用在滑块上三力的汇交点，图解过程从无力偶矩作用的二力构件开始。根据 R_{ij} 切于摩擦圆，且阻碍 ω_{ij} 转动的特点，得出连杆上 R_{12} 与 R_{32} 应分别切于铰链 B 、 C 处的摩擦圆共线，且 R_{12} 阻碍构件 2 沿 ω_{21} 转动， R_{32} 阻碍构件 3 沿 ω_{23} 转动的受力情况如图 2-80b 所示有四种可能。其中只有①、②两种受力情况可以构成平衡力系，根据连杆受压可以确定：作用于连杆上的总反力 R_{12} 、 R_{32} 的作用线如图 2-80b 中①线所示。在机构运动简图上画出 R_{12} 和 R_{32} 。

再分析滑块受力。因 R_{23} 和 R_{32} 是一对大小相等、方向相反的约束力与约束反力，故 R_{23} 的方向与力的作用线已知，作出 R_{23} 的作用线与 Q 力作用线的交点 P ， R_{43} 也应汇交于 P ，因 R_{43} 与 v_{34} 夹 $90^\circ + \varphi$ 角有两种可能方向如图 2-80c 所示，通过作力封闭多边形知， R_{43} 方向应向上与 v_{34} 夹 $90^\circ + \varphi$ 角。选用力比例尺 μ_F 作滑块上三力平衡的力封闭三角形可确定 R_{43} 、 R_{23} 的大小及方向如图 2-80d 所示。

最后画曲柄的受力图。曲柄上 R_{41} 应切于铰链 A 处的摩擦圆，方向为阻碍 ω_{14} 转动并与 R_{21} 平行， R_{41} 与 R_{21} 方向相反构成力偶与 M_d 平衡。从而可以确定出 R_{41} 切于铰链 A 处的摩擦圆下端。因为 $R_{21} = R_{12} = R_{32} = R_{23}$ ，故 $M_d = \overline{bc} \mu_F h \mu_l$ 。

式中 h —— R_{41} 与 R_{21} 的距离。

4) 作不计摩擦时的机构受力分析图。

当不计摩擦时机构中的摩擦圆半径和摩擦角均为零, 故连杆上二力共线, 方向与连杆方向相同。滑块上三力应汇交于 C 铰链点, R_{43} 过 C 点铅垂向上。 R_{41} 应过 A 铰链点, 方向与连杆 BC 平行。量得 A 与连杆的距离为 h^0 。

在计入摩擦时的 Q 、 R_{43} 、 R_{23} 的力封闭三角形中 (图 2-80d), 过 Q 矢量的两端分别作连杆的平行线和滑块导路的垂线交于 c' 点, 则求出在工作阻力 Q 不变的条件下不计摩擦时的总反力 $R_{23}^0 = \overline{bc'} \mu_F$, 因为 R_{21}^0 与 R_{23}^0 大小相等, 故不计摩擦时机构的驱动力矩为:

$$M_d^0 = \overline{bc'} \mu_F h^0 \mu_1$$

根据效率的计算公式

$$\eta = \frac{M_d^0}{M_d}$$

所以, 机构在该瞬时的机械效率为

$$\eta = \frac{\overline{bc'} h^0}{\overline{bch}}$$

例 2-14 在图 2-81 所示双滑块机构中, 已知 $AB = l$, 转动副的半径为 r , 其当量摩擦系数为 μ_0 , 滑块与导路间的摩擦系数为 μ 。不计各构件的重力, 求机构在 P 力作用下自锁的条件。

解

根据式 (2-19) 算出转动副的摩擦圆半径 ρ , 并在转动副 A 、 B 上绘出两摩擦圆。分析连杆 AB 的受力, 并画出滑块 3 上所受力 R_{23} (即转动副 B 中的总反力) 如图 2-81 所示, 若 R_{23} 作用于滑块的摩擦角内, 机构将发生自锁, 即

$$\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \varphi$$

因为

$$\alpha = \beta + \gamma = \arccos\left(\frac{x}{l}\right) + \arcsin\left(\frac{2\rho}{l}\right)$$

所以

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x}{l}\right) + \arcsin\left(\frac{2\rho}{l}\right) \geq \frac{\pi}{2} - \arctg\mu$$

整理得

$$x \leq l \cos \left[\frac{\pi}{2} - \arctg\mu - \arcsin\left(\frac{2r\mu_0}{l}\right) \right] = l \sin \left[\arctg\mu + \arcsin\left(\frac{2r\mu_0}{l}\right) \right]$$

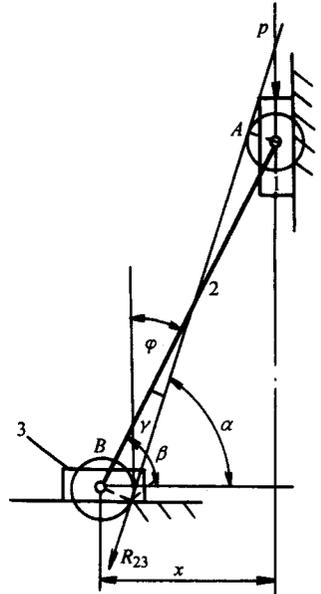


图 2-81 双滑块机构考虑摩擦时的受力分析

即：当铰链 B 与铰链 A 在水平方向上的距离 x 小于或等于 $l \sin \left[\arctg \mu + \arcsin \left(\frac{2r\mu_0}{l} \right) \right]$ 时，机构将自锁而不会侧滑。从式中可知：加大 A 、 B 铰链的轴径，可以进一步增大不侧滑的距离 x 。

四、根据受力分析合理地选择和设计平面连杆机构

机构是传递、变换运动和力的装置。运动和力（力矩）在机构的工作过程中，既相互联系、相互影响，而作为机构的工作性能指标又是相对独立的。常常会出现设计出的机构在运动学上是满足的，而其传动角、机械效率可能是不理想的。因此在选择和设计机构时，必须注意分析和校核其力的传递和变换特性。如传动角、压力角、摩擦与效率、承载能力与寿命，以及在后面将要研究的动力学性能等，结合机构的运动、受力和结构等多方面要求进行综合分析，才能获得最有实用价值的设计结果。

例如，在设计牛头刨床的切削运动机构时，根据设计对刨刀提出作急回运动的要求，我们在第二节中曾从有急回特性的机构中选出了三种机构设计方案如图 2-36 所示，但哪一种方案更好呢？由图 2-72 知：偏置式曲柄滑块机构的最小传动角 $\cos \gamma_{\min} = \frac{a+e}{b}$ ，显然减小曲柄长 a 和偏距 e ，增大连杆长 b 有利于增大 γ_{\min} ，但减小 e ，由图 2-40 知：机构的极位夹角 θ 将减小，机构的急回特性变差。减小 a ，滑块的行程将变小；增大 a ，要保持机构的最小传动角较大，则必须加长 b ；而增大 b ，则机构的尺寸将变大，机构质量产生的惯性力和惯性力矩将变得更大，而连杆机构的惯性力和惯性力矩通常是很难实现完全平衡，从而使机构的运动和动力学性能变差。因此，偏置式曲柄滑块机构作为牛头刨床切削运动机构不理想。再比较图 2-36 所示曲柄摇杆机构、摆动导杆机构与摇杆滑块机构的组合机构方案，通过对两个方案受力分析进行比较可得出结论：由导杆机构组成的方案 b 比由曲柄摇杆机构组成的方案 a 更好，其理由是：

1) 方案 b 中机构的传动角 γ 大，并且始终为 90° ，而方案 a 的传动角是随机构运动不断变化的。方案 b 的传动性能更好。

2) 方案 b 机构占用的运动空间更小，其运动构件产生的惯性力和惯性力矩更容易实现完全平衡，有利于机构的平稳运动；有利于改善构件的受力；有利于减轻机构的振动与冲击；从而有利于提高机构的使用寿命，降低生产制造成本。

对方案 b 作进一步的受力分析还可以确定：滑块的导轨应位于导杆摆动弧线的顶点和两极限点 $c-c$ 连线的中间，并与 \overline{cc} 连线平行（图 2-82），因为这样可以保证滑块在运动中压力角的最大值最小；滑块应采用实线所示的连杆与导杆相联（假设工作阻力如图所示），从而可以避免如虚线所示的连杆在工作时受压造成压

杆失稳引起的振动，有利于提高切削质量。

在牛头刨床切削运动机构的方案设计中，将曲柄置于摆动导杆的中部，从而用较小尺寸的曲柄获得了滑块较大的工作行程。如果将此机构设计方案用于工作行程较小的插床时，采用力杠杆的原理将曲柄置于图 2-83 所示导杆的另一端，从而可以利用杠杆的增力作用，用较小功率的原动机使机构产生较大的切削力。

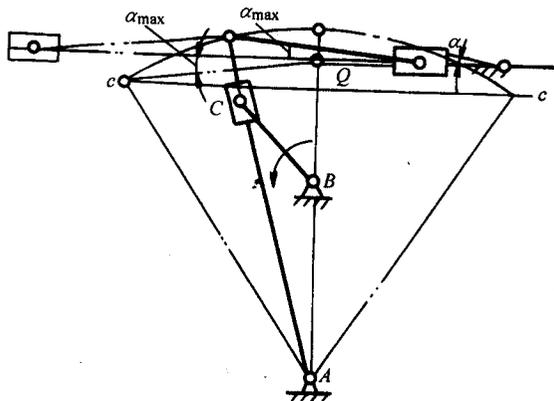


图 2-82 牛头刨机构按传力特性的设计

在进行机构设计时，通常总是将设计任务中的运动要求（实现运动规律、传动函数、轨迹和刚体导引要求）放在第一位。而同等重要的是：也要求机构运转平稳；传动角大、机构的

传力性能好；运动副受力小、机构寿命长；构件受力好、机构重量轻、电动机输入力矩波动小、以及机构运动的能耗小、占用空间小和造价低等等。要完全实现上述各项目标，需要对机构进行复杂的优化设计，于是设计者在设计时必须面临抉择：是对机构进行全面的或部分的优化设计；或是主要考虑一个设计要求或是兼顾几个设计要求。抉择的主要依据应该是机构的应用目的以及由此确定的技术要求。例如：选择设计一个曲柄

摇杆机构，用于图 2-84 所示的剪切连续运动薄钢带的剪切机构时，在满足刀刃运动轨迹水平速度分量近似匀速的条件下，受力分析及动力设计应当主要保证：机构的传力性能好、运行平稳。如果将曲柄摇杆机构用于汽车的雨刮器，这时机构执行构件运动的不均匀性对

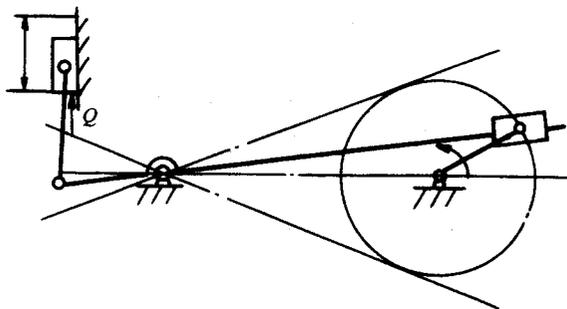


图 2-83 小型插床导杆机构

刮雨并不起重要的影响，而雨刮器的使用寿命是需要主要考虑的，于是设计者应通过对机构的受力分析，找出减小运动副受力的措施，使机构能有较长的使用寿命。如果将曲柄摇杆机构用于图 2-23a 所示的颚式碎石机中，这时设计者应当考虑的主要设计内容是：如何提高机构抗冲击和振动的能力，如何改善电动机输出力矩的巨大波动使机构平稳地运行。

从改善机构受力方面考虑,在选择和设计机构时应注意以下一些问题:

1) 所选择的机构的结构应尽可能简单。机构构件数量愈少,运动副也愈少,运动累积误差愈小,运动副的摩擦磨损愈小,能耗也愈少,传动效率愈高,制造成本愈低。当选择输出运动作往复直线运动的机构时,可考虑直接采用气、液压缸来实现往复直线运动,从而可以省去运动变换机构,简化系统结构。

2) 在能满足运动要求的条件下应尽可能地缩小机构体积和尺寸,缩小构件的运动空间,从而降低生产成本,减少机构的能耗与动负荷。

3) 注意机构中运动副类型对机构动力性能的影响。转动副制造容易,容易保证运动精度,效率较高。若采用标准轴承,更容易实现高精度、高效率、高灵敏度、标准化和系列化。

移动副实现高精度配合较困难,由于沿导轨方向需有必要的长度,因此,体积、重量较大。滑动摩擦的移动副效率相对较低,对润滑要求较高,设计制造不好还容易产生楔紧和爬行等问题。此外,滑块在往复直线运动中产生的惯性力要实现完全平衡比较困难。

在移动滑块上的转动副与导路形成的偏距 e (图 2-85) 对机构的运动在一般情况下没有影响,但对机构的受力会带来不同程度的影响。例如图 2-85 所示曲柄滑块机构,铰链 C 与导轨形成偏距 e 以后,滑块上将受到一个力矩的作用,滑移副中的摩擦将增大。

4) 作平面运动构件难以实现惯性力和惯性力偶矩的完全平衡,应尽量减小其质量与转动惯量。较大偏心质量的回转构件、较大质量的往复直线运动的构件,在运动时,尤其是在变速、高速运动时,容易使机构产生振动与冲击。实验表明:运动副中的反力迅速改变在达到峰值时,机构将产生强烈振动,在无法避免时应采取降低输入转速,以避免共振范围;安装平衡质量或平衡机构;改变机构尺寸以减小加速度峰值;减小运动副过大的间隙以避免冲击;安装飞轮以减轻原动机输入转矩的波动;选择其他的机构方案等方法来尽量减轻机构在运动中可能产生的振动与冲击,提高机构运动和工作质量。

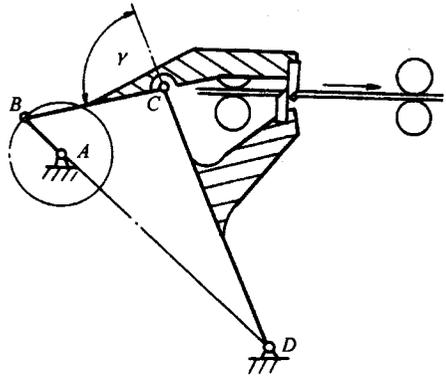


图 2-84 剪切机构

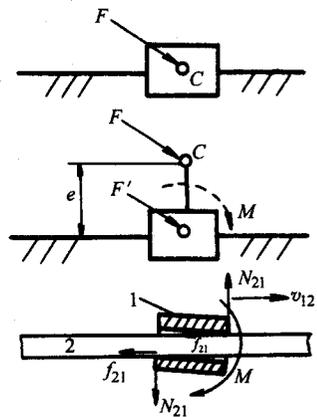


图 2-85 移动副受力分析

在上述分析中，我们谈到机构设计的一些动力学问题，例如：机构惯性力（矩）的平衡；飞轮的安装；原动机输入转矩波动的平衡；机构的振动、冲击等问题，有关这些内容将在机械动力学一章中作进一步详细讨论。

第四节 平面四杆机构综合的内容与方法

平面四杆机构综合的基本问题是：根据设计要求选定平面四杆机构的类型，并确定出所选平面四杆机构运动简图尺寸参数。

平面四杆机构的综合内容可以归纳为以下三类问题：

1) 满足位置要求或运动规律要求。例如：要求连杆按一定的位姿顺序运动；要求两连架杆转角满足给定的传动函数关系。

2) 实现给定的轨迹曲线要求。

3) 满足综合运动要求。不少机构根据其工作需要，既有运动规律的要求，又有轨迹曲线的要求。例如图 2-84 所示的剪切机构，既要求上下剪刀完成一定形状的轨迹，以满足剪断一定厚度钢板的要求，同时还要求在进入剪切区时，其水平分速度与钢板的运动速度相等，以满足同步要求，甚至还会有传动角及尺寸范围的要求等等。

本章将就以下的平面四杆机构综合问题进行讨论，这些内容包括：

1) 刚体导引机构的综合。

2) 两连架杆实现预期运动规律机构的综合，即函数发生机构的综合。

3) 有急回运动要求机构的综合。

4) 实现运动轨迹曲线机构的综合，即轨迹发生机构的综合。

平面四杆机构的综合方法主要有：

(1) 图解法。图解法直观、易懂，能满足精度要求不高的设计。图解法能将解析法的理论形象化，有助于对解析法的理解。图解法也能为需要优化求解的解析法提供必要的计算初值。因此，本章将有选择地介绍几种图解综合方法。

(2) 解析法。解析法是根据给定的运动参数，建立起机构运动简图参数与运动参数之间的关系式，再根据机构的运动及几何约束条件来建立机构的综合方程组，求解此方程组，以解出机构运动简图参数的一种方法。由于机构综合方程组通常为多维非线性方程组，一般均需借助计算机求其数值优化解。虽然这种方法和求解过程相对图解法较为复杂，但所获得的设计结果较为精确，更重要的是：它能结合机构的综合过程，解决一些其他设计方法无法解决的问题，例如：机构的优化设计、机构的精度分析等等。因此，这种方法是当前和未来机构综合的主要方法，也是本章讨论的重点。

(3) 实验法。实验法是用实物模型，通过重演设计要求来确定机构运动简图

参数。这种方法在解决某些比较复杂的设计时，例如：近似实现轨迹曲线、引导刚体按四位姿顺序运动等设计中，也十分有效。因此，实验法仍不失为一种有用的机构综合方法。有关这部分内容将留给实验课去研究。

一、平面四杆刚体导引机构的综合

平面四杆刚体导引机构综合的要求是：设计一平面四杆机构，使其连杆在作平面运动时能够引导刚体按给定的若干位姿顺序运动。

刚体的运动位姿通常用刚体上一点 P （称为标点）的有限个位置坐标 (x_{Pi}, y_{Pi}) 和过标点的直线（称为标线）的位置角 θ_i （称为标角） $(i=1, 2, \dots, n)$ 给出。

例如：在矿山采掘、仓库码头连续装载散粒物料的蟹爪式装载机的设计中，要求在传送带输入端两旁对称布置两个曲柄错位 180° 的扒取四杆机构 $ABCD$ 如图 2-86 所示。要求：当曲柄连续转动时，连杆的伸出端 P 点能仿“蟹爪”作图示的扒取运动，并要求：

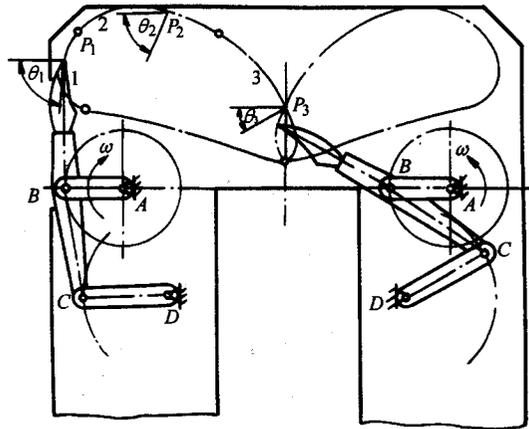


图 2-86 蟹爪式装载机

1) 当扒爪在轨迹曲线上的标点 P_1 点（坐标为 x_1, y_1 ）插入料堆，扒爪这时的标线与水平方向的夹角，即标角 θ_1 最好接近 90° ，以减少扒爪插入物料时的阻力。

2) 为了有效地扒集物料，扒爪在轨迹曲线上的标点 P_2 点（坐标为 x_2, y_2 ）的标角 θ_2 最好为 65° 。

3) 为了将扒取出来的物料尽可能多地推入传送带中，扒爪在轨迹线上的标点 P_3 点（坐标为 x_3, y_3 ）的标角 θ_3 最好为 40° 。

如何根据上述的设计要求，综合出能满足设计要求的导引机构，是本节讨论的主要内容。

刚体导引机构的综合可以采用图解法或解析法。当刚体位姿要求在三个以上（但不超过五个）、设计精度要求较高时宜采用解析法。

（一）刚体导引机构综合的图解法

图 2-87a 示出了用标点的三个位置 P_1 、 P_2 和 P_3 以及标线的三个标角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 给出的刚体运动时的三个位姿，要求设计一平面四杆机构 $ABCD$ ，使固接在连杆上的刚体在运动时，能顺序实现这三个位姿。

由于对铰链四杆机构的四个铰链点 A 、 B 、 C 、 D 的位置未作要求，故连杆上 B 、 C 铰链位置可以任意选定。直接以标线位置作为连杆位置，以 P 点作为 B 铰链点，在标线上任取 C 铰链位置；按 $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}$ 分别确定出 B 、 C 铰链随

连杆运动时的三组对应位置。由于与 B 、 C 铰链相联的两连架杆分别以 A 、 D 为圆心作圆周运动，故过 B_1 、 B_2 、 B_3 和 C_1 、 C_2 、 C_3 分别作圆心，即求出 A 、 D 铰链的位置，连接 AC_1B_1D 得到所综合的四杆机构在起始位置时的机构运动简图参数。由于 B 、 C 铰链位置是任选的，所以满足给出三个刚体运动位姿的平面四杆机构有无穷多综合结果。例如：如果 B 、 C 铰链不直接在标线上选取，可在与标线位置相对固定的其他任意直线上选取如图 2-87b 所示的 $\overline{B_1C_1}$ ，以 $\overline{B_1C_1}$ 为引导机构连杆的第一位置，按图形全等的方法作出连杆的另外两个运动位置 $\overline{B_2C_2}$ 、 $\overline{B_3C_3}$ ，再用过三点求作圆心的方法，即可综合出能满足导引刚体通过三位姿运动的另一个平面四杆机构。

如果设计要求只给出刚体运动的二个位姿，因 A 、 D 铰链可以分别在 $\overline{B_1B_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 的垂直平分线处任选，故能满足设计要求的平面四杆机构有无穷多个。

从图 2-87 所示刚体导引机构的综合过程，可以得到这类机构综合的目标是：在作平面运动刚体上寻找这样一些特殊位置的点，它们在随刚体按有限个给定位姿运动时，其运动轨迹上对应的有限个位置点能分布在同一半径的圆上。刚体上能满足这一运动条件的点称为“圆周点”，圆周点的圆心称为“中心点”。当以圆周点作为连杆与连架杆的铰链点时，中心点即为连架杆与机架的铰链点。因此，刚体导引机构的综合，可以归结为求平面运动刚体上的圆周点和与其对应的中心点问题。

当要求刚体按 2~3 个给定的位姿运动时，可以在刚体上任意选择一点（如图 2-87 中的 B 、 C 点）作为圆周点，在确定了它们在运动中对应的位置后，便可以通过求圆心的方法求出中心点的位置。当要求刚体按 4~5 个给定位姿运动时，就不能在刚体上任选一点作为圆周点，这时只能采用运动几何学法、实验法或解析法来求圆周点。理论上可以证明：刚体按 4 个要求的位姿运动时，刚体上能满足运动要求的圆周点仍有无穷多组（2 个圆周点为 1 组）；而刚体按 5 个要求的位姿运动时，刚体上的圆周点可能有 2 组、1 组或者没有。下面我们来讨论如何用解析法进行刚体导引机构的综合。

（二）刚体导引机构综合的解析法

用解析法综合平面四杆机构，首先须建立机构综合方程，建立平面四杆机构

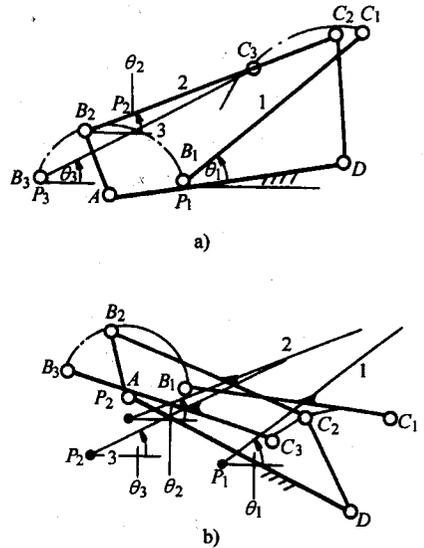


图 2-87 给定刚体运动三个位姿综合的图解法

- a) B 、 C 铰链在标点和标线上任意选取
- b) B 、 C 铰链在标线以外的位置任意选取

综合方程的方法主要有两种：

其一，是以各杆的长度和结构角为待求运动参数，以各杆形成满足给定要求的封闭向量多边形为约束条件来建立机构的综合方程。其二，是以各运动副位置坐标为待求运动参数，以杆长不变为约束条件来建立四杆机构的综合方程。两种方法各有其优缺点，但第二种方法适用性更强，所以本章主要介绍第二种方法。

以运动副位置坐标来建立综合方程的基本思路是：首先建立以标点 P_i 坐标和标角 θ_i 确定的平面运动刚体上的任意铰链点 B ，从 B_1 位置运动到 B_i 位置的一系列坐标 (x_{B_i}, y_{B_i}) ，并将 B_i 位置的坐标均表示为 B_1 位置坐标的函数，以杆长不变为约束条件，将 B_1, B_2, \dots, B_i 约束在以 A 为圆心的圆上得约束方程，展开该约束方程，即可得包含给定运动要求 (P_i, θ_i) 和待求机构简图参数 (x_{B_1}, y_{B_1}) (圆周点) 和 (x_A, y_A) (圆心点) 的机构综合方程。

当要综合含有移动副的平面连杆机构时，其 B_1, B_2, \dots, B_i 点的约束方程将不是圆，而是过某一点的一条直线(定向直线或动直线)，从而可以建立起相应的机构综合方程。为此，我们首先来研究随刚体运动的任意点 B 的有限运动位置点的坐标 (x_{B_i}, y_{B_i}) 与起始运动位置点的坐标 (x_{B_1}, y_{B_1}) 之间的相对位移关系式，并且把这些点与点之间的位移关系用给定标点的坐标 (x_{P_i}, y_{P_i}) 和标线相对角位移 $(\theta_i - \theta_1)$ 为元素的矩阵来表示，这个矩阵称为刚体位移矩阵。刚体位移矩阵是建立机构综合方程的基础。下面我们首先来推导作平面运动刚体上任意一点从 1 位置运动到 i 位置的刚体位移矩阵方程。

1. 刚体位移矩阵方程 一个作平面运动的刚体从位置 1 运动至位置 i ，可以看成是由平移和绕定点转动的合成(图 2-88a)。为此，我先分别讨论刚体平移矩阵方程和刚体绕定点转动的位移矩阵方程。

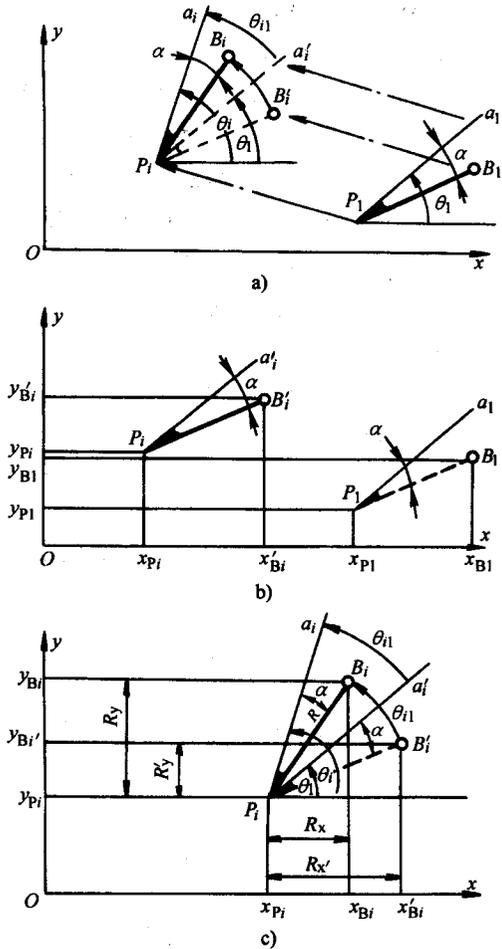


图 2-88 刚体的平面运动

a) 刚体平面运动 b) 刚体平移 c) 刚体绕定点转动

(1) 刚体平移矩阵方程。(图 2-88b) 示出了刚体由 1 位置平移到 i' 位置。图中: P 为标点; \overline{Pa} 为标线。 B 为刚体上任取的铰链点 B 。当标线由 $\overline{P_1a_1}$ 平移至 $\overline{P_i a'_i}$ 时, $\overline{P_1 B_1}$ 也相应平移至 $\overline{P_i B'_i}$ 。从图中容易得出 B_1 位置的坐标与 B'_i 位置坐标存在着如下关系:

$$\left. \begin{aligned} x_{B'_i} &= x_{B_1} + (x_{p_i} - x_{p_1}) \\ y_{B'_i} &= y_{B_1} + (y_{p_i} - y_{p_1}) \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式得刚体平移位移矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} x_{B'_i} \\ y_{B'_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{p_i} - x_{p_1} \\ 0 & 1 & y_{p_i} - y_{p_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

(2) 刚体绕定点转动的刚体位移矩阵方程。在图 2-88c 中, 刚体绕定点 P_i 转动, 标线由 $\overline{p_i a'_i}$ 转动到 $\overline{p_i a_i}$, 铰链点 B'_i 点也相应转到 B_i 点。 $\overline{p_i a'_i}$ 的标角为 θ_1 , $\overline{p_i a_i}$ 标角为 θ_i , 刚体从位置 1 到位置 i 的相对角位移为 $\theta_{i1} = \theta_i - \theta_1$ 。设 B 点到 P 点的距离为 R , $\overline{p_i B'_i}$ 在刚体运动平面坐标系 $O-xy$ 中 x 、 y 轴上的投影分别为 R'_x 、 R'_y ; $\overline{p_i B_i}$ 在 x 、 y 轴上的投影分别为 R_x 、 R_y 。由图 2-88c 可得:

$$\left. \begin{aligned} x_{B_i} &= x_{p_i} + R_x \\ y_{B_i} &= y_{p_i} + R_y \end{aligned} \right\} \quad (2-32)$$

设 $\overline{P_i B_i}$ 与 $\overline{P_i a_i}$ 间的夹角为 α , 则

$$\left. \begin{aligned} R_x &= R \cos(\theta_1 + \theta_{i1} - \alpha) = R \cos(\theta_1 - \alpha) \cos \theta_{i1} - R \sin(\theta_1 - \alpha) \sin \theta_{i1} \\ &= R'_x \cos \theta_{i1} - R'_y \sin \theta_{i1} \\ R_y &= R \sin(\theta_1 + \theta_{i1} - \alpha) = R \sin(\theta_1 - \alpha) \cos \theta_{i1} + R \cos(\theta_1 - \alpha) \sin \theta_{i1} \\ &= R'_y \sin \theta_{i1} + R'_x \cos \theta_{i1} \end{aligned} \right\}$$

因为
所以

$$R'_x = x_{B'_i} - x_{p_i}, \quad R'_y = y_{B'_i} - y_{p_i}$$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= (x_{B'_i} - x_{p_i}) \cos \theta_{i1} - (y_{B'_i} - y_{p_i}) \sin \theta_{i1} \\ R_y &= (y_{B'_i} - y_{p_i}) \sin \theta_{i1} + (x_{B'_i} - x_{p_i}) \cos \theta_{i1} \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

将式(2-33)代入式(2-32)中整理可得

$$\left. \begin{aligned} x_{B_i} &= x_{B'_i} \cos \theta_{i1} - y_{B'_i} \sin \theta_{i1} + (1 - \cos \theta_{i1}) x_{p_i} + \sin \theta_{i1} y_{p_i} \\ y_{B_i} &= y_{B'_i} \sin \theta_{i1} + x_{B'_i} \cos \theta_{i1} + (1 - \cos \theta_{i1}) y_{p_i} - \sin \theta_{i1} x_{p_i} \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

将式(2-34)写成矩阵形式, 得刚体上 B 点绕定点 P 转动 θ_{i1} 角的位移矩阵方程

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & (1 - \cos \theta_{i1}) x_{p_i} + \sin \theta_{i1} y_{p_i} \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & (1 - \cos \theta_{i1}) y_{p_i} - \sin \theta_{i1} x_{p_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B'_i} \\ y_{B'_i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

(3) 刚体作平面运动位移矩阵方程。将式(2-31)代入式(2-35)中, 得刚体上铰

链 B 从 B_1 位置作平面运动至 B_i 位置的位移矩阵方程

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & -\sin\theta_{i1} & (1-\cos\theta_{i1})x_{p_i} + \sin\theta_{i1}y_{p_i} \\ \sin\theta_{i1} & \cos\theta_{i1} & (1-\cos\theta_{i1})y_{p_i} - \sin\theta_{i1}x_{p_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{p_i} - x_{p_1} \\ 0 & 1 & y_{p_i} - y_{p_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

整理可得:

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & -\sin\theta_{i1} & x_{p_i} - x_{p_1}\cos\theta_{i1} + y_{p_1}\sin\theta_{i1} \\ \sin\theta_{i1} & \cos\theta_{i1} & y_{p_i} - x_{p_1}\sin\theta_{i1} - y_{p_1}\cos\theta_{i1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

令

$$[P]_{i1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & -\sin\theta_{i1} & x_{p_i} - x_{p_1}\cos\theta_{i1} + y_{p_1}\sin\theta_{i1} \\ \sin\theta_{i1} & \cos\theta_{i1} & y_{p_i} - x_{p_1}\sin\theta_{i1} - y_{p_1}\cos\theta_{i1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

$[P]_{i1}$ 称为作平面运动刚体从位置 1 运动到位置 i 的位移矩阵。位移矩阵中的所有元素均以刚体上标点 P 的坐标和标线的相对角位移 θ_{i1} 表示, $\theta_{i1} = \theta_i - \theta_1$, θ_1 、 θ_i 均以逆时针方向为“+”, 计算时都应计及其正、负号。如果已知标点和标线在位置 1 和位置 i 的坐标和标角, 矩阵中各元素的值可全部求出。采用式 (2-37) 后, B 点从位置 1 随刚体作平面运动到位置 i 的位移矩阵方程式可以简单表示为:

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

展开后得

$$\left. \begin{aligned} x_{B_i} &= f_1(x_{B_1}, y_{B_1}) \\ y_{B_i} &= f_2(x_{B_1}, y_{B_1}) \end{aligned} \right\}$$

由于 B 是在作平面运动刚体上任选的点, 如果在同一刚体上任选另一点 C , 同样有:

$$\begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

展开后得

$$\left. \begin{aligned} x_{C_i} &= f_1(x_{C_1}, y_{C_1}) \\ y_{C_i} &= f_2(x_{C_1}, y_{C_1}) \end{aligned} \right\}$$

2. 刚体导引机构综合方程及求解方法 当给定了作平面运动的刚体从位置 1 运动到位置 i 刚体上标点的坐标和标线的标角, 刚体位移矩阵中各元素的值可全部求出, 于是刚体上铰链 B 、铰链 C 在 i 位置的坐标可用其在 1 位置时的坐标表示

为

$$\left. \begin{aligned} x_{B_i} &= f_{i1}(x_{B1}, y_{B1}) \\ y_{B_i} &= f_{i2}(x_{B1}, y_{B1}) \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-38)$$

和

$$\left. \begin{aligned} x_{C_i} &= f_{i1}(x_{C1}, y_{C1}) \\ y_{C_i} &= f_{i2}(x_{C1}, y_{C1}) \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-39)$$

如果所讨论的刚体就是四杆机构 $ABCD$ 的连杆 BC , 则 B_1, B_2, \dots, B_i 点和 C_1, C_2, \dots, C_i 点的轨迹, 应分别是绕固定铰 A, D 的圆。设 A 点的坐标为 (x_A, y_A) , D 点的坐标为 (x_D, y_D) , 写出 A, B 点和 C, D 点的位置约束方程为

$$\left. \begin{aligned} (x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 &= (x_{B1} - x_A)^2 + (y_{B1} - y_A)^2 \\ (x_{C_i} - x_D)^2 + (y_{C_i} - y_D)^2 &= (x_{C1} - x_D)^2 + (y_{C1} - y_D)^2 \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-40)$$

将式(2-38)和式(2-39)分别代入式(2-40)中, 得刚体导引机构 $ABCD$ 的机构综合方程

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_A, y_A, x_{B1}, y_{B1}) &= 0 \\ F_i(x_D, y_D, x_{C1}, y_{C1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

从上式可以看出: 求解 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 和 (x_D, y_D) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 的机构综合方程形式完全相同, 即 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 和 (x_D, y_D) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 是同一机构综合方程的两组数值不相同的解。由于机构综合方程是一个非线性的方程组, 满足该方程组的解可以很多, 故在解该方程组时, 可根据机构的具体设计要求从中选出所需要的解即可。如果用机构综合方程求解四杆机构 $ABCD$ 中 A, B_1 或 (C_1, D) 的四个坐标分量, 由机构综合方程的内容知: 必须给出五个标点的坐标和五条标线的标角, 才能联立到机构综合的四个方程, 解由四个非线性方程联立的方程组才能得到机构在位置 1 时的两个铰链的位置坐标分量。求解该方程组可以采用线性迭加方法进行数学处理, 得到一个高阶机构综合方程, 理论上可得机构综合的解析解。在大多数情况下, 求解该方程组普遍采用诸如: 阻力最小二乘法、遗传算法等数值优化方法, 可以得到有足够精度的数值解。设需综合平面四杆机构 $ABCD$ 的 A, B_1 铰链坐标为 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) , 数值解的基本过程如下:

1) 给定刚体的五个运动位姿参数, 得机构综合的四个方程, 任意选取 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 一组计算初值代入机构综合方程组中, 通常这些机构综合方程 $F_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3, 4$)。

2) 以四个机构综合方程计算结果的平方和 $S = \sum_{i=1}^4 F_i^2 \Rightarrow$ 极小为目标, 给出计算控制量 ϵ , 如果 $S \leq \epsilon$ 即终止计算, 并认为这时所得的 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 之值即是机构综合方程的解, 否则继续采用阻尼最小二乘法进行寻优迭代, 直到满足控制量所规定的条件为止。

例 2-15 综合一平面四杆机构，使其连杆能引导刚体实现五个位姿的运动，这五个位姿用标点坐标和标线的标角表示为：

$$P_1(13.84, 188.47), \theta_1=0^\circ$$

$$P_2(-31.07, 140.64), \theta_2=8.88^\circ$$

$$P_3(-51.64, 96.33), \theta_3=22.1^\circ$$

$$P_4(44.74, 113.95), \theta_4=63.68^\circ$$

$$P_5(66.27, 215.07), \theta_5=-3^\circ$$

解

1) 计算刚体运动的相对角位移 $\theta_{i1}=\theta_i-\theta_1 (i=2,3,4,5)$,

$$\theta_{21}=8.88^\circ, \theta_{31}=22.1^\circ, \theta_{41}=63.38^\circ, \theta_{51}=-3^\circ$$

2) 将标点的坐标值及相对角位移值 θ_{i1} 代入刚体位移矩阵式(2-37)中得

$$[P]_{21} = \begin{bmatrix} 0.988 & -0.154 & -15.650 \\ 0.154 & 0.988 & -47.707 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_{31} = \begin{bmatrix} 0.927 & -0.376 & 6.444 \\ 0.376 & 0.927 & -83.500 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_{41} = \begin{bmatrix} 0.448 & -0.894 & 207.030 \\ 0.894 & 0.448 & -17.129 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_{51} = \begin{bmatrix} 0.999 & -0.052 & 42.585 \\ -0.052 & 0.999 & 27.583 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 根据 $\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=2,3,4,5)$

将 (x_{B_i}, y_{B_i}) 表示为 (x_{B1}, y_{B1}) 的函数，代入约束方程 $(x_{B_i}-x_A)^2+(y_{B_i}-y_A)^2=(x_{B1}-x_A)^2+(y_{B1}-y_A)^2$ 得四个方程组成的机构综合方程组。

例如：铰链 B 在位置 2 与位置 1 的位移坐标有如下关系：

$$\begin{bmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.988 & -0.154 & -15.650 \\ 0.154 & 0.988 & -47.707 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是得：

$$\left. \begin{aligned} x_{B2} &= 0.988x_{B1} - 0.154y_{B1} - 15.650 \\ y_{B2} &= 0.154x_{B1} + 0.988y_{B1} - 47.707 \end{aligned} \right\}$$

将上式代入约束方程 $(x_{B2} - x_A)^2 + (y_{B2} - y_A)^2 = (x_{B1} - x_A)^2 + (y_{B1} - y_A)^2$ 展开得平面四杆机构的一个机构综合方程

$$F_1 = -22.828x_{B1} - 44.718y_{B1} + 15.651x_A + 47.707y_A \\ + 0.012(x_{B1}x_A + y_{B1}y_A) + 0.154(y_{B1}x_A - x_{B1}y_A) + 25.105 = 0$$

可以看出：方程是一个非线性方程。按上述相同的方法，可求出其余三个机构综合方程（推导从略）。

$$F_2 = -25.429x_{B1} - 79.781y_{B1} - 6.444x_A + 83.50y_A \\ + 0.074(x_{B1}x_A + y_{B1}y_A) + 0.376(y_{B1}x_A - x_{B1}y_A) + 41.874 = 0 \\ F_3 = 108.084x_{B1} - 177.409y_{B1} - 207.03x_A - 17.129y_A \\ + 0.552(x_{B1}x_A + y_{B1}y_A) + 0.894(y_{B1}x_A - x_{B1}y_A) + 103.869 = 0 \\ F_4 = 41.083x_{B1} - 29.77y_{B1} - 42.858x_A - 27.583y_A \\ + 0.0001(x_{B1}x_A + y_{B1}y_A) - 0.052(y_{B1}x_A - x_{B1}y_A) + 25.369 = 0$$

4) 给出迭代计算初值（可用图解法求，也可以用解析法按刚体运动五个位姿中选三个位姿得到两个线性方程求解获得）：

$$x_A = 0.001, y_A = 0.001, x_{B1} = -79.4, y_{B1} = 79.2$$

将上述初值代入机构综合方程得

$$F_1 = -902, F_2 = -1515.83, F_3 = -2322.67, F_4 = 761.20$$

所有方程均不为零。

5) 以目标函数 $S = \sum_{i=1}^4 F_i^2 \rightarrow \text{极小}$ ，给出控制量 $\epsilon = 10^{-4}$ 进行寻优迭代，当 $S = 6.68 \times 10^{-6} < \epsilon$ 时求出：

$$x_A = -4.53 \times 10^{-4}, \\ y_A = -1.58 \times 10^{-6} \\ x_{B1} = -82.512, \\ y_{B1} = 70.711$$

6) 同理，给出 C、D 铰链位置坐标的初值

$$x_{C1} = 86.4, y_{C1} = 175.6, \\ x_D = 190.4, y_D = 1.0$$

用同样的方法得出四个综合方程的计算结果为：

$$F_1 = -404.55, F_2 = -219.99, F_3 = -1604.28, F_4 = 418.13$$

7) 以目标函数 $S = \sum_{i=1}^4 F_i^2 \leq \epsilon$ 进行寻优迭代，最后求出：

$$x_{C1} = 89.68, y_{C1} = 158.2 \\ x_D = 190.4, y_D = 1.0$$

8) 综合所得机构运动简图如图 2-86 所示，计算各杆长为

$$L_{AB}=108.67$$

$$L_{BC}=193.15$$

$$L_{CD}=186.70$$

$$L_{DA}=190.40$$

综合出来的机构为一个曲柄摇杆机构。机构导引刚体顺序通过五个位姿的情况如图 2-89 所示。

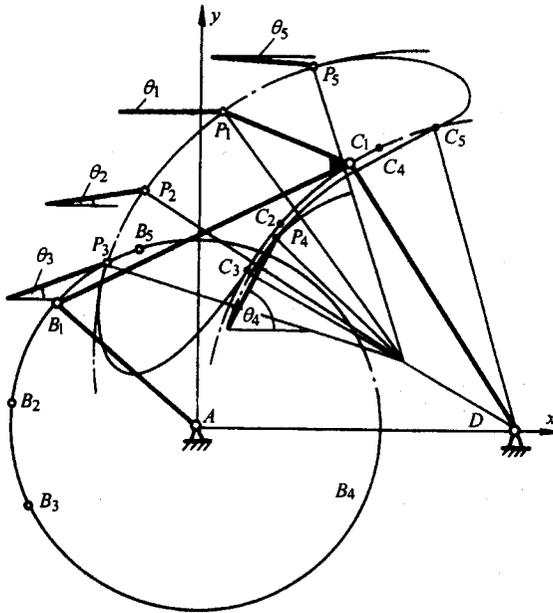


图 2-89 实现刚体五个位姿的综合

实现刚体导引也可以采用曲柄滑块机构，综合方法与铰链四杆机构类似。

例如以图 2-90 所示偏置式曲柄滑块机构的连杆 BC 来导引刚体 \overline{Pa} 运动，当给定有限个标点 P_i 的坐标 (x_{pi}, y_{pi}) 和标线的标角 θ_i 后 $(i=1, 2, \dots, n)$ ，将 P_i 的坐标值和标线的相对角位移 θ_{i1} 代入式 (2-37) 中即可求出连杆 BC 的位移矩阵 $[P]_{i1}$ ，滑块上铰链 C_i 位置与 C_1 位置的位移方程为：

$$\begin{bmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

由于铰链 C 随滑块在直线上运

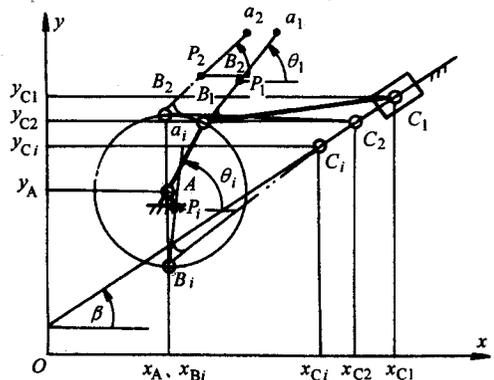


图 2-90 偏置曲线滑块机构综合

动, 所以约束方程与铰链四杆机构连架杆的约束方程不同, 其约束条件为 C_1 、 C_2 、 C_i 三点须在同一直线上, 故有:

$$\frac{y_{C_i} - y_{C_1}}{x_{C_i} - x_{C_1}} = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}} \quad (i=3, 4, \dots, n)$$

整理上式得偏置式曲柄滑块机构滑块运动的约束方程:

$$(y_{C_i} - y_{C_1})(x_{C_2} - x_{C_1}) - (y_{C_2} - y_{C_1})(x_{C_i} - x_{C_1}) = 0 \quad (i=3, 4, \dots, n)$$

从约束方程可知: 欲解出 (x_{C_1}, y_{C_1}) 两个未知量, 必须从式 (2-41) 中解出 (x_{C_2}, y_{C_2}) 、 (x_{C_3}, y_{C_3}) 和 (x_{C_4}, y_{C_4}) 三组坐标与 (x_{C_1}, y_{C_1}) 的位移关系式, 并将这些关系式分别代入约束方程, 得两个约束方程才能求解出 (x_{C_1}, y_{C_1}) 。用式 (2-41) 要解出三组坐标与 (x_{C_1}, y_{C_1}) 的关系式, 只需给出刚体运动的四个位姿, 而只给出四个位姿无法将曲柄 A 、 B 铰链的位置坐标 (x_A, y_A) 、 (x_{B_1}, y_{B_1}) 四个待求参数全部求出 (需五个位姿), 故应在 (x_A, y_A) 、 (x_{B_1}, y_{B_1}) 中预先确定一个值。根据 (x_A, y_A) 是 (x_{B_i}, y_{B_i}) 的圆心, 于是用约束方程:

$$(x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 - (x_{B_1} - x_A)^2 - (y_{B_1} - y_A)^2 = 0 \quad (i=2, 3, 4)$$

可得综合铰链 A 、 B 位置的三个机构综合方程, 解出三个待求参数。而根据刚体运动的四个位姿得滑块上 C_i 点 ($i=2, 3, 4$) 与 C_1 点的关系式, 将其代入滑块运动的约束方程中, 可得综合 (x_{C_1}, y_{C_1}) 的两个机构综合方程, 解这两个方程可求出 (x_{C_1}, y_{C_1}) 。

最后用下式求出滑块导轨的位置角 β

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}}$$

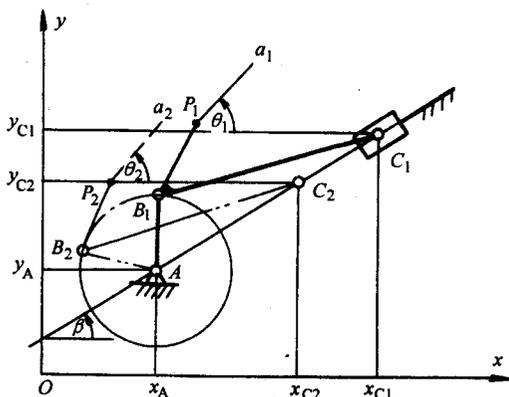


图 2-91 对心式曲柄滑块机构综合

对于如图 2-91 所示对心式的曲柄滑块机构, 因铰链 A 在滑块导轨的延长线上, 故铰链 C 的约束条件为:

$$\frac{y_{C_i} - y_A}{x_{C_i} - x_A} = \frac{y_{C_1} - y_A}{x_{C_1} - x_A} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

整理上式得对心式曲柄滑块机构滑块的运动约束方程。将滑块的运动约束方程与曲柄 AB 的运动约束方程联立得:

$$\left. \begin{aligned} (y_{C_i} - y_A)(x_{C_1} - x_A) - (y_{C_1} - y_A)(x_{C_i} - x_A) &= 0 \\ (x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2 - (x_{B_1} - x_A)^2 - (y_{B_1} - y_A)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

(2-42)

给出连杆上刚体的四个运动位姿, 用连杆 BC 的刚体位移矩阵分别求出

(x_{C_i}, y_{C_i}) 和 (x_{B_i}, y_{B_i}) 与 (x_A, y_A) 、 (x_{B_1}, y_{B_1}) 和 (x_{C_1}, y_{C_1}) 的关系式,将这些关系式代入式(2-42)中得关于 (x_A, y_A) 、 (x_{B_1}, y_{B_1}) 、 (x_{C_1}, y_{C_1}) 六个待求参数的六个机构综合方程,联立解这个六个方程可解出这六个待求参数。当全部参数求出后,滑块运动方向可由下式算出:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_{C_1} - y_A}{x_{C_1} - x_A}$$

二、两连架杆实现预期运动规律的平面四杆机构综合

此类机构综合一般称为函数发生机构或传动机构综合。当用两连架杆实现预期运动规律或传动函数 $\varphi = \varphi(\alpha)$ 时,通常是在主动连架杆的转角 α 和从动连架杆的转角 φ 中,选定有限个角位置 α_i 与 φ_i 的对应值满足传递函数 $\varphi = \varphi(\alpha)$ 来进行机构综合的。其综合特点是:两连架杆的传递函数与杆长的绝对值无关,仅与其相对值有关。故在机构综合时可预先选定某一杆的长度,通常是先确定机架的长度,即先确定机架上两铰链的位置。当机架长度确定后,机构的待求参数为两连架杆的长度,即两连架杆上连接连杆铰链的四个坐标分量。

根据机构在运动中各构件的相对位置是唯一确定的原理,将机构以某一连架杆位置为基础将其转化为机架,便可以将函数发生机构的综合问题转化为刚体导引机构的综合问题。上述转化过程称为机构综合的“反转原理”。

(一) 反转原理在函数发生机构综合中的应用

如图 2-92 所示,给出机架 AD 的长度以及两连架杆的三组对应角位置 (α_1, φ_1) 、 (α_2, φ_2) 和 (α_3, φ_3) ,综合的主要问题是确定出 B 、 C 铰链在两连架杆上的位置。

为了弄清楚设计的基本原理和方法,假定图 2-92 为已设计好的四杆机构 $ABCD$,当原动件位于第一位置 AB_1 时,从动杆位于 C_1D ,从动杆上 E 点在 E_1 位置。当 AB_1 转至 AB_2 位置时, C_1D 转动至 C_2D , E_1 点运动至 E_2 点, D 、 E_2 、 B_2 三点相对位置关系构成 $\triangle DE_2B_2$ 。当 AB_1 继续转动于 AB_3 ,从动杆相应转动到 C_3D 时, D 、 E_3 、 B_3 构成 $\triangle DE_3B_3$ 。机构运动时,无论从机架 AD 上去观察,还是从 CD 杆上去观察,机构运动至 2、3 位置时 D 、 E 、 B 三点构成的三角形 DE_2B_2 和 DE_3B_3 的形状是不会改变的。因

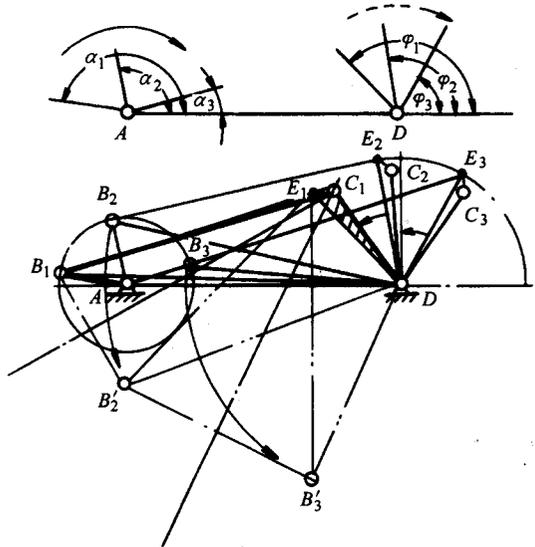


图 2-92 传动机构综合的反转法 (三位置图解)

此, 如果以 CD 杆的第一位置为参考位置观察四杆机构的运动, 即视 C_1D 杆为机架, 四杆机构 $ABCD$ 将按与 CD 杆转动方向相反的方向转动, 当 DE_2 反转至与 DE_1 重合时, $\triangle DE_2B_2$ 的形状不变, 只是 B_2 点反转运动到 B'_2 点。同理, 当 DE_3 反转至与 DE_1 重合时, B_3 点将反转运动到 B'_3 点。由于连杆在运动中长度不变, 即 $\overline{B_1C_1} = \overline{B'_2C_1} = \overline{B'_3C_1}$, 故 C_1 位置应该是 B_1 、 B'_2 和 B'_3 三点的圆心, 根据这一原理可分别用图解和解析求圆心的方法求出机构中 C_1 铰链点的位置。

根据上述分析, 函数发生机构综合的图解法可按下列作图步骤进行:

1) 选择适当的比例尺 μ_l 作出两连架杆回转中心 A 、 D , 并分别在 A 、 D 上作出两连架杆的三组对应位置角 (α_1, φ_1) 、 (α_2, φ_2) 、 (α_3, φ_3) 。

2) 在原动件上任选铰链 B 的位置, 并分别作出铰链 B 随原动件运动的三位置 B_1 、 B_2 、 B_3 。在从动杆上任选参考点 E , 分别作出 E 随从动件运动的三位置 E_1 、 E_2 和 E_3 点。

3) 作 $\triangle DE_2B_2 \cong \triangle DE_1B'_2$ 和 $\triangle DE_3B_3 \cong \triangle DE_1B'_3$, 分别求作出 B'_2 和 B'_3 点, 过 B_1 、 B'_2 、 B'_3 作出圆心 C_1 。连接 AB_1C_1D 得所求平面四杆机构在第一位置时的机构运动简图。 $L_{AB} = \overline{AB_1} \cdot \mu_l$, $L_{BC} = \overline{B_1C_1} \cdot \mu_l$, $L_{CD} = \overline{C_1D} \cdot \mu_l$, $L_{AD} = \overline{DA} \cdot \mu_l$ 。

从作图过程知: 由于 B 铰链的位置是任选的, 故满足两连架杆三组对应角位置的平面四杆机构有无穷多个。如果给出两连架杆四组对应角位置则很难用图解法求解, 这时用解析法求解相对比较容易。

(二) 函数发生机构综合的解析法

如图 2-93 所示, 给出两连架杆 AP 和 DQ 的五组对应位置, 设以 DQ_1 的第一运动位置为机构综合的基础位置, 分别将 Q_2DAP_2 、 Q_3DAP_3 、 Q_4DAP_4 和 Q_5DAP_5 固化, 以和 DQ 转动相反的方向绕 D 点反转, 使 Q_2D 、 Q_3D 、 Q_4D 和 Q_5D 分别与 Q_1D 重合, 得 AP 反转后的五个位置: AP_1 、 $A_2P'_2$ 、 $A_3P'_3$ 、 $A_4P'_4$ 和 $A_5P'_5$ 。以 DQ_1 为机架, 则上述 AP 的五个位置转化为连杆上的五条标线; A 、 A_2 、 A_3 、 A_4 和 A_5 成为五个标点。因 AD 这时转化为连架杆, 因此 A 又是转化机构连杆 AB 上的一个铰链点, 机构综合的问题转化为求连杆上的另一个铰链点 B 和机架 DC 上 C 点的位置坐标。由此可见, 经上述方法转化后, 机构的综合变为: 已知连杆运动的五个位姿, 综合一个刚体导引平面四杆机构, 导引连杆顺序通过上述五个位姿的设计问题, 于是可以用刚体位移矩阵来建立机构的综合方程。下面具体求转化机构的刚体位移矩阵:

设 A 为坐标原点, \overrightarrow{AD} 方向为直角坐标系 $O-xy$ 中 x 轴的正方向, 设 AD 长度为 L , 故 D 点的坐标为 $(L, 0)$ 。 A_2 、 A_3 、 A_4 和 A_5 在该直角坐标系中的坐标可由下式求出:

$$\left. \begin{aligned} x_{A_i} &= L - L \cos(\varphi_{i1}) \\ y_{A_i} &= L \sin(\varphi_{i1}) \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, 4, 5)$$

式中: $\varphi_{i1} = \varphi_i - \varphi_1$ ($i=2, 3, 4, 5$)。 φ_i 及 φ_1 均以逆时针方向为正。
标线的第一位置 AP_1 的标角 $\theta_1 = \alpha_1$, 其他 4 个位置的标角为:

$$\theta_i = -\varphi_{i1} + \alpha_i \quad (i=2, 3, 4, 5)$$

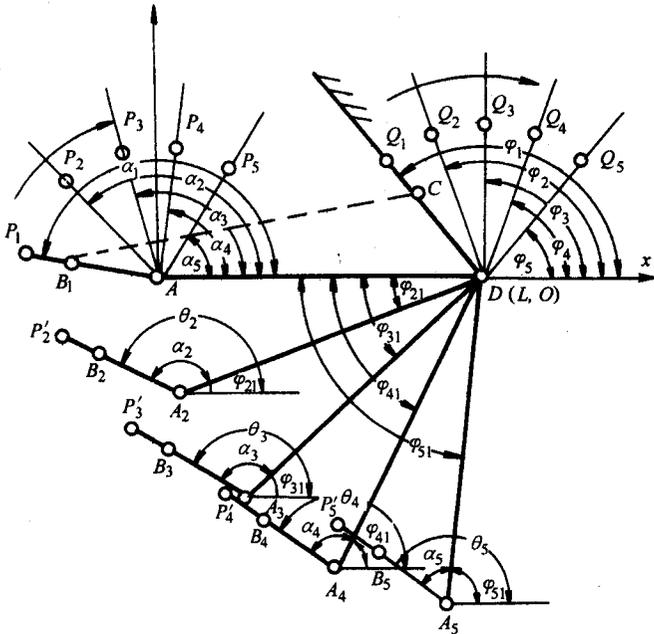


图 2-93 传动机构综合解析法

因此各标线相对于标线的第一位置的相对角位移为:

$$\theta_{i1} = \theta_i - \theta_1 = -\varphi_{i1} + \alpha_i - \alpha_1 = \alpha_{i1} - \varphi_{i1} \quad (i=2, 3, 4, 5)$$

将标点坐标和 θ_{i1} 分别代入式 (2-37) 中, 注意到 $x_{A1} = y_{A1} = 0$, 得连杆 AB 的刚体位移矩阵:

$$[P]_{i1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{i1} - \varphi_{i1}) & -\sin(\alpha_{i1} - \varphi_{i1}) & L - L\cos(\varphi_{i1}) \\ \sin(\alpha_{i1} - \varphi_{i1}) & \cos(\alpha_{i1} - \varphi_{i1}) & L\sin(\varphi_{i1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=2, 3, 4, 5) \quad (2-43)$$

因此, 连杆上 B 点的位移方程为:

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=2, 3, 4, 5) \quad (2-44)$$

设经反转后转化机构机架 DQ_1 上的固定铰链为 C , 则转化机构中连架杆 BC 的约束方程为:

$$(x_{B_i} - x_C)^2 + (y_{B_i} - y_C)^2 = (x_{B_1} - x_C)^2 + (y_{B_1} - y_C)^2 \quad (2-45)$$

从式(2-44)中分别解出 (x_{B_i}, y_{B_i}) 代入式(2-45)中,得关于求解 (x_{B_1}, y_{B_1}) 、 (x_C, y_C) 四个未知量的四个机构综合方程,解这个方程组即可求出 B_1 、 C 铰链的坐标,再根据 A 、 B_1 、 C 、 D 的坐标,可求出平面四杆机构各杆长。

例 2-16 综合一铰链四杆机构 $ABCD$,要求原动连架杆 AB 与从动连架杆 CD 的转角能近似实现函数 $y=\log x$ ($1\leq x\leq 10$)的变化。设机架 $l_{AD}=100\text{mm}$, AB 杆的起始角为 60° ,其转角范围为 100° 。 CD 杆的标线起始角为 240° ,转角范围为 60° 。

解

用两连架杆的角位移连续变化之值来满足任意连续函数的变化规律一般是很难实现的,故通常只能用两连架杆若干对应点之值满足给定的函数来综合四杆机构。

设所综合四杆机构 $ABCD$ 在直角坐标系 $O-xy$ 的坐标原点为 A , D 铰链位于该直角坐标系的 x 轴上。即: $x_A=y_A=0$, $x_D=100$, $y_D=0$ 。机构在起点位置时 B 、 C 铰链的坐标 (x_{B_1}, y_{B_1}) 、 (x_{C_1}, y_{C_1}) 为待求参数。由于连架杆 AB 的起始角为 60° ,由 $\text{tg}60^\circ=\frac{y_{B_1}}{x_{B_1}}$ 知: x_{B_1} 、 y_{B_1} 中只有一个是独立的,当 AB 杆位置角一定时, CD 杆的位置角是由 $y=\log x$ 函数确定的, CD 杆上 C 铰链的两个坐标分量 x_{C_1} 、 y_{C_1} 中也只有一个量是独立的。故该平面四杆机构的位置综合参数只有两个,因此只能给出两连架杆三组对应位置来进行综合。为了使这三组对应位置能在连架杆运动的全程范围内更有效地反映出 $y=\log x$ 的函数关系,可用契贝谢夫插值法在两连架杆的摆角范围中求出三组对应位置来对机构进行综合。

三组对应位置的求法如下:

1) 确定函数 $y=\log x$ 自变量 x 在 $1\leq x\leq 10$ 区间的三个插值点之值。契贝谢夫插值公式为:

$$x_i = \frac{1}{2}(x_m + x_1) - \frac{1}{2}(x_m - x_1)\cos\frac{2i-1}{2n}\pi \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

在本例题中: $x_1=1$, $x_m=10$, $n=3$

当式中 i 分别等于1、2、3时算出:

$$x_2=1.603, x_3=4.5, x_4=8.397$$

代入 $y=\log x$ 求出:

$$y_2=0.2049, y_3=0.6532, y_4=0.9211$$

2) 用线性插值方法计算两连架杆摆角的对应值。线性插值公式为:

$$\alpha_i = \alpha_1 + \frac{\alpha_m - \alpha_1}{x_m - x_1}(x_i - x_1)$$

式中 α_1 ——初始位置角;

α_m ——终结位置角。

在本例题中 $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_5=160^\circ$, x_1 为对应 α_1 的初始值, x_m 为对应 α_m 的终结位置值, $x_1=1$, $x_5=10$ 。将 x_2 、 x_3 之和 x_4 值代入线性插值公式中得: $\alpha_2=66.7^\circ$,

$\alpha_3=98.89^\circ$, $\alpha_4=142.19^\circ$ 。

对于函数 y , $y_1=0$, $y_5=1$, $\varphi_1=240^\circ$, $\varphi_5=290^\circ$, 同样用线性插值公式, 将 y_2 , y_3 和 y_4 之值代入得 $\varphi_2=250.25^\circ$, $\varphi_3=272.66^\circ$, $\varphi_4=286.21^\circ$ 。

将 α_i 、 φ_i 和 D 点的坐标值分别代入式 (2-43) 中, 得转化机构中连杆 AB 的刚体位移矩阵和铰链 B 的位移矩阵方程 (以下推导、计算过程从略)。

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i2} \begin{bmatrix} x_{B_2} \\ y_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=3, 4)$$

解出 x_{B_i} , y_{B_i} 与 x_{B_2} , y_{B_2} 的关系式代入约束方程:

$$(x_{B_i} - x_{C_2})^2 + (y_{B_i} - y_{C_2})^2 = (x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 \quad (i=3, 4)$$

得到关于 (x_{B_2}, y_{B_2}) 、 (x_{C_2}, y_{C_2}) 四个待求参数的两个机构综合方程。

因为 $y_{B_2} = x_{B_2} \tan \alpha_2$, $y_{C_2} = x_{C_2} \tan \varphi_2$, 任意设定两个计算初始值, 例如 x_{B_2}, x_{C_2} , 给定控制量 ϵ 对关于 $(x_{B_2}, x_{B_2} \tan \alpha_2)$, $(x_{C_2}, x_{C_2} \tan \varphi_2)$ 两个待定参数的目标函数 $S = \sum_{i=1}^2 F_i \Rightarrow$ 极小, 进行寻优选代, 最后求出:

$$x_{B_2} = 59.033, y_{B_2} = 102.248$$

$$x_{C_2} = 16.137, y_{C_2} = 135.427$$

计算各杆长得:

$$L_{AB} = 118.066, L_{BC} = 54.23, L_{CD} = 168.269, L_{AD} = 100 \text{ (单位: mm)}$$

作出其机构运动简图如图 2-94 所示。

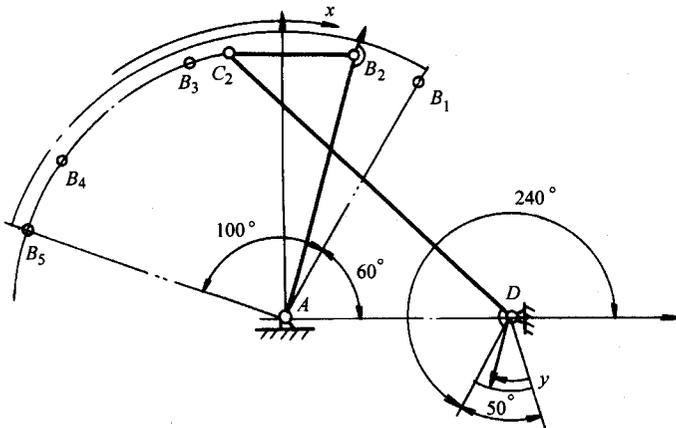


图 2-94 实现 $y = \log x$ 的四杆机构

三、有急回运动四杆机构的综合

平面四杆机构中有急回特性的机构主要有: 曲柄摇杆机构、偏置式曲柄滑块机构和导杆机构。这些机构应用十分广泛, 如牛头刨床、插床中的切削运动机构,

无级脉动变速器中的运动变换机构等。有急回运动四杆机构的综合可以看成是函数发生机构综合的一种特例，其综合方法采用图解法或解析法均比较方便和有效。

进行机构综合时，首先应根据行程时间比系数 K 算出机构的极位夹角 θ ， $\theta = \frac{K-1}{K+1} \times 180^\circ$ ，然后根据不同的机构类型，结合其他一些辅助条件进行机构综合。

(一) 有急回运动平面四杆机构综合的图解法

由于从动连架杆的运动要求是设计考虑的主要内容，故应首先确定从动杆的几何参数和运动参数，而这些参数通常可以根据实际问题预先确定出。

设已知曲柄摇杆机构摇杆 CD 的长度为 c ，摆角为 φ ，行程时间比系数为 K ，要求设计此四杆机构。

1) 选定作图的长度比例尺 μ_l ，在图纸上任选铰链 D 的位置，以 D 为顶点作等腰三角形，使两腰长为 $\frac{c}{\mu_l}$ 、夹角为 φ 得摆杆摆动的两极限位置 DC_1 、 DC_2 (图 2-95)。

2) 以 $\overline{C_1C_2}$ 为直角三角形一直角边作直角三角形 C_2C_1N ，使 $\angle C_1NC_2 = \theta$ 。

3) 以 $\overline{NC_2}$ 为直径作圆，此圆上任意一点到 C_1 、 C_2 点的夹角均为 θ ，故 A 铰链位置应在此圆上选取。该圆也称为对应 C_1 、 C_2 点视角为 θ 的等视角圆。

4) A 铰链具体位置应根据其他的辅助设计条件确定，例如：给出曲柄长度 a ；或给出连杆长 b ；或给出机架长 d ；或要求机架与摇杆的相对位置…。根据上述辅助设计条件求出曲柄回转中心铰链 A 在等视角圆上的位置。当 A 铰链位置确定后，机架 $d = \overline{AD}\mu_l$ 。

根据 $\overline{AC_1}\mu_l = b - a$ ， $\overline{AC_2}\mu_l = b + a$ ，得： $a = \frac{\overline{AC_2} - \overline{AC_1}}{2}\mu_l$ ，即 $\overline{AC_2}\mu_l$ 与 $\overline{AC_1}\mu_l$ 之差为两倍曲柄长。 $b = \frac{\overline{AC_2} + \overline{AC_1}}{2}\mu_l$ ，即 $\overline{AC_2}\mu_l$ 与 $\overline{AC_1}\mu_l$ 之和为两倍连杆长。

例 2-17 已知：曲柄长为 a ，摇杆长为 c ，摇杆摆角为 φ ，求作行程时间比系数为 K 的铰链四杆机构 $ABCD$ 。

解

1) 任选作图长度比例尺 μ_l ，按前面讲的步骤 1)、2)、3) 在图纸上合适位置

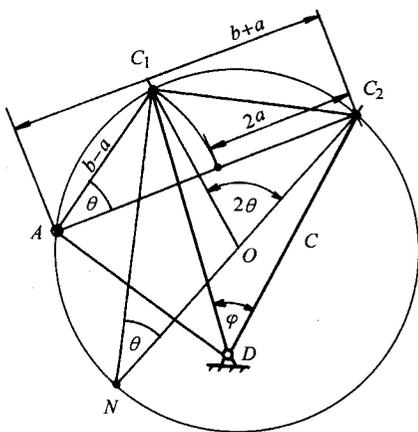


图 2-95 已知行程时间比系数设计四杆机构 (一)

确定铰链 D 的位置, 以摆杆长 c 和摆角 φ 作视角为 θ 的等视角圆。

2) 过 C_1 、 C_2 点作 $\angle C_1OC_2=180^\circ+\theta$ 得圆心 O , 以 O 为圆心, $\overline{OC_1}$ 为半径画圆。以 C_2 为圆心, $\frac{2a}{\mu_1}$ 为半径画弧交圆于 m 点。连结 $\overline{C_2m}$ 作射线交等视角圆于 A 点 (图 2-96), A 即为曲柄的回转中心铰链 A 的位置。故 $d=\overline{AD}\mu_1$, $b=\overline{AC_2}\mu_1-a$ 。

作图的根据是:

因为 $\angle C_1mC_2=90^\circ+\frac{\theta}{2}$

($\angle C_1mC_2$ 为 $\angle C_1OC_2$ 之一半)

所以 $\angle C_1mA=90^\circ-\frac{\theta}{2}$

因为 $\angle C_1Am=\theta$

所以 $\triangle C_1Am$ 为等腰三角形, 而 $\overline{mC_2}\mu_1=2a$, 即满足 $\overline{AC_2}\mu_1$ 与 $\overline{AC_1}\mu_1$ 之差为 $2a$ 。

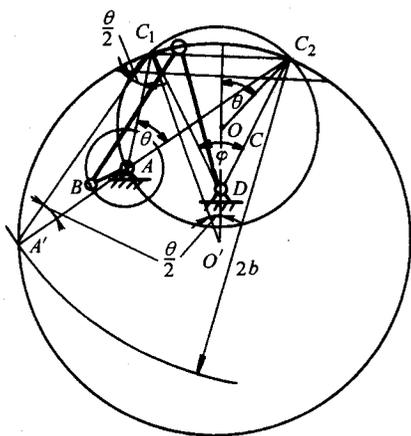
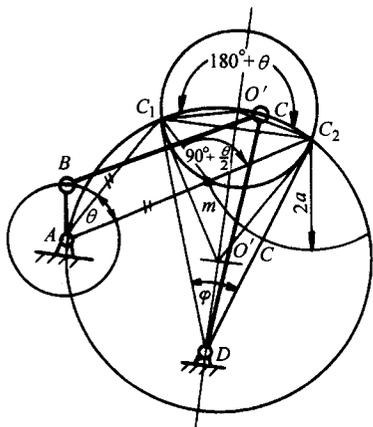


图 2-96 按行程时间比系数综合 (二)

图 2-97 按行程时间比系数综合 (三)

例 2-18 已知: 连杆长为 b , 摇杆长为 c , 摇杆摆角为 φ , 求作行程时间比系数为 K 的铰链四杆机构 $ABCD$ 。

解

1) 选合适的作图长度比例尺 μ_1 , 在图纸上任选铰链 D 的位置。以 $\frac{c}{\mu_1}$ 作 $\angle C_1DC_2=\varphi$, 求出摇杆上 C 点的两极限位置 C_1 、 C_2 (图 2-97)。

2) 计算极位夹角 θ , $\theta=\frac{K-1}{K+1}\times 180^\circ$ 。以 $\overline{C_1C_2}$ 作视角为 θ 的等视角圆 O , 又以 $\overline{C_1C_2}$ 作视角为 $\theta/2$ 的等视角圆为 O' 。

3) 以 C_2 为圆心, $\frac{2b}{\mu_1}$ 为半径画弧交等视角圆 O' 于 A' 点, 连结 $\overline{A'C_2}$ 交等视角圆

O 与 A 点, A 即曲柄回转中心位置。故:

$$d = \overline{AD}\mu_l; a = \frac{(\overline{AC_2} - \overline{AC_1})\mu_l}{2}$$

作图的根据是: 因为 $\angle C_1AC_2 = \theta$, $\angle C_1A'C_2 = \frac{\theta}{2}$, 故 $\triangle C_1AA'$ 为等腰三角形, $\overline{C_2A} = \overline{AA'}$, $\overline{C_2A}\mu_l + \overline{AA'}\mu_l = \overline{C_2A}\mu_l + \overline{C_1A}\mu_l = 2b$ 。即 $\overline{AC_1}$ 与 $\overline{AC_2}$ 之和为连杆长之两倍。

例 2-19 已知: 滑块的行程 H 和偏距 e , 行程时间比系数 K , 要求设计该曲柄滑块机构。

解

1) 选择作图比例尺 μ_l , 在图纸上作水平直线 $\frac{\overline{C_1C_2}}{\mu_l} = H$ (图 2-98)。

2) 根据 K 计算 θ , 以 $\overline{C_1C_2}$ 为直角边作直角三角形 C_1NC_2 , 使 $\angle C_1NC_2 = \theta$ 。

3) 以 $\overline{NC_2}$ 为直径作视角为 θ 的等视角圆。

4) 作与 $\overline{C_1C_2}$ 平行、距离为 $\frac{e}{\mu_l}$ 的直线与等视角圆相交于 A (或 A')。

5) 以 A 为圆心, $\overline{AC_1}$ 为半径作弧交于 $\overline{AC_2}$ 于 m , 则曲柄长 $l_{AB} = \frac{\overline{mC_2}}{2}\mu_l$, 连杆长 $l_{BC} = \left(\overline{AC_2} - \frac{\overline{mC_2}}{2}\right)\mu_l$ 。

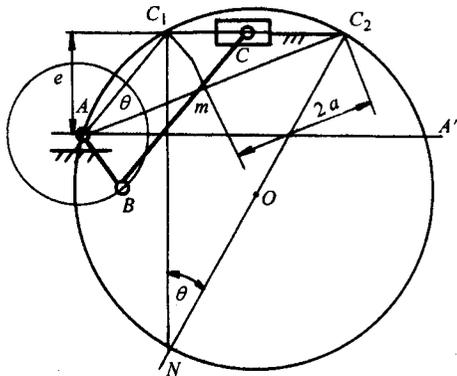


图 2-98 偏置式曲柄滑块机构的综合

例 2-20 已知: 摆动导杆机构的机架长为 d , 行程时间比系数 K , 要求设计此四杆机构。

解

1) 计算机构的极位夹角 $\theta = \frac{K-1}{K+1} \times 180^\circ$, 因为摆动导杆机构的极位夹角 θ 与摆杆的摆角 φ 相等, 故在图纸上选择作图比例尺 μ_l 后, 任选摆杆摆动中心位置 A 。以 A 为顶点作两射线, 其夹角为 θ (图 2-99)。

2) 作 θ 角的角平分线并在此线上截取 B , 使 $\frac{\overline{AB}}{\mu_l} = d$, 求出曲柄的回转中心位置 B 。

3) 过 B 作摆杆的垂线 BC_1 (或 BC_2), 则曲柄长 $L_{BC} = \overline{BC_1}\mu_l$, 导杆长度应大于 $(\overline{AB} + \overline{BC_1})\mu_l$ 。

在实际工程问题中, 为了保证设计和精度, 可以在作图的基础上进行几何计

圆的半径为 R ；圆心 O 到铰链 D 的距离为 H ，根据图 2-101 中的几何关系，注意到 $a+b=2R\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)$ ， $b-a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$ ，可得曲柄摇杆机构的机构综合方程：

$$\left. \begin{aligned} R &= c\sin(\varphi/2)/\sin\theta \\ H &= c\cos(\varphi/2) - R\cos\theta \\ a &= 2R\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin(\theta/2) \\ b &= 2R\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\cos(\theta/2) \\ d &= \sqrt{R^2 + H^2 + 2RH\cos(\theta+\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (2-46)$$

当再给出第四个设计参数，例如：给出 a 或 b 或 d 的长度，则由 (2-46) 式中的第三、第四或第五式可以解出 α ；或者当 D 铰链位于等视角圆内，要求机架 \overline{AD} 与摇杆摆角的角平分线垂直，则可以从图 2-101 的 $\triangle ADO$ 中直接求出

$$\alpha = \arccos\left\{\frac{\sin[(\varphi/2) - \theta]}{\sin(\varphi/2)}\right\} - \theta \quad (2-47)$$

将求出的 α 代回式 (2-46) 中，即可综合出满足行程时间比系数 K 的曲柄摇杆机构。

例如：要求设计 $K=1.3$ ($\theta=23.48^\circ$)， $c=100\text{mm}$ ， $\varphi=40^\circ$ 的曲柄摇杆机构。如果给出 $a=31.4\text{mm}$ ，用式 (2-46) 中的三式可求出 $\alpha=28.49^\circ$ ，将 α 代入第四或第五式中解出： $b=73.65\text{mm}$ ， $d=95.95\text{mm}$ 。验算机构的极位夹角为 23.48° ，符合 $K=1.3$ 的设计要求。

又如：当 $K=1.3$ ， $c=100\text{mm}$ ， $\varphi=40^\circ$ 时，要求机架 \overline{AD} 与摇杆摆角角平分线垂直，可用式 2-47 算出 $\alpha=76.74^\circ$ ，代入式 (2-46) 中求出： $a=22.4\text{mm}$ ， $b=128.97\text{mm}$ ， $d=84.48\text{mm}$ 。

除了可以根据机构的几何参数和位置关系计算 α 来进行机构综合外，也可以根据机构设计的动力参数确定 α ，例如：当要求机构的最小传动角不小于机构的许用传动角时，将式 (2-46) 代入

$$\cos\gamma_{\min} = \cos[\gamma] = \frac{b^2 + c^2 - (d-a)^2}{2bc} \quad (2-48)$$

得机构的综合方程，由此方程解出 α 代回式 (2-46)，可以综合出既满足机构的运动设计参数 K 的要求，又满足机构动力设计参数 $[\gamma]$ 要求的曲柄摇杆机构。综合出来的四杆机构再根据

$$\gamma' = \arccos\left\{\pm\left[\frac{b^2 + c^2 - (d+a)^2}{2bc}\right]\right\} \quad (\gamma \text{ 为钝角时取“负”})$$

验算用式 (2-48) 算出的传动角是否是最小传动角。

由于该机构综合方程是一个关于 α 的超越函数方程，通常只能用数值优化方

法求解。

例如：已知 $K=1.25$, $c=500\text{mm}$, $\varphi=40^\circ$, $[\gamma]=40^\circ$, 按上述过程建立机构综合方程, 可解出最小传动等于 40° 的两个四杆机构:

- 1) $a_1=165.85\text{mm}$, $b_1=291.626\text{mm}$, $d_1=499.996\text{mm}$ 。
- 2) $a_2=146.266\text{mm}$, $b_2=530.803\text{mm}$, $d_2=500.008\text{mm}$ 。

两曲柄摇杆机构的另一个最小传动角分别为 69.2° 和 77.59° , 均符合设计要求。

从上述分析可以看出: 当已知设计参数 c 、 φ 和 K 时, 给出不同的 $[\gamma]$ 可以求出不同的 α 值, 即可以综合出不同的四杆机构, 于是我们可以根据不同的 φ 、 K 先画出 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线, 当设计要求给出 $[\gamma]$ 时, 可根据 $[\gamma]$ 查出 α , 从而比较方便地求出所要综合的四杆机构。

例如: 以摆杆摆角 $\varphi=40^\circ$ 画出不同 K 值的 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线如图 2-102 所示。若要求设计 $K=1.3$, $\gamma_{\min}=[\gamma]=38^\circ$ 的四杆机构, 只需过纵坐标轴上 $\gamma_{\min}=38^\circ$ 的点作水平直线与 $K=1.3$ 的曲线相交, 求得两交点 P_1 、 P_2 , 过 P_1 、 P_2 分别作纵坐标轴的平行线与横坐标相交, 求出对应 P_1 点的 α_1 约为 15° , 对应 P_2 点的 α_2 约为 46° , 将求出的 α 和摆杆长 c 分别代回 (2-46) 式中, 即可综合两组杆长不同的四杆机构。设 $c=100\text{mm}$, 则

- 1) $a_1=32.98\text{mm}$, $b_1=55.39\text{mm}$, $d_1=98.23\text{mm}$, $\gamma_{\min}=37.97^\circ$ 。
- 2) $a_2=28.71\text{mm}$, $b_2=95.8\text{mm}$, $d_2=92.29\text{mm}$, $\gamma_{\min}=37.82^\circ$ 。

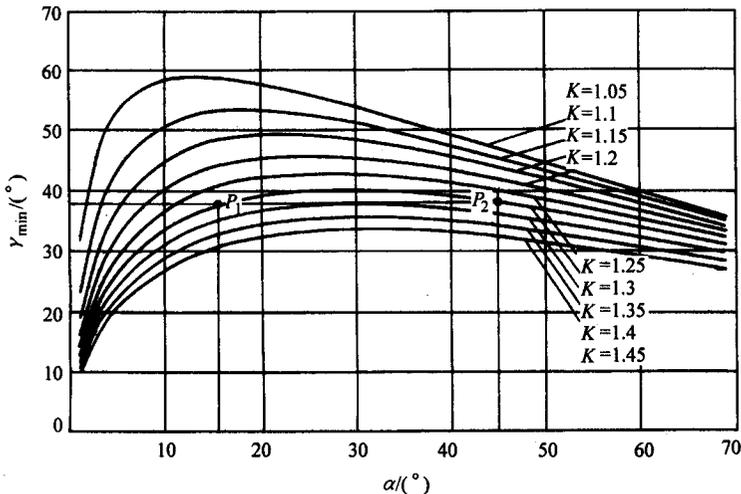


图 2-102 摇杆摆角为 40° , 不同 K 值条件下的 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线图

从图 2-102 中可以看出: K 值曲线的抛物线顶点为该 K 值最小传动角最大的点, 此点对应的 α 求出的四杆机构即为该 K 值、摆角 $\varphi=40^\circ$ 时最小传动角最大的解, 为此我们可以根据不同的 K 、 φ 值求出这些最小传动角最大的四杆机构, 并将各杆相对于摇杆的杆长比例在表 2-3 中供设计时参考。

表 2-3 最小传动角最大曲柄摇杆机构设计表

φ	K 杆长比	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
		10°	a/c	0.086	0.084	0.083	0.082	0.081	0.080	0.079
	b/c	0.438	0.319	0.263	0.230	0.206	0.190	0.177	0.166	0.157
	d/c	1.011	0.966	0.952	0.947	0.945	0.945	0.945	0.947	0.948
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	67.51°	59.41°	53.36°	48.43°	44.24°	40.59°	37.36°	34.45°	31.82°
20°	a/c	0.171	0.168	0.165	0.163	0.160	0.158	0.157	0.155	0.154
	b/c	0.812	0.616	0.517	0.459	0.417	0.385	0.359	0.338	0.321
	d/c	1.164	1.025	0.969	0.939	0.923	0.914	0.909	0.907	0.906
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	65.5°	58.43°	53.04°	48.59°	44.76°	41.39°	38.37°	35.65°	33.17°
30°	a/c	0.255	0.251	0.247	0.243	0.240	0.236	0.233	0.231	0.228
	b/c	1.115	0.866	0.748	0.669	0.613	0.571	0.537	0.509	0.485
	d/c	1.356	1.139	1.040	0.982	0.945	0.920	0.903	0.891	0.884
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	62.41°	56.26°	51.55°	47.63°	44.24°	41.24°	38.53°	36.07°	33.81°
40°	a/c	0.338	0.333	0.328	0.323	0.318	0.314	0.310	0.306	0.302
	b/c	1.366	1.077	0.936	0.848	0.786	0.738	0.699	0.666	0.639
	d/c	1.542	1.268	1.136	1.055	1.000	0.960	0.929	0.907	0.889
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	58.76°	53.33°	49.19°	45.77°	42.81°	40.18°	37.81°	35.65°	33.65°
50°	a/c	0.419	0.413	0.408	0.402	0.396	0.391	0.386	0.381	0.376
	b/c	1.579	1.254	1.099	1.001	0.933	0.881	0.838	0.804	0.775
	d/c	1.712	1.392	1.237	1.140	1.071	1.091	0.979	0.947	0.921
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	54.8°	49.93°	46.27°	43.26°	40.67°	38.39°	36.33°	34.45°	32.72°
60°	a/c	0.496	0.490	0.484	0.478	0.472	0.466	0.461	0.455	0.450
	b/c	1.755	1.401	1.234	1.130	1.057	1.001	0.958	0.921	0.891
	d/c	1.858	1.503	1.331	1.222	1.145	1.086	1.039	1.000	0.968
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	50.64°	46.25°	42.98°	40.32°	38.04°	36.04°	34.26°	32.63°	31.14°
70°	a/c	0.569	0.564	0.558	0.552	0.545	0.539	0.533	0.527	0.522
	b/c	1.901	1.524	1.347	1.237	1.160	1.102	1.056	1.020	0.988
	d/c	1.980	1.599	1.415	1.297	1.214	1.150	1.098	1.056	1.021
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	46.36°	42.38°	39.45°	37.07°	35.07°	33.32°	31.76°	30.35°	29.07°
80°	a/c	0.639	0.633	0.627	0.621	0.615	0.609	0.603	0.547	0.591
	b/c	2.015	1.622	1.437	1.323	1.244	1.185	1.138	1.100	1.068
	d/c	2.076	1.676	1.483	1.361	1.274	1.207	1.154	1.109	1.072
	$(\gamma_{\min})_{\max}$	42°	38.38°	35.74°	33.63°	31.85°	30.32°	28.96°	27.74°	26.64°

例如：当要求综合 $K=1.3$ ， $\varphi=30^\circ$ 最小传动角最大的曲柄摇杆机构，可从表 2-3 中直接查出四杆机构各杆相对于摇杆的杆长比：

$$a/c=0.236, b/c=0.571, d/c=0.920.$$

如果 $c=100\text{mm}$, 则 $a=23.6\text{mm}$, $b=57.1\text{mm}$, $d=92\text{mm}$ 。

并且可知: 在 $K=1.3$, $\varphi=30^\circ$ 条件下, 该曲柄摇杆机构最小传动角的最大值 $(\gamma_{\min})_{\max}=41.24^\circ$ 。

当所综合机构的 K 值与 φ 值不能直接在表中查出时, 例如: $K=1.27$, $\varphi=35^\circ$, 可以根据表中提供的值用插值的方法求出所要综合的四杆机构。

进一步分析图 2-102 和机构的综合方程, 可以得出以下结论:

1) 曲柄摇杆机构若规定许用传动角 $[\gamma]=40^\circ$, 则能满足该设计要求的曲柄摇杆机构的行程速比系数不可能大于 1.324346。 $[\gamma]$ 值要求越大, 能满足要求的 K 值越小。

2) 在相同 K 值的曲柄摇杆机构中, 当摇杆的摆角 φ 等于机构的极位夹角 θ 时 (即 A 、 D 铰链均在同一等视角图上选取) 机构的最小传动角有极大值。即: 当 $\varphi < \theta$ 时 (D 铰链位于等视角圆外), 或 $\varphi > \theta$ 时 (即 D 铰链位于等视角圆内), 机构的最小传动角均小于 $\varphi = \theta$ 时机构的最小传动角。证明如下:

将式 (2-48) 对 φ 求导得:

$$\frac{d(\gamma_{\min})}{d\varphi} = \frac{b^2 b' c + 2a' b c d - 2aa' d c - b' c^3 + b' c d^2 - 2ab' c d + a^2 b' c}{-4b^2 c^2 \sin(\gamma_{\min})} \quad (2-49)$$

式中: a' 、 b' 和 d' 分别表示 a 、 b 、 d 对 φ 的导数。

将式 (2-46) 对 φ 求导, 并令式中 $\varphi = \theta$ 得:

$$\left. \begin{aligned} a &= c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); & a' &= c \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) / 2 \\ b &= c \sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) & b' &= c \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) / 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ d &= c \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & d' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-50)$$

将式 (2-50) 代入式 (2-49) 中得:

$$\frac{d(\gamma_{\min})}{d\varphi} = 0$$

通过对 φ 与 θ 的变化关系进行分析后可知: 当 $\varphi = \theta$ 时, γ_{\min} 有极大值。因此, 在设计具有急回运动的曲柄摇杆机构时, 如果对摇杆摆角 φ 的大小无特殊要求, 应力求使 φ 与机构的极夹角 θ 相等或相近, 以便使机构的最小传动角最大, 从而提高机构的传动质量。

表 2-4 列出不同 K 值 (即不同 θ) 条件下曲柄摇杆机构最小传动角的极大值, 可供设计时参考。

表 2-4 不同 K 值条件下曲柄摇杆机构的最小传动角极大值表

K	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
$\varphi=\theta$	4.37°	8.57°	12.56°	16.36°	20°	23.48°	26.81°	30°	33.06°
$(\gamma_{\min})_{\max}$	67.85°	59.42°	53.4°	48.66°	44.76°	41.44°	38.58°	36.07°	33.85°

2. 偏置式曲柄滑块机构的设计 从图 2-103 中容易得出机构的综合方程:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{H}{2\sin\theta} \\ a &= 2R\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ b &= 2R\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e &= (b-a)\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

当给定 H 和 K 值后, 若再给出其他设计条件: 例如曲柄长度 a , 连架杆长 b 或偏距 e , 则可以分别从式 (2-51) 的第二、第三式或第四式中解出 α , 于是可以综合出能满足设计要求的偏置式曲柄滑块机构。此外, 也可以根据传动角要求来进行机构综合。

当机构位于最小传动角位置时有:

$$\cos\gamma_{\min} = \frac{a+e}{b} \quad (2-52)$$

将 (2-51) 式代入式 (2-52) 中, 得最小传动角最大偏置式曲柄滑块机构的机构综合方程。当给出设计参数: 滑块的行程 H , 行程速比系数 K (即 θ) 和许用传动角 $[\gamma]$, 可由机构综合方程解出 α , 将 α 值分别代入 (2-51) 式中, 即

可综合出满足设计要求的曲柄滑块机构。也可以用类似曲柄摇杆机构综合的方法, 根据不同的 K 画出如图 2-104 所示的 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线来进行机构综合。

例如: 要求设计 $K=1.25$, $\gamma_{\min} \geq 40^\circ$ 的曲柄滑块机构, 在图 2-104 所示 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线的纵坐标上, 过 $\gamma_{\min}=40^\circ$ 点作横坐标的平行线, 与 $K=1.25$ 的曲线交于 P_1 、 P_2 点, 在曲线 $\overline{P_1P_3P_2}$ 上任选一点求出该点对应横坐标上的 α 值, 将 α 代入 (2-51) 式中, 即可得所要综合的曲柄滑块机构。例如: 分别量出对应 P_1 、 P_2 、 P_3 三点的 α 值约为: 15° 、 45° 和 25° , 将其分别代入 (2-51) 式中, 设滑块的行程 $H=100\text{mm}$, 于是综合出三个偏置式曲柄滑块机构为:

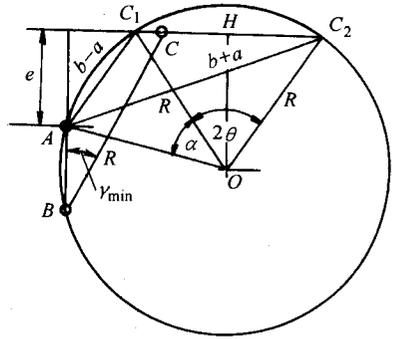


图 2-103 偏置式曲柄滑块机构的解析设计

- 1) $a_1=48.421\text{mm}$; $b_1=96.582\text{mm}$; $e_1=17.622\text{mm}$; $\gamma_{\min}=40.292^\circ$ 。
- 2) $a_2=48.82\text{mm}$; $b_2=154.709\text{mm}$; $e_2=75.591\text{mm}$; $\gamma_{\min}=40.059^\circ$ 。
- 3) $a_3=46.907\text{mm}$; $b_3=110.189\text{mm}$; $e_3=34.002\text{mm}$; $\gamma_{\min}=42.755^\circ$ 。

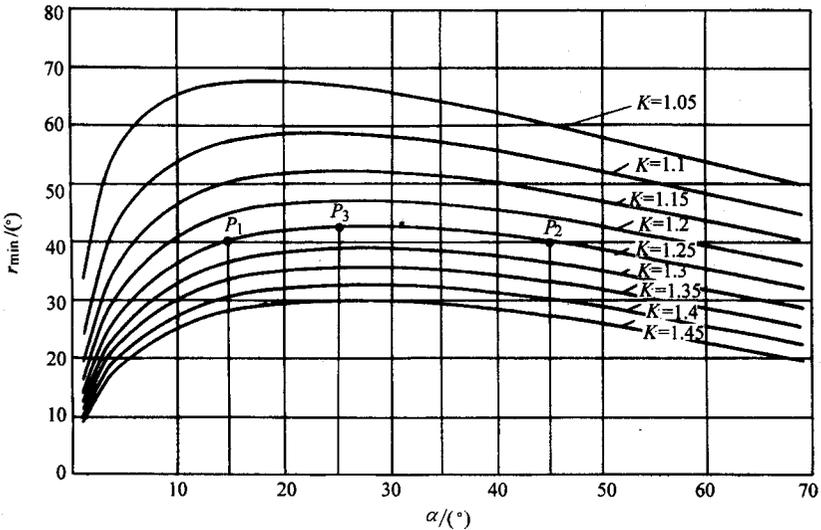


图 2-104 偏置式曲柄滑块机构不同 K 值条件下的 $\alpha-\gamma_{\min}$ 曲线图

从图 2-104 可以看出：不同 K 值曲线的顶点对应不同 K 值最小传动角最大的曲柄滑块机构，将各 K 值顶点对应的 α 值代入机构综合方程中，求出各杆相对于行程 H 的相对杆长比列于表 2-5 中得最小传动角最大偏置式曲柄滑块机构设计表。

表 2-5 最小传动角最大偏置式曲柄滑块机构设计表

K	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
杆长比									
a/H	0.491	0.483	0.476	0.470	0.466	0.461	0.458	0.455	0.453
b/H	2.527	1.796	1.471	1.279	1.149	1.054	0.980	0.921	0.873
e/H	0.470	0.446	0.421	0.398	0.378	0.358	0.338	0.321	0.304
$(\gamma_{\min})_{\max}$	67.64°	58.85°	52.4°	47.2°	42.81°	39°	35.64°	32.63°	29.92°

例如：当要求综合满足 $K=1.15$ ，最小传动角最大的偏置式曲柄滑块机构，可直接从表 2-5 中查出：

$$a/H=0.476, b/H=1.471, e/H=0.421$$

设 $H=100\text{mm}$ ，则 $a=47.6\text{mm}$ ， $b=147.1\text{mm}$ ， $e=42.1\text{mm}$ 。

在所有 $K=1.15$ 的偏置式曲柄滑块机构中，该杆长比的偏置式曲柄滑块机构最小传动角最大为 52.4° 。

通过进一步分析可知：偏置式曲柄滑块机构当要求许用传动角 $[\gamma] = 40^\circ$ 时，其行程速比系数 K 不可能超过 1.2862。 $[\gamma]$ 值要求越大，能满足要求的 K 值越小。

四、实现预期轨迹平面四杆机构的综合

平面四杆机构中，铰链四杆机构的连杆曲线最复杂，形态也最丰富，故实现预期轨迹的机构一般都采用铰链四杆机构。这类设计一般是给出轨迹曲线上的若干点的位置坐标 (x_{pi}, y_{pi}) ($i=1, 2, \dots, n$)，要求综合一平面四杆机构 $ABCD$ ，使其连杆上一点 P ，在机构运动时能顺序依次通过这些轨迹点。

上述平面四杆机构的综合，仍然可以采用刚体位移矩阵方程来建立机构的综合方程。具体的方法是：将给出的轨迹点的坐标视为标点的坐标，而将标线的相对角位移 θ_{i1} 暂时作为未知量（实际上并没有标线），根据式 (2-37) 写出连杆 BC 的刚体位移矩阵方程，即：

$$\begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

求出 (x_{Bi}, y_{Bi}) 、 (x_{Ci}, y_{Ci}) 与 (x_{B1}, y_{B1}) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 的关系后，代入约束方程

$$\left. \begin{aligned} (x_{Bi} - x_A)^2 + (y_{Bi} - y_A)^2 &= (x_{B1} - x_A)^2 + (y_{B1} - y_A)^2 \\ (x_{Ci} - x_D)^2 + (y_{Ci} - y_D)^2 &= (x_{C1} - x_D)^2 + (y_{C1} - y_D)^2 \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

得 $2(n-1)$ 个关于 (x_{B1}, y_{B1}) 、 (x_A, y_A) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 、 (x_D, y_D) 和含未知量 θ_{i1} 的机构综合方程组。其中 $(n-1)$ 个包含待求参数 (x_{B1}, y_{B1}) 和 (x_A, y_A) 的机构综合方程经整理后可以用下式表示为：

$$a_{i1} \sin \theta_{i1} + a_{i2} \cos \theta_{i1} = a_{i3} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-53)$$

式中： a_{i1} 、 a_{i2} 和 a_{i3} 只含待求参数 (x_{B1}, y_{B1}) 、 (x_A, y_A) 。

$(n-1)$ 个包含待求参数 (x_{C1}, y_{C1}) 、 (x_D, y_D) 的机构综合方程经整理后可以表示为：

$$b_{i1} \sin \theta_{i1} + b_{i2} \cos \theta_{i1} = b_{i3} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (2-54)$$

式中： b_{i1} 、 b_{i2} 和 b_{i3} 只含待求参数 (x_{C1}, y_{C1}) 、 (x_D, y_D) 。

联立式 (2-53) 和式 (2-54) 解出 $\sin \theta_{i1}$ 、 $\cos \theta_{i1}$ 。

$$\sin \theta_{i1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{i3} & a_{i2} \\ b_{i3} & b_{i2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ b_{i1} & b_{i2} \end{vmatrix}} \quad \cos \theta_{i1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i3} \\ b_{i1} & b_{i3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ b_{i1} & b_{i2} \end{vmatrix}}$$

然后利用 $\sin^2 \theta_{i1} + \cos^2 \theta_{i1} = 1$ ($i=2, 3, \dots, n$)，消去 $\sin \theta_{i1}$ 和 $\cos \theta_{i1}$ ，得 $(n-1)$ 个不含 θ_{i1} 的机构的综合方程 $F_i(x_A, y_A, x_{B1}, y_{B1}, x_{C1}, y_{C1}, x_D, y_D) = 0$ 。

由于每个机构综合方程中均含有八个待求参数，因此，要全部解出这些参数

应给出九个轨迹点的坐标。由于这八个方程均为非线性的高次方程，求解比较困难，这时预先设定一些点的位置坐标，例如：设机构的坐标原点在 A ，即 $x_A = y_A = 0$ 等，对简化求解过程是十分有利的。此外，迭代初值对计算的速度与精度也至关重要，这时用图解法来求迭代计算的初值是必要的，下面通过一个例题简要说明机构综合的过程。

例 2-21 综合一铰链四杆机构 $ABCD$ ，要求其连杆上一点 P 能顺次通过以下七点，这七点的在直角坐标系 $O-xy$ 的坐标是：

$$P_1(13.84, 188.47); P_2(-31.07, 140.64); P_3(-51.64, 96.33);$$

$P_4(32.95, 99.62); P_5(44.74, 113.95); P_6(58.62, 127.98); P_7(66.27, 215.07)$ ，其中 P_1, P_2, P_3 和 P_7 点要求分布在半径为 174 的圆弧上， P_4, P_5 和 P_6 要求分布在半径为 100 的圆弧上（以上长度单位均为 mm）。

解

因为只给出七个标点的坐标值，只能求解六个待定参数，故设 $x_A = y_A = 0$ ，需要求解的六个参数是 (x_{B1}, y_{B1}) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 和 (x_D, y_D) 。为了缩短计算机寻优的迭代时间，可采用分段综合的办法来对机构进行综合，即可先对待求参数中的某几个参数赋值，例如对 (x_D, y_D) 赋值，并使其在迭代过程中值不变，求出 (x_{B1}, y_{B1}) 和 (x_{C1}, y_{C1}) 。由于只需解四个待定参数值，故只需分别选出在两个圆弧上的五个点来进行综合，这时初选 P_1, P_2, P_3, P_5 和 P_7 是比较合理的。按上述方法求出第一组解后，改变 (x_D, y_D) 的赋值继续进行综合，求出第二组综合结果，在获得足够多的综合结果后，通过作图进行比较，选出最接近七个标点的一组综合结果作为迭代初值，按通过轨迹点为七，用六个机构综合方程中求解 (x_{B1}, y_{B1}) 、 (x_{C1}, y_{C1}) 和 (x_D, y_D) ，直

$$到 S = \sum_{i=1}^6 F_i^2 \leq \epsilon。$$

按上述过程：令 $x_A = y_A = 0$ ，用图解法初步确定 $x_D = 190.4, y_D = 1$ ，选 $P_1, P_2,$

P_3, P_5 和 P_7 点进行机构综合，当 $S = \sum_{i=1}^4 F_i^2 = 0.622 \times 10^{-14} < \epsilon$ 时，求出：

$$x_{B1} = -82.512, y_{B1} = 70.711$$

$$x_{C1} = 89.684, y_{C1} = 158.20$$

根据综合结果，作出四杆机构 AB_1C_1D ，通过比较可知：这时连杆上 P 的轨迹与给定的七个标点均比较接近，故采用上述综合结果，按轨迹通过七个点进行综合，

当 $S = \sum_{i=1}^6 F_i^2 = 0.222 \times 10^{-13} < \epsilon$ 时，得出：

$$x_A = 0$$

$$y_A = 0$$

$$x_{B1} = -95.524$$

$$y_{B1} = 80.407$$

$$x_{C1} = 76.791$$

$$y_{C1} = 170.535$$

$$x_D = 174.194$$

$$y_D = 18.575$$

最后求出：

$$L_{AB} = 124.86$$

$$L_{BC} = 194.46$$

$$L_{CD} = 180.50$$

$$L_{AD} = 175.18 \text{ (以上单位均为 mm)}$$

画出四杆机构 AB_1C_1D 及 P 点的轨迹曲线图如图 2-105 所示。

实现预期轨迹曲线机构综合的另一类问题是：给出轨迹上标点 P_i 的有限个位置的坐标值和原动连架杆对应 P_i 的有限个位置角 α_i ，要求综合四杆机构。

例 2-22 给定连杆上 P 点轨迹曲线上的五个点的坐标 $P_1(12.42, 0)$, $P_2(7.98, 1.89)$, $P_3(0.76, 1.47)$, $P_4(1.30, -0.85)$, $P_5(8.83, 0.3)$ ，对应这五个轨迹点曲柄 AB 的角位移分别为： $\alpha_1 = 4.2^\circ$, $\alpha_2 = 64.87^\circ$, $\alpha_3 = 145.82^\circ$, $\alpha_4 = 219.24^\circ$, $\alpha_5 = 303.45^\circ$ ，要求综合一铰链四杆机构 $ABCD$ 。

解

首先求曲柄上 A 、 B 铰链的位置坐标，为此先建立曲柄 AB 的刚体位移矩阵方程。在图 2-106 所示的曲柄 AB 中， A 为标点， AB 为标线，标线的标角为 α_i ，相对角位移为 $\alpha_{i1} = \alpha_i - \alpha_1$

($i=2, 3, 4, 5$)。当曲柄 AB 运动时 A 点不动，故 $x_{A1} = x_{Ai} = x_A$, $y_{A1} = y_{Ai} = y_A$ ，将标点坐标 (x_{A1}, y_{A1}) 、 (x_{Ai}, y_{Ai}) 和相对角位移 α_{i1} 代入刚体位移矩阵式 (2-37) 中，得含有待求参数 (x_A, y_A) 的曲柄位移矩阵 $[P]_{i1}$ ，由

$$\begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=2, 3, 4, 5)$$

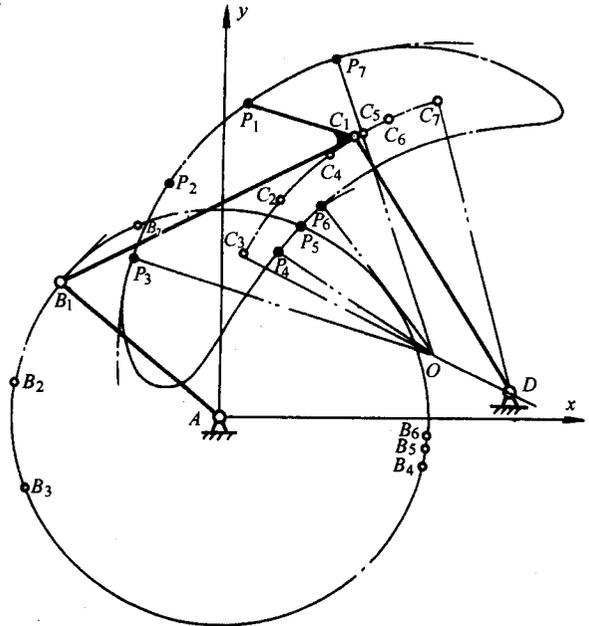


图 2-105 按轨迹点的机构综合

可解出：

$$\left. \begin{aligned} x_{B_i} &= f_{i1}(x_A, y_A, x_{B1}, y_{B1}) \\ y_{B_i} &= f_{i2}(x_A, y_A, x_{B1}, y_{B1}) \end{aligned} \right\} \quad (i=2,3,4,5) \quad (2-55)$$

在连杆上，由于标点 P 到 B 铰链的距离不变，写出 P 、 B 两点的位置不变的约束方程：

$$(x_{B_i} - x_{P_i})^2 + (y_{B_i} - y_{P_i})^2 = (x_{B1} - x_{P1})^2 + (y_{B1} - y_{P1})^2 \quad (i=2,3,4,5) \quad (2-56)$$

将式(2-55)和标点的坐标值 $(x_{P_i}, y_{P_i}) (i=1,2,3,4,5)$ 分别代入约束方程式(2-56)中，得四个含 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 的非线性方程，给出迭代初值：

$$x_A = -5.0, \quad y_A = 1.0, \quad x_{B1} = 0.65, \quad y_{B1} = 1.45。$$

用寻选的方法迭代求出：

$$x_A = -5.46, \quad y_A = 1.17, \quad x_{B1} = 0.74, \quad y_{B1} = 1.54。$$

求出 (x_A, y_A) 、 (x_{B1}, y_{B1}) 之值后，用式(2-55)可求出 $(x_{B_i}, y_{B_i}) (i=2,3,4,5)$ 。

$$\text{根据 } \theta_i = \arctg \left(\frac{y_{B_i} - y_{P_i}}{x_{B_i} - x_{P_i}} \right) \quad (i=1,2,3,4,5)$$

求出标线 \overline{PB} 的标角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 和 θ_5 后，可以求出标线 \overline{PB} 的相对角位移 $\theta_{i1} = \theta_i - \theta_1 (i=2, 3, 4, 5)$ ，将相对角位移 θ_{i1} 和标点 P_i 之值代入刚体位移矩阵式(2-37)中，得连杆 BC 的刚体位移矩阵 $[P]_{i1} (i=2, 3, 4, 5)$ ，于是有：

$$\begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = [P]_{i1} \begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=2,3,4,5)$$

将 (x_{C_i}, y_{C_i}) 与 (x_{C1}, y_{C1}) 的关系式代入连架杆 CD 的约束方程

$$\begin{aligned} (x_{C_i} - x_D)^2 + (y_{C_i} - y_D)^2 &= \\ (x_{C1} - x_D)^2 + (y_{C1} - y_D)^2 & \end{aligned} \quad (i=2,3,4,5)$$

得求解 C 、 D 铰链位置的机构的综合方程组，用图解法求出迭代初值： $x_{C1} = 14, y_{C1} = 12, y_D = 8.5, y_D = -18$ ，代入机构综合方程组中寻优迭代，最后求出：

$$x_{C1} = 16.9 \quad y_{C1} = 15.29$$

$$x_D = 9.34 \quad y_D = -20.54$$

求出铰链四杆机构各杆长分别为：

$$L_{AB} = 6.21$$

$$L_{BC} = 21.22$$

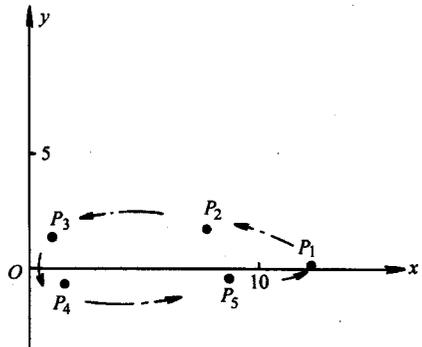
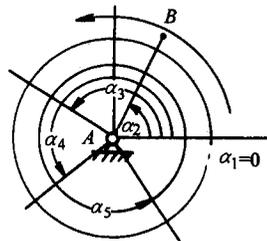


图 2-106 点位对应的给定

$$L_{CD} = 36.62$$

$$L_{AD} = 26.27$$

画出其机构运动简图及 P 点的轨迹曲线图如图 2-107 所示 (以上长度单位均为 mm)。

* 五、平面四杆机构优化设计 (简介)

前面所述的机构综合方法,理论上可求出满足有限位置要求的精确解。但如果设计中提出满足更多给定位置要求时,上述方法就不便应用了。此外,上述方法的**最大缺点是:机构是按单一目标进行综合的,综合出来的机构常常会遇到以下问题,诸如虽然满足了机构运动方面的要求,却可能没有曲柄;或运动和动力特性很差;或机构的结构尺寸不理想等等。随着现代工业的发展,人们对机构的要求愈来愈高,对机构的综合内容的要求也愈来愈多,对机构的性能要求也愈来愈优。如何提高机构的设计质量成为现代设计方法中机构设计师普遍关心的课题。

优化设计的主要特点是:通过寻优过程可以得到多目标、多约束条件、能满足机构多方面性能要求的最佳方案。虽然是近似解,但采用现代计算方法和手段,仍然可以求得很高的设计精度。因此,这种方法是现代设计方法新的发展方向,得到越来越广泛的应用。

机构优化设计是随着电子计算机的普及而迅速发展起来的一种现代设计方法。它是根据机构设计的理论和最优化数学方法建立数学模型,借助电子计算机的快速运算,在受许多因素影响的机构参数中,选出一组能最优地满足预定要求的参数而得到最优的设计方案。

例如图 2-108 所示的铰链四杆机构,希望连杆上 P 点能实现预期的轨迹曲线运动,轨迹用 n 点坐标值给出: (x_{Pi}, y_{Pi}) ($i=1, 2, \dots, n$)

最优化方法要求:当四杆机构运动时,连杆上 P 点轨迹与给出的 n 点轨迹坐

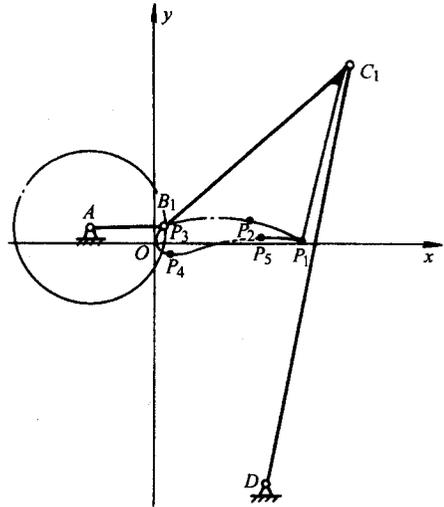


图 2-107 点位对应的轨迹综合

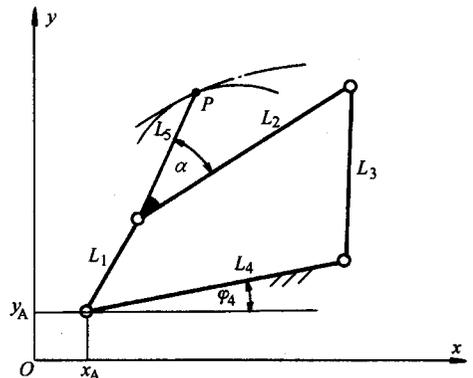


图 2-108 四杆机构优化设计的参数

标偏差最小。

为了求机构的几何参数，应首先写出 P 点与四杆机构的几何参数之间的关系。设直角坐标系 $O-xy$ 如图 2-108 所示， P 点的位置可由以下参数确定；各杆杆长 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 ； A 点的坐标 (x_A, y_A) ； l_4 的位置角 φ_4 ； l_5 与 l_2 的夹角 α 。在确定上述这些参数的优化区间时，必须考虑各杆长由于结构限制所确定的范围，曲柄存在的条件，动力性能及其他一些约束限制条件。

机构优化设计过程主要包括两方面的内容：

- 1) 建立优化的数学模型。
- 2) 根据数学模型，选用合适的优化方法，在计算机上计算最优解。

本节将重点简要介绍第一部分的内容，因为这是优化设计的关键。

(一) 优化设计的数学模型

机构优化的数学模型包括三个方面内容：确定设计变量；建立目标函数；确定约束条件。现分述如下：

1. 确定设计变量 根据设计要求预先确定数值的参数，称为设计常量。在优化设计中需不断改变数值的参数称为设计变量。例如图 2-108 所示的四杆机构，为了追求 P 点与给定轨迹点的逼近的精度，可将 (x_A, y_A) 和 φ_4 作为设计常量，其值预先给出，而将 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 和 α 作为设计变量。设计变量数量愈多，则供优选的方案也愈多，设计也愈灵活，愈容易获得所要求的优化精度，但设计的难度也愈大，所以原则上应根据优化设计的具体要求，适当地减小设计变量的数量。

当优化设计有 n 个设计变量 x_1, x_2, \dots, x_n ，可用一个矢量 x 表示为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad x \in R^n$$

2. 建立目标函数 为了评价设计方案的优劣，可以在众多的设计要求中选出一个或多个要求作为优化设计追求的目标，而将其他要求作为设计的约束限制条件。当目标确定以后，应将这些设计目标如同运动分析和机构尺度综合时那样用设计变量 x 的函数 $f(x)$ 表示出来。 $f(x)$ 称为目标函数。

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

对于有多个目标函数的优化设计，一般采用线性加权和法，即用权因子分别乘以各目标用函数然后相加成为一个总目标函数。设目标函数的数量为 m ，则总目标函数可以表示为：

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i f_i(x)$$

式中： ω_i ——权因子，它反映了该分目标的重要程度。设计者应根据分目标的

重要程度确定权因子值的大小。对于分目标重要的程度是等同的设计,可取 $\omega_i = 1$ ($i=1, 2, \dots, m$)。

目标函数的建立是优化设计的关键,若目标函数的形式选取不当,不仅会增加计算的难度,甚至会导致整个优化设计的失败。

下面以图 2-108 所示四杆机构为例,说明以连杆上 P 点与预期轨迹点坐标偏差最小为目标,建立目标函数的过程。

由图 2-108 可以看出:四杆机构上 P 点的坐标可以用机构的几何参数和运动参数表示为:

$$\begin{cases} x'_{pi} = x_A + l_1 \cos(\varphi_4 + \varphi_{1i}) + l_5 \cos(\alpha + \varphi_{2i}) \\ y'_{pi} = y_A + l_1 \sin(\varphi_4 + \varphi_{1i}) + l_5 \sin(\alpha + \varphi_{2i}) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

式中: $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ 分别为构件 1、2 对应轨迹曲线点 P_i 的角位移。从图中容易求出:

$$\varphi_{2i} = \delta_i (\beta_i - \varphi_4) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \arccos \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \varphi_{1i}}{2l_2 \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \varphi_{1i}}} \right) \\ \beta_i &= \arctg \left(\frac{l_1 \sin \varphi_{1i}}{l_4 - l_1 \cos \varphi_{1i}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

因此,四杆机构连杆上 P 的坐标 (x'_{pi}, y'_{pi}) 与预期轨迹点坐标 (x_{pi}, y_{pi}) 间的误差分别为:

$$\begin{cases} \Delta x_i = x'_{pi} - x_{pi} \\ \Delta y_i = y'_{pi} - y_{pi} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

按均方根误差来建立目标函数得:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n [(x'_{pi} - x_{pi})^2 + (y'_{pi} - y_{pi})^2]^{\frac{1}{2}}$$

从目标函数可知:如果给出了轨迹点坐标 (x_{pi}, y_{pi}) 和 φ_{1i} 的对应值 ($i=1, 2, \dots, n$),目标函数中有 $x_A, y_A, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \varphi_4, \alpha$ 共 9 个设计变量。如果没有给出 φ_{1i} 与 (x_{pi}, y_{pi}) 的对应值, φ_{1i} 可在其变化域中任取,这时目标函数共有 $9+n$ 个设计变量。

3. 确定约束条件 在优化设计中,常把某些设计要求作为设计约束条件,用数学表达式来说明对寻优目标的约束限制。

约束条件有两种表达形式:

(1) 不等式约束。不等式约束用来限制设计变量的取值范围,约束表达式常用小于或等于零的不等式表示,例如:若有 m 个不等式约束,则可将不等式约束表示为:

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

当约束不等式大于零时,例如 $g_i(x) \geq 0$,可将不等式约束改写为:

$$-g_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(2) 等式约束。若优化设计中有 p 个等式约束,则可将等式约束表示为:

$$h_i(x) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

等式约束的数量 p 应当小于设计变量的数量 n 。等式约束也可以用两个不等式约束来代替,例如 $h(x) = 0$ 可以用 $g(x) \leq 0$ 和 $-g(x) \leq 0$ 来代替。

任何一个不等式约束都把设计空间分成了两个部分:一部分是满足约束条件的称为可行域,另一部分是不满足约束条件的称为非可行域。对于有约束的优化问题,其实质就是在可行域中寻求一组设计变量,使目标函数值最优。机构的优化设计一般都是有约束的优化设计。

平面四杆机构的约束条件常有:

1) 有曲柄的条件。对于曲柄摇杆机构,若长度为 l_1 的构件为曲柄,其余各杆的长度分别为 l_2 、 l_3 和 l_4 ,则机构有曲柄的条件为:

$$l_1 + l_2 \leq l_3 + l_4$$

$$l_1 + l_3 \leq l_2 + l_4$$

$$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$$

因此,其约束条件表达式为:

$$g_1(x) = l_1 + l_2 - l_3 - l_4 \leq 0$$

$$g_2(x) = l_1 + l_3 - l_2 - l_4 \leq 0$$

$$g_3(x) = l_1 + l_4 - l_2 - l_3 \leq 0$$

2) 传动角 γ_i 在允许值范围内变化。设 φ_i 为曲柄的角位移变量,则

$$\cos \gamma_i = \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2 + 2l_1 l_4 \cos \varphi_i}{2l_2 l_3}$$

设机构传动角的许用值 $[\gamma]_{\min}$ 、 $[\gamma]_{\max}$,则应使 $[\gamma]_{\min} \leq \gamma_i \leq [\gamma]_{\max}$ ($[\gamma]_{\max} = 180^\circ - [\gamma]_{\min}$)。因此,写出约束条件为:

$$g_1(x) = \cos \gamma_i - \cos [\gamma]_{\min} \leq 0$$

$$g_2(x) = \cos [\gamma]_{\max} - \cos \gamma_i \leq 0$$

3) 杆长的取值范围。例如,当要求 $l_{1\min} \leq l_1 \leq l_{1\max}$ 时,其约束条件为:

$$g_1(x) = l_{1\min} - l_1 \leq 0$$

$$g_2(x) = l_1 - l_{1\max} \leq 0$$

4) 保证运动的连续条件。例如,当要求离散的角位移变量 φ_i 之值必须按顺序增大时,即要求 $\varphi_{i+1} - \varphi_i \geq 0$,则约束条件可以表示为:

$$g_1(x) = \varphi_i - \varphi_{i+1} \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

4. 优化设计的数学模型 设有 n 个设计变量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 它表示 n

维空间内的一个点 $(x \in R^n)$ ，在可行域内满足 m 个不等式约束条件 $g_i(x) \leq 0 (i=1, 2, \dots, m)$ 和 p 个等式约束条件 $h_i(x) = 0 (i=1, 2, \dots, p)$ ，使得目标函数 $f(x)$ 达到最小值，即 $f(x^*) = \min f(x)$ ，这就是优化设计数学模型的标准形式。 x^* 称为优化设计的优化点。

在机构设计中，有时要求目标函数值最大，例如目标函数为机构效率，这时目标函数可以写为 $-f(x^*) = \min f(x)$ 。

优化设计在数学上称为数学规划。若目标函数、约束条件都是设计变量的线函数，则称为线性规划，否则称为非线性规划。连杆机构的优化设计问题一般都是有约束的非线性规划问题。

(二) 优化问题的求解过程

优化问题的实质在数学上就是求目标函数的极小值。由于实际问题的目标函数通常比较复杂，直接用数学公式来求其极值的方法应用比较困难，故一般都采用数值迭代的方法求目标函数的近似极小值。

迭代法的基本思想是：给出一个初始设计点 $x^{(0)}$ 的设计参数值，按适当的步长沿某个可行的搜索方向“搜索”一次（即计算一次）到达 $x^{(1)}$ ，再从 $x^{(1)}$ 出发，再选一个适当步长和可行方向又搜索一次到达 $x^{(2)}$ ，这样一步一步地迭代计算下去，将产生一系列的设计点 $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ ，而每走一步的方向必须使函数值是逐渐减小的，如果第 k 次和 $k+1$ 次的函数值 $f(x^{(k)})$ 和 $f(x^{(k+1)})$ 满足：

$$\| f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \| \leq \epsilon$$

$$\text{或} \quad \| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \| \leq \epsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

式中 ϵ ——搜索精度控制量；

ϵ_i ——设计变量计算精度控制量。

这时搜索迭代计算结束，设计参数的最优解为 $x^* = x^{(k+1)}$ 。

在进行数值迭代中，不同的优化方法其搜索方向的确定和步长的取法各不相同。例如随机方向搜索法是利用计算机在区间 $[0, 1]$ 内产生的随机数来确定搜索步长，根据目标函数的下降性条件和约束可行性条件，适时改变搜索步长来进行数值迭代计算的。共轭方向法是利用在同心椭圆簇的两条平行的切线得到两切点，如果两切点的连线通过椭圆簇的共同中心（图 2-109），则以两切点的连线方向为搜索方向进行数值迭代。其他各种方法及上述介绍的方法详细内容，参见有关优化方法的文献。

当迭代计算获得一组设计变量在无约束条件下使目标函数值最小，即

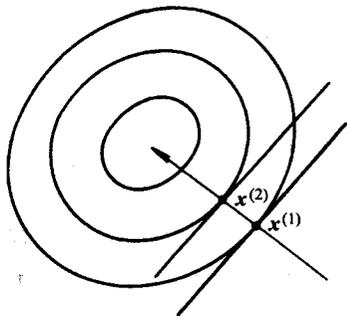


图 2-109 搜索最优解的共轭方向

$$\min_{x \in R^n} f(x) = f(x^*)$$

称为无约束最优解，无约束最优解是目标函数的极值 $f(x^*)$ 及其极值点 x^* 。当迭代计算获得的设计变量在满足约束条件下使目标函数值极小化，则称最优解 x^* 和最优值 $f(x^*)$ 为约束最优解，约束最优解不一定是目标函数的极值点和极值。例如：已知目标函数 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8$ 和约束条件： $g_1(x) = -x_1 \leq 0$ ， $g_2(x) = -x_2 \leq 0$ ， $g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$ 和 $h(x) = 73x_1^2 + 52x_2^2 + 72x_1x_2 - 356x_1 - 292x_2 + 433 = 0$ ，要求 $\min f(x_1, x_2)$ 。

从该目标函数的方程可知：该二次函数是一个顶点在 $x_1 = 2, x_2 = 2$ 的抛物球面，在 $x_1 o x_2$ 平面上其等值线是圆心在 $x_1 = 2, x_2 = 2$ 的同心圆（图 2-110）。三个不等式约束为 $x_1 o x_2$ 平面中阴影线所包围的部分，等式约束是一条椭圆形曲线（图 2-110 中的实线）。

若不考虑上述约束，其无约束最优点为等值线簇的圆心 A ，这时 $x_1 = 2, x_2 = 2$ ，目标函数有极小值 $f(x_1, x_2) = 0$ 。

若考虑所有不等式约束时，其结束最优点在设计可行域的边界线与目标函数等值线的切点 B ，这时 $x_1 = 1.4142, x_2 = 1.4142$ ，目标函数有极小化值 $f(x_1, x_2) = 0.6863$ 。

若考虑全部约束，其约束最优点在不等式约束的可行域内，等式约束曲线与等值线的切点 C ；这时 $x_1 = 0.8, x_2 = 1.1$ ，目标函数极小化值 $f(x_1, x_2) = 2.25$ 。

(三) 约束优化方法简介

机构优化设计问题绝大多数属于约束非线性规划问题，对于约束问题的优化方法可分为两类：

1) 直接法。属于这类方法的有：网格法，随机试验法等。其特点是算法简单，对目标函数无特殊要求，但对于多维问题计算量较大，所以上述方法适用于小型优化设计。

2) 间接法。这类方法适用于同时存在不等式和等式约束条件的优化设计。其基本思想是将约束优化转换成无约束极值问题。在这类方法中以惩罚函数法

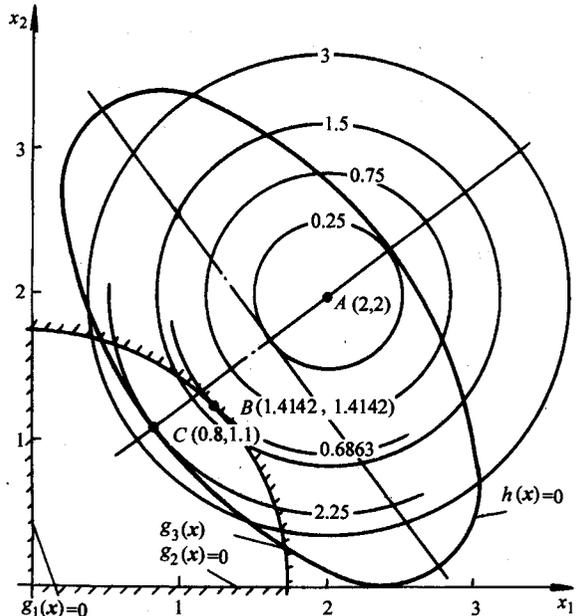


图 2-110 不同约束条件下的约束最优解

应用最广泛。

下面就网格法和惩罚函数法举例作一简单介绍：

网格法是直接在设计变量的可行域内布网格（图 2-111），并计算这些网格点处的目标函数值进行比较，找出其中值较小的点，作为第一次迭代的优化点。然后在第一次迭代优化点附近，取一定范围再细分网格，再找出其中目标函数值较小的点，作为第二次迭代的优化点。重复上述过程直到满足精度要求为止。

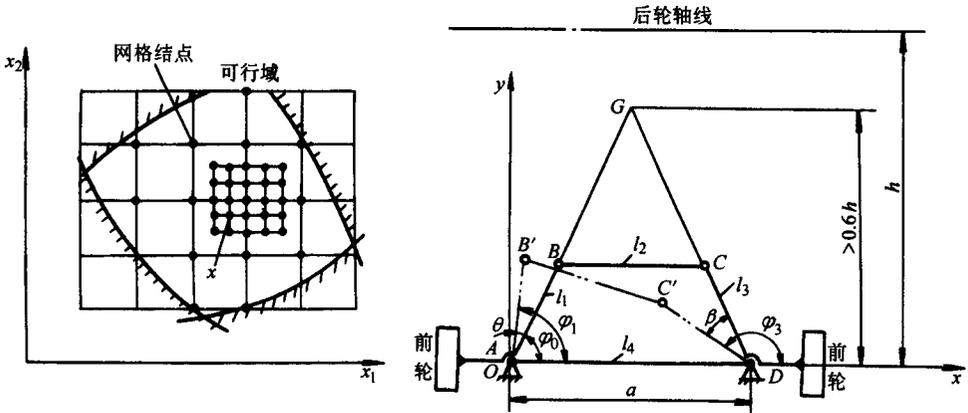


图 2-111 约束优化的网格法

图 2-112 汽车前轮转向机构优化设计变量

例 2-23 图 2-112 所示汽车前轮转向等腰梯形机构 $ABCD$ 。已知主动件 AB 转角范围 θ 为 30° 。从动件 CD 转角 β ，为保证汽车转向时两前轮轴线能始终交于后轮轴线于一点，理论上应满足：

$$\beta' = \arctg[\operatorname{tg}\theta / (1 - 0.5\operatorname{tg}\theta)]$$

转向四杆机构中， $AD = a = 1480\text{mm}$ ， $h = 2960\text{mm}$ ，试设计该四杆机构。

解

(1) 确定设计变量

该四杆机构的几何参数有： l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 和主动件的初始角 φ_0 （图 2-112）。

$$\because l_1 = l_3, l_4 = a$$

$$\therefore l_2 = a - 2l_1 \cos \varphi_0$$

所以只有两个设计变量

$$x = [l_1, \varphi_0]^T$$

(2) 建立目标函数

取 A 为坐标原点建立坐标系 $O-xy$ ，由图 2-112 知：

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \theta$$

$$\varphi_3 = 180^\circ - \varphi_0 + \beta$$

(2-57)

因此，可求出 B 、 C 点的坐标：

$$x_B = l_1 \cos \varphi_1, \quad y_B = l_1 \sin \varphi_1$$

$$x_C = a + l_1 \cos \varphi_3, \quad y_C = l_1 \sin \varphi_3$$

根据连杆 BC 在运动中长度不变为 l_2 , 得

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = l_2^2$$

整理可得

$$A \sin \varphi_3 + B \cos \varphi_3 = C$$

式中:

$$A = 2l_1^2 \sin(\varphi_0 + \theta)$$

$$B = 2l_1^2 \cos(\varphi_0 + \theta) - 2al_1$$

$$C = 2l_1^2 + 2al_1 \cos \varphi_0 - 4l_1^2 \cos^2 \varphi_0 - 2al_1(\varphi_0 + \theta)$$

解方程得

$$\varphi_3 = 2 \arctg \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C} \right)$$

将求出的 φ_3 代入式 (2-57) 中得 β 与 θ 、 l_1 、 φ_0 的函数关系式。用从动杆 CD 的实际转角 β 与理论要求的转角 β' 的均方根误差最小建立目标函数得:

$$f(x) = \int_0^{30^\circ} (\beta' - \beta)^2 d\theta$$

采用数值方法, 用梯形求积公式近似计算上式得

$$f(x) = \frac{1}{2}(\beta'_0 - \beta_0)^2 \Delta\theta + \sum_{i=1}^{19} [(\beta'_i - \beta_i)^2 \Delta\theta] + \frac{1}{2}(\beta'_{20} - \beta_{20})^2 \Delta\theta$$

式中 已将主动件 AB 转角 θ 分成 20 等分, 故 $\Delta\theta = \frac{30^\circ - 0}{20} = 1.5^\circ$ 。

(3) 确定约束条件

根据汽车设计对转向机构的空间、布置和结构要求得

$$0.1a \leq l_1 \leq 0.4a$$

故

$$g_1(x) = 14.8 - l_1 \leq 0$$

$$g_2(x) = l_1 - 59.2 \leq 0$$

因为 \overline{AB} 与 \overline{CD} 交点 G 离前桥 AD 的距离必须在 $0.6h$ 以外, 故

$$\arctg \left(\frac{1.2h}{a} \right) \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$$

即

$$g_3(x) = 1.176 - \varphi_0 \leq 0$$

$$g_4(x) = \varphi_0 - 1.57 \leq 0$$

所以汽车前轮转向机构的优化设计是二维、四个不等式约束的非线性优化问题。用网格法进行优化计算, 当

$$f(x^*) = 2.56 \times 10^{-5} \text{ 时}$$

$$x_1^* = l_1 = 148 \text{ mm}, \quad x_2^* = \varphi_0 = 1.226 \text{ rad}$$

惩罚函数法是将有约束的优化设计问题转变为无约束问题求极值的一种方法。惩罚函数法的基本思想是：重新构造一个包含原目标函数 $f(x)$ 和约束条件函数 $g_i(x) (i=1, 2, \dots, m)$ 的新目标函数 $\phi(x, r^{(k)})$ ，从而将原约束优化问题转化为新目标函数的无约束优化问题。在可行域内新目标函数

$$\phi(x, r^{(k)}) = f(x) - r^{(k)} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$$

式中： $-r^{(k)} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$ 称为惩罚项， $r^{(k)}$ 称为惩罚因子。当设计点远离约束边界时，惩罚项值很小；当设计点在约束边界时，其值趋于无穷大，从而使新目标函数 $\phi(x, r^{(k)})$ 的函数值急剧增大，成为搜索点不能逾越的障碍。如最优解在约束面上，就要逐渐减小惩罚因子 $r^{(k)}$ ，迫使惩罚项趋于零，使目标函数 $\phi(x, r^{(k)})$ 的极值点收敛到原目标函数 $f(x)$ 的约束最优解。因此，惩罚因子应满足

$$r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = 0$$

现用一个简单例子来说明惩罚函数法的基本特点。

例如：求 $\min_{x \in R^n} f(x) = x$ 受约束于 $g(x) = 1 - x \leq 0$ 的约束最优化问题。从图 2-113 中可以直接看出：最优解为 $x^* = 1$ ， $f(x^*) = 1$ 。若用惩罚函数法求解此约束优化问题，则惩罚函数为：

$$\phi(x, r^{(k)}) = x - r^{(k)} \frac{1}{1-x}$$

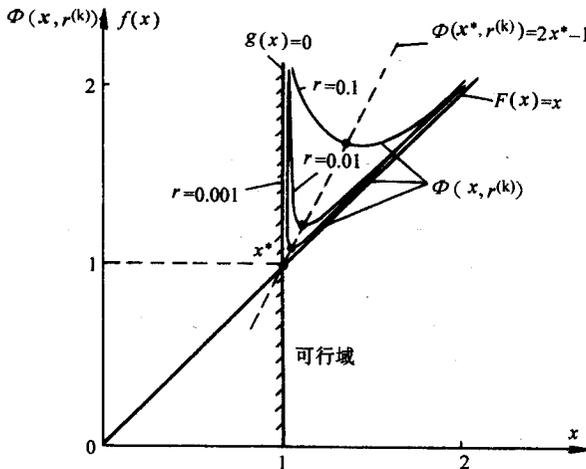


图 2-113 惩罚函数的收敛

通过对惩罚函数求极值知：惩罚函数的极值点为 $1 + \sqrt{r^{(k)}}$ ，惩罚函数的极小值为 $1 + 2\sqrt{r^{(k)}}$ 。当 $r^{(k)} \rightarrow 0$ 时，极值点 $x^* = 1$ ，目标函数 $\phi(x, r^{(k)})$ 收敛到原目

标函数的约束最优点 $f(x^*)=1$ 。

例 2-24 图 2-114 所示四杆机构 ABCD，给定轨迹曲线上 10 个点的坐标为：

$P_1(9.50, 8.26)$, $P_2(9, 8.87)$, $P_3(7.96, 9.51)$, $P_4(5.65, 9.94)$, $P_5(4.36, 9.7)$, $P_6(3.24, 9)$, $P_7(3.26, 8.36)$, $P_8(4.79, 8.11)$, $P_9(6.58, 8)$, $P_{10}(9.12, 7.89)$ 。要求保证机构最小传动角 $\gamma_{\min} \geq 30^\circ$ ，试设计此平面四杆机构，使连杆上 P 点的连杆曲线坐标 (x'_{pi}, y'_{pi}) 最佳逼近上述 10 点坐标 (x_{pi}, y_{pi}) 。

解

(1) 确定设计变量

连杆上点 P 在 O-xy 坐标系中的位置由以下参数确定： $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, x_A, y_A, \alpha, \varphi_4$ ，曲柄 AB 转角 φ_1 作为自变量，故设计变量为：

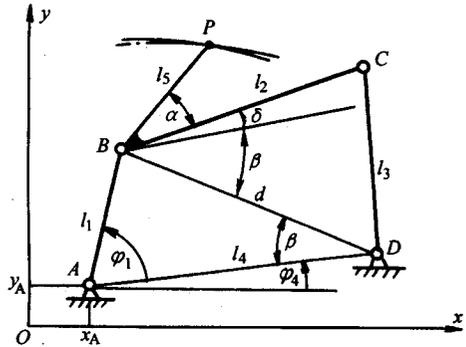


图 2-114 优化设计示例

$$x = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, x_A, y_A, \alpha, \varphi_4]^T$$

(2) 建立目标函数

由图 2-114 得连杆上点 P 的坐标为：

$$\left. \begin{aligned} x'_p &= x_A + l_1 \cos(\varphi_4 + \varphi_1) + l_5 \cos(\alpha + \delta + \varphi_4) \\ y'_p &= y_A + l_1 \sin(\varphi_4 + \varphi_1) + l_5 \sin(\alpha + \delta + \varphi_4) \end{aligned} \right\} \quad (2-58)$$

式中：

$$\delta = \arccos \frac{l_2^2 + d^2 - l_3^2}{2l_2 d} - \beta$$

$$\beta = \arcsin \frac{l_1 \sin \varphi_1}{d}$$

$$d = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \varphi_1}$$

用图解法作图求出各设计变量的初始方案，将曲柄 AB 的一周转角分为 10 等分，得 $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \dots, \varphi_1^{(10)}$ 分别代入式 (2-58) 中，可得连杆上点 P 的坐标值 (x'_{pi}, y'_{pi}) ($i=1, 2, \dots, 10$)。为了使连杆曲线最佳逼近已知曲线坐标 (x_{pi}, y_{pi}) ($i=1, 2, \dots, 10$)，用 10 个点的均方根误差最小来建立目标函数，即：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{10} [(x'_{pi} - x_{pi})^2 + (y'_{pi} - y_{pi})^2]^{\frac{1}{2}}$$

(3) 约束条件

1) 必须保证四杆机构中 l_1 为曲柄得：

$$g_1(x) = l_1 + l_4 - l_2 - l_3 \leq 0$$

$$g_2(x) = l_1 + l_3 - l_2 - l_4 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = l_1 + l_2 - l_3 - l_4 \leq 0$$

2) 各杆长必须大于零, 由于曲柄 l_1 为最短杆, 所以只需:

$$g_4(\mathbf{x}) = -l_1 \leq 0$$

3) 满足最小传动角要求 $\gamma_{\min} \geq 30^\circ$ 得:

$$g_5(\mathbf{x}) = 30^\circ - \arccos \left[\frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_4 - l_1)^2}{2l_2l_3} \right] \leq 0$$

$$g_6(\mathbf{x}) = 30^\circ - \left[180^\circ - \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_4 + l_1)^2}{2l_2l_3} \right] \leq 0$$

该问题为九维、六个不等式约束的非线性优化问题, 用惩罚函数法求得最优方案

$$l_1^* = 1.678, l_2^* = 5.819, l_3^* = 5.407, l_4^* = 7.03$$

$$l_5^* = 7.973, x_A^* = 2.066, y_A^* = 2.249, \alpha^* = 79.016^\circ, \varphi_A^* = -70.29^\circ$$

* 第五节 空间连杆机构

构件不都对同一平面作相互平行的平面运动的连杆机构, 称为空间连杆机构。组成空间连杆机构的运动副, 除转动副 (R) 和移动副 (P) 外, 还可能有球面副 (S)、球销副 (S')、圆柱副 (C) 和螺旋副 (H) 等 (图 2-115)。空间连杆机构可分为闭链型和开链型两类。闭链型的空间连杆机构在轻工机械、农业机械和航空运输机械中得到较多的应用, 例如图 2-21 所示万向联轴节和图 2-1 所示的飞机起落架等等。开链型空间连杆机构在机械手和机器人中应用较多, 例如图 2-116 所示的工业机器人。

与平面连杆机构比较, 空间连杆机构结构紧凑, 运动可靠。空间连杆机构所能实现的运动, 不仅多样而且更加复杂。需要用复杂的平面连杆机构才能实现的运动, 以及用平面连杆机构根本无法实现的运动, 基本上都可以通过空间连杆机构来实现。

由于空间连杆机构运动学和动力学特性以及空间运动副的结构比较复杂、不易想象, 缺少便于为一般设计人员掌握应用的分析设计资料, 因此使其应用受到一定的限制。随着电子计算机的普遍应用, 空间连杆机构的分析获得

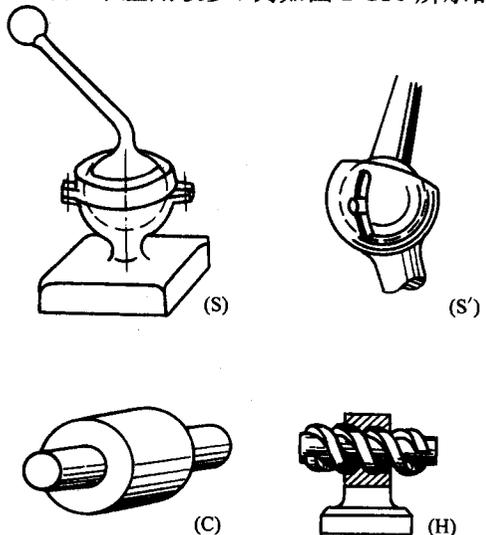


图 2-115 常用空间运动副

迅速发展,借助电子计算机辅助分析的解析方法成为研究空间连杆机构的主要方法。按照所用数学工具的不同,空间连杆机构的解析法种类也不少,本节主要介绍基于坐标变换矩阵运算的解析法。下面先来讨论坐标变换。

一、坐标变换

在对机构进行运动分析时,为了确定空间机构中各运动构件的位置,常需要以运动构件为基础建立多个运动坐标系。为了确定各运动参数间的相互关系,又必须将各运动坐标系的运动参数变换到一个统一的坐标系中。因此,坐标变换是研究空间机构运动分析的重要数学工具。下面介绍几种空间机构运动分析常用的坐标变换矩阵。

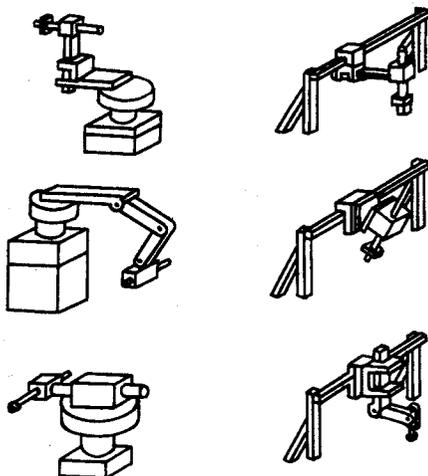


图 2-116 机器人结构型式

(1) 共原点的坐标变换

1) 绕一个坐标轴旋转的坐标变换。如图 2-117a 所示,坐标系 $O-x_j y_j z_j$ (以下简称 j 坐标系) 可以认为是由 i 坐标系 $O-x_i y_i z_i$ 绕 z_i 轴转过角 φ_{ij} 得到的。转角 φ_{ij} 的下标表示由 i 坐标到 j 坐标。转角 φ_{ij} 的正负按右手定则确定:即右手的姆指端与坐标转轴正方向一致,四指端握转的方向为 φ_{ij} 正方向。

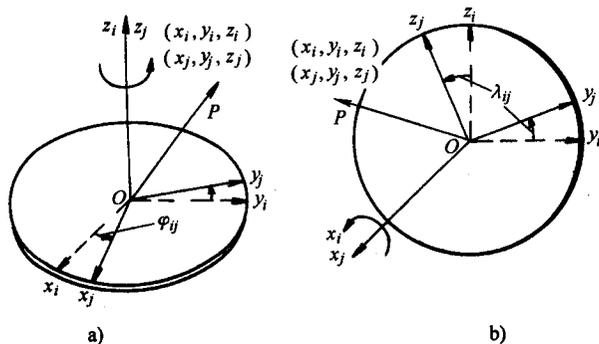


图 2-117 共原点的坐标变换

a) 绕 Z 轴旋转的坐标变换 b) 绕 X 轴旋转的坐标变换

设空间一点 P 的位置由矢量 $r = \overrightarrow{OP}$ 唯一确定, P 点在 i 、 j 坐标系的坐标分别为: $P(x_i, y_i, z_i)$ 和 $P(x_j, y_j, z_j)$, 则点 P 由 j 坐标系到 i 坐标系的坐标变换为:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_j \cos \varphi_{ij} - y_j \sin \varphi_{ij} + 0 \cdot z_j \\ y_i &= x_j \sin \varphi_{ij} + y_j \cos \varphi_{ij} + 0 \cdot z_j \\ z_i &= 0 \cdot x_j + 0 \cdot y_j + z_j \end{aligned} \right\}$$

将其表示为矩阵为：

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{r}_j \quad (2-59)$$

式中： $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j, z_j]^T$

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & -\sin\varphi_{ij} & 0 \\ \sin\varphi_{ij} & \cos\varphi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

\mathbf{R}_{ij} 的下标 ij 表示该变换为 j 坐标系到 i 坐标系的变换。

因为矩阵 \mathbf{R}_{ij} 的行列式 $\det \mathbf{R}_{ij} \neq 0$, 故 \mathbf{R}_{ij} 有逆阵 $\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^{-1}$, 将式 (2-59) 两端同乘以 \mathbf{R}_{ij}^{-1} 得：

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_{ij}^{-1} \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji} \mathbf{r}_i$$

式中：

$$\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & \sin\varphi_{ij} & 0 \\ -\sin\varphi_{ij} & \cos\varphi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

式 (2-61) 即为点 P 由 i 坐标系到 j 坐标系的坐标变换矩阵。可以看出： \mathbf{R}_{ij} 和 \mathbf{R}_{ji} 既互为逆矩阵，又互为转置矩阵，即 $\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^{-1} = \mathbf{R}_{ij}^T$ 。事实上，将点 P 由 j 坐标系到 i 坐标系的转角 φ_{ij} 改为 $-\varphi_{ij}$ ，将 $-\varphi_{ij}$ 代入式 (2-60) 中，即可得到式 (2-61)。

图 2-117b 所示坐标系 $O-x_j y_j z_j$ 可以看成是由坐标系 $O-x_i y_i z_i$ 绕 x_i 轴转过 λ_{ij} 得到的，转角 λ_{ij} 的正负仍按右手定则确定。按上述方法不难得到绕 x_i 轴的旋转变换矩阵：

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda_{ij} & -\sin\lambda_{ij} \\ 0 & \sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} \quad (2-62)$$

$$\mathbf{R}_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda_{ij} & \sin\lambda_{ij} \\ 0 & -\sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix}$$

2) 绕两个坐标轴旋转的坐标变换。图 2-118 所示坐标系 $O-x_j y_j z_j$ 可以看成是先由坐标系 $O-x_i y_i z_i$ 绕 z_i 轴旋转角 φ_{ij} ，得到中间过渡坐标系 $O-x_k y_k z_k$ ，再由坐标系 $O-x_k y_k z_k$ 绕 x_k 轴旋转角 λ_{kj} 得到的。因此，坐标系中的点 P 由 j 坐标系到 k 坐标系的坐标变换为：

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{kj} \mathbf{r}_j$$

由 k 坐标系到 i 坐标的坐标变换为：

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ik} \mathbf{r}_k$$

故点 P 由 j 坐标系到 i 坐标的坐标变换为：

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ik} \mathbf{R}_{kj} \mathbf{r}_j$$

式中：旋转变换矩阵 \mathbf{R}_{ik} 和 \mathbf{R}_{kj} 的形式分别如式 (2-60) 和式 (2-62) 所示。将上述两式代入得 j 坐标系到 i 坐标系的坐标变换矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{ik} \mathbf{R}_{kj} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & -\sin\varphi_{ij} & 0 \\ \sin\varphi_{ij} & \cos\varphi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda_{ij} & -\sin\lambda_{ij} \\ 0 & \sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & -\cos\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & \sin\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} \\ \sin\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & -\sin\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} \\ 0 & \sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-63)$$

同理，点 P 由 i 坐标系到 j 坐标系的坐标变换为：

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_{ij}^{-1} \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{kj}^{-1} \mathbf{R}_{ik}^{-1} \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{R}_{ik}^T \mathbf{r}_i = [\mathbf{R}_{ik} \mathbf{R}_{kj}]^T \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji} \mathbf{r}_i$$

式中：

$$\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & \sin\varphi_{ij} & 0 \\ -\cos\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & \sin\lambda_{ij} \\ \sin\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & -\sin\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

需要指出：矩阵乘法不具有交换律的性质，即 $\mathbf{R}_{ik} \mathbf{R}_{kj} \neq \mathbf{R}_{kj} \mathbf{R}_{ik}$ 。也就是说，先绕 z_i 轴转 φ_{ij} 角，再绕 x_i 轴转 λ_{ij} 角得到的坐标变换与先绕 x_i 轴转 λ_{ij} 角再绕 z_i 轴转 φ_{ij} 角得到的坐标变换是不相同的。

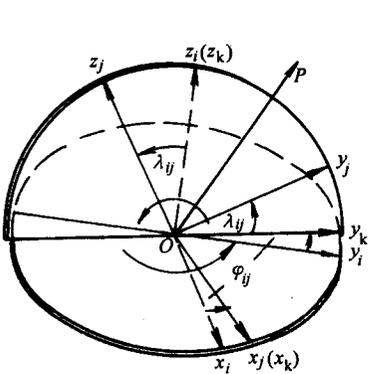


图 2-118 绕两个坐标轴旋转的坐标变换

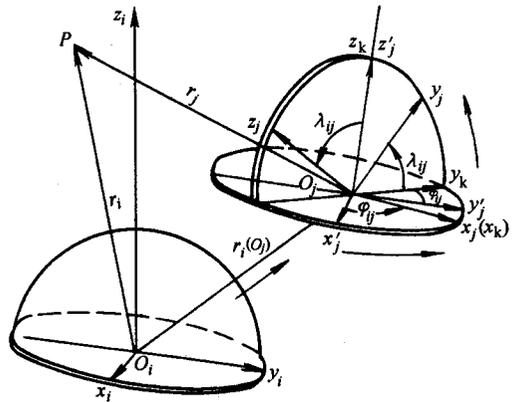


图 2-119 不共原点的坐标变换 (一)

(2) 不共原点的坐标变换

1) 平移旋转坐标变换。图 2-119 所示坐标系 $O-x_j y_j z_j$ 的变换，可以看成是： i 坐标系随其原点 O_i 沿 $\overline{O_i O_j}$ 平移到 $O_j-x'_j y'_j z'_j$ 坐标系的 O_j 点，再先后绕 z'_j 轴转过 φ_{ij} 角后，再绕 x_j 轴旋转 λ_{ij} 角得到的。

设 O_j 点在 i 坐标系中的位置矢量为 $r_i^{(oj)}$, P 点在 i 坐标系中的位置矢量为 r_i , 在 j' 坐标系中的位置矢量为 r_j' . P 点由 j 坐标系到 j' 坐标系的坐标变换为:

$$r_j' = R_{ij} r_j$$

故

$$r_i = r_i^{(oj)} + r_j' = r_i^{(oj)} + R_{ij} r_j$$

式中:

$$r_i = [x_i, y_i, z_i]^T, r_j = [x_j, y_j, z_j]^T,$$

$$r_i^{(oj)} = [x_i^{(oj)}, y_i^{(oj)}, z_i^{(oj)}]^T, R_{ij} \text{ 由式 (2-63) 确定}$$

上式可进一步合并、简写为下面的矩阵:

$$\begin{bmatrix} r_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ij} & r_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_j \\ 1 \end{bmatrix} = M_{ij} \begin{bmatrix} r_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-65)$$

式中: M_{ij} 为 4×4 的方阵。式 (2-65) 给出了坐标系经平移、旋转后, 坐标系 j 相对于坐标系 i 的坐标变换关系。

2) H-D 矩阵。H-D 矩阵是 Hartenberg-Denavit 矩阵的简称, 它是空间低副机构运动分析的基本矩阵之一, 它对于由转动副、移动副、圆柱副及螺旋副等组成的空间连杆机构的运动分析十分方便。因为矩阵中只包含有两个相对转动参数, 而球面副具有三个相对转动参数, 因此它不适用于有球面副的场合。H-D 矩阵实质上是另一种形式的 M_{ij} 矩阵。

如图 2-120 所示, 在推导点 P 由 i 坐标系到 j 坐标系的坐标变换时, 坐标系 $O_j-x_j y_j z_j$ 可以看成是沿坐标系 $O_i-x_i y_i z_i$ 沿 z_i 轴平移距离 S_i 到 $O_k-x_k y_k z_k$ 坐标系, 然后绕 z_i 轴转 φ_i 角后, 沿 x_j 轴平移距离 h_j , 然后再绕 x_j 轴转 λ_{ij} 角所得到的。从图中可以得出:

$$r_i^{(oj)} = S_i^{(ok)} + h_j^{(oj)}$$

式中, $r_i^{(oj)}$ 、 $S_i^{(ok)}$ 分别表示点 O_j 和 O_k 在

i 坐标系中的位置矢量; $h_j^{(oj)}$ 为点 O_j 在 j 坐标系中的位置矢量。将 $h_j^{(oj)}$ 从 j 坐标系变换到统一的 i 坐标系得

$$r_i^{(oj)} = S_i^{(ok)} + R_{ij} h_j^{(oj)}$$

式中:

$S_i^{(ok)} = [0, 0, S_i]^T$, $h_j^{(oj)} = [h_j, 0, 0]^T$, 矩阵 R_{ij} 由式 (2-63) 确定。将式 (2-63) 代入上式得:

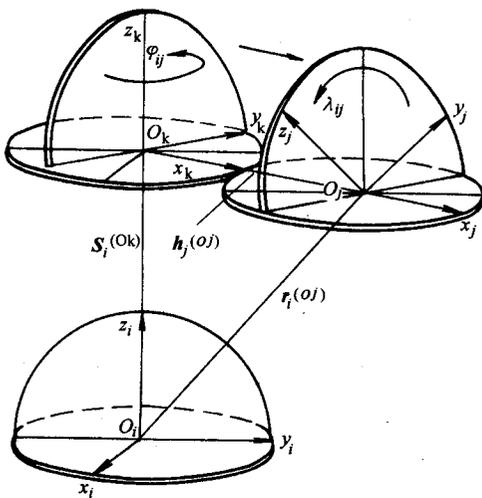


图 2-120 不共原点的坐标变换 (二)

$$\mathbf{r}_i^{(oj)} = \begin{bmatrix} x_i^{(oj)} \\ y_i^{(oj)} \\ z_i^{(oj)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & -\cos\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & \sin\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} \\ \sin\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & -\sin\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} \\ 0 & \sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_j\cos\varphi_{ij} \\ h_j\sin\varphi_{ij} \\ S_i \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

将式(2-66)代入(2-65)中得:

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & -\cos\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & \sin\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & h_j\cos\varphi_{ij} \\ \sin\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & -\sin\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & h_j\sin\varphi_{ij} \\ 0 & \sin\lambda_{ij} & \cos\lambda_{ij} & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

\mathbf{M}_{ij} 的逆矩阵 $\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{M}_{ij}^{-1}$ 可以由下面的方法推出。将 \mathbf{M}_{ij} 分解

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据可逆矩阵的反序定律

$$\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{M}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

用分块矩阵的求逆公式,并注意到 $\mathbf{R}_{ij}^{-1} = \mathbf{R}_{ji}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ji} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此,

$$\mathbf{M}_{ji} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ji} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{r}_i^{(oj)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ji} & \mathbf{R}_{ji}(-\mathbf{r}_i^{(oj)}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将式(2-64)和式(2-66)代入 $\mathbf{R}_{ji}(-\mathbf{r}_i^{(oj)})$ 中可得

$$\mathbf{R}_{ji}(-\mathbf{r}_i^{(oj)}) = \begin{bmatrix} -h_j \\ -S_i\sin\lambda_{ij} \\ -S_i\cos\lambda_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_j^{(oi)}$$

$\mathbf{r}_j^{(oi)}$ 为在*i*坐标系中的矢量,经*i*坐标系到*j*坐标系的坐标变换后, $\overrightarrow{O_iO_j}$ 在*j*坐标系中的矢量为 $\overrightarrow{O_jO_i} = \mathbf{r}_j^{(oi)} = -\mathbf{r}_i^{(oj)}$; O_i 点在*j*坐标系的坐标为

$$[-h_j, -S_i\sin\lambda_{ij}, -S_i\cos\lambda_{ij}]^T$$

所以:

$$\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{M}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ij} & \sin\varphi_{ij} & 0 & -h_j \\ -\cos\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & \sin\lambda_{ij} & -S_i\sin\lambda_{ij} \\ \sin\lambda_{ij}\sin\varphi_{ij} & -\sin\lambda_{ij}\cos\varphi_{ij} & \cos\lambda_{ij} & -S_i\cos\lambda_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

必须指出：当位移矢量 $S_i^{(ok)}$ 和 $h_j^{(oj)}$ 方向分别与 z_i 轴和 x_j 轴正向一致时，式 (2-67) 和 (2-68) 中的 S_i 和 h_j 取正值，否则取负值。

利用 H-D 矩阵及其逆矩阵，点 P 在 i 、 j 两坐标系中坐标变换的关系为：

$$\begin{bmatrix} r_i \\ 1 \end{bmatrix} = M_{ij} \begin{bmatrix} r_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_j \\ 1 \end{bmatrix} = M_{ji} \begin{bmatrix} r_j \\ 1 \end{bmatrix} = M_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} r_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

二、闭链型空间四杆机构的运动分析

与平面机构的运动分析一样，空间四杆机构运动分析的关键也是建立构件间的相对位移方程。位移方程一旦确立，对时间求导数就能很容易地解出各构件的速度和加速度。利用前面讲过的 H-D 矩阵，能够比较方便地建立起闭链型空间四杆机构构件间的位移方程。

1. 空间 RSSR 四杆机构运动分析 空间 RSSR 四杆机构 $ABCD$ 的结构简图及机构运动简图如图 2-121 所示。图示空间 RSSR 四杆机构 AB 构件为曲柄，长度为 l_1 ， CD 构件为摇杆，长度为 l_3 （两连架杆均用转动副和机架相联），故又常称为空间曲柄摇杆机构。连杆 BC 用两球面副 S 和两连架杆相联，计算该机构的自由度可知：该机构存在局部自由度 ($F=3 \times 6 - 2 \times 3 - 2 \times 5 = 2$)。在高速机械中，为了减小球面副中的摩擦和噪声，常把两个球面副中的一个改为球销副 S' （图 2-121a 中的 C 运动副），这时 $F=3 \times 6 - 3 - 4 - 2 \times 5 = 1$ 。

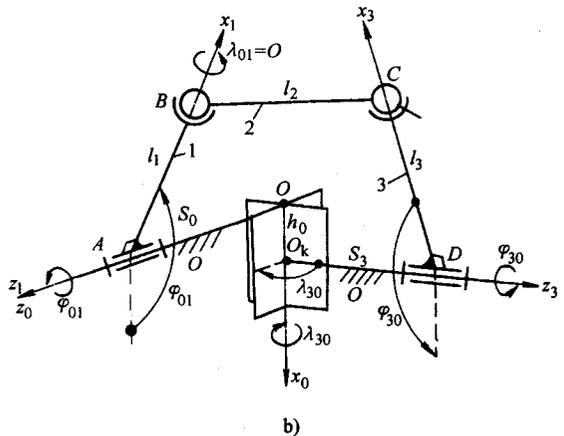
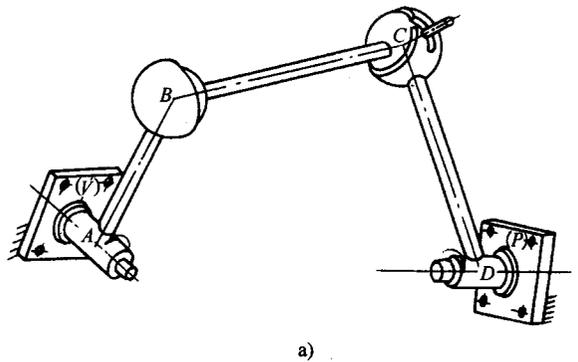


图 2-121 空间四杆机构的运动分析

a) 机构结构图 b) 坐标系及运动参数

为了比较方便地确定曲柄

与摇杆之间的角位移关系，设想将连杆 2 拆离，将原机构变为两连架杆 1、3 与机架 4 组成的两个开链，然后利用 H-D 矩阵分别建立两连架杆上 B 、 C 铰链点在同

一定坐标系中的位置关系,再利用 BC 杆长为定长作为 B 、 C 位置的约束条件,建立起整个机构的位置方程。为了运用 H-D 矩阵进行位置分析,按上节所述坐标选取原则来确定各坐标系。

在图 2-121 所示的空间四杆机构 $ABCD$ 中,主动件 AB 上固结有坐标系 $A-x_1(y_1)z_1$,其中 x_1 轴与 \overrightarrow{AB} 重合, z_1 轴与 AB 杆的回转轴重合,方向如图所示(为了图示更清楚,图中所有坐标系的 y 轴均不画出, y 轴的方向可用右手定则来确定)。从动杆 CD 上固结有坐标系 $D-x_3(y_3)z_3$,其中 x_3 轴与 \overrightarrow{CD} 重合, z_3 轴与 CD 杆的回转轴重合方向如图所示。机架上的坐标系为 $O-x_0(y_0)z_0$,其中 z_0 与 z_1 方向一致, x_0 轴为 z_3 轴与 z_1 轴的公垂线,方向如图向下。 x_0 与 z_0 和 z_3 轴的交点分别在 O 和 O_K 。在给出了机构的结构参数: l_1 、 S_0 、 h_0 、 λ_{30} 、 S_3 、 l_3 和相对运动参数 φ_{01} 、 φ_{03} 后,根据图 2-121 容易看出坐标系 $O-x_0(y_0)z_0$ 和 $A-x_1(y_1)z_1$ 的坐标变换途径为:

$$O-x_0(y_0)z_0 \xrightarrow[\text{平移 } S_0]{\text{沿 } z_0 \text{ 轴}} A-x_0(y_0)z_0 \xrightarrow[\text{转 } \varphi_{01} \text{ 角}]{\text{绕 } z_0 \text{ 轴}} A-x_1(y_1)z_1$$

设球面副中心 B 在机架坐标系 $O-x_0(y_0)z_0$ 中的坐标分量为 (x_B, y_B, z_B) , B 点在 $A-x_1(y_1)z_1$ 中的坐标为 $(l_1, 0, 0)$,故

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中, M_{01} 由式 (2-67) 确定。注意到 (2-67) 式中, $\varphi_j = \varphi_{01}$, φ_{01} 为 x_0 轴到 x_1 轴的夹角,按右手定则判别其值为正。 $\lambda_{ij} = \lambda_{01} = 0$, $h_j = 0$, $S_i = S_0$, 将这些参数代入 M_{ij} 中,可求出 M_{01} ,再根据上式得:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_{01} \\ l_1 \sin \varphi_{01} \\ S_0 \end{bmatrix} \quad (2-69)$$

坐标系 $D-x_3(y_3)z_3$ 到 $O-x_0(y_0)z_0$ 的坐标变换途径为:

$$D-x_3(y_3)z_3 \xrightarrow[\text{绕 } z_3 \text{ 轴转 } \varphi_{30} \text{ 角}]{\text{沿 } z_3 \text{ 轴平移 } -S_3} O_K-x_0(y_3)z_3 \xrightarrow[\text{绕 } x_0 \text{ 轴转 } \lambda_{30} \text{ 角}]{\text{沿 } x_0 \text{ 轴平移 } -h_0} O-x_0(y_0)z_0$$

设 C 点在机架坐标系 $O-x_0(y_0)z_0$ 中的坐标为 (x_C, y_C, z_C) , C 点在 $D-x_3(y_3)z_3$ 中的坐标为 $(l_3, 0, 0)$,故

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} = M_{03} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = M_{30}^{-1} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将 φ_{30} 、 λ_{30} 、 $-S_3$ 、 $-h_0$ 代入式 (2-68) 中得 M_{30}^{-1} ，注意到 $\varphi_{30} = -\varphi_{03}$ ，根据上式可得：

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos \varphi_{03} + h_0 \\ l_3 \cos \lambda_{30} \sin \varphi_{03} + S_3 \sin \lambda_{30} \\ -l_3 \sin \lambda_{30} \sin \varphi_{03} + S_3 \cos \lambda_{30} \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

B、C 两点在运动中的距离不变，等于连杆长度 l_2 ，因此有：

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l_2^2$$

将式 (2-69) 和 (2-70) 代入上式中得：

$$A \sin \varphi_{03} + B \cos \varphi_{03} + C = 0 \quad (2-71)$$

式中：

$$\begin{aligned} A &= \frac{S_0 \sin \lambda_{30}}{l_1} - \cos \lambda_{30} \sin \varphi_{01} \\ B &= \frac{h_0}{l_1} - \cos \varphi_{01} \\ C &= \frac{l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 + S_0^2 + S_3^2 + h_0^2}{2l_1 l_3} - \frac{S_3 \sin \lambda_{30} \sin \varphi_{01} + h_0 \cos \varphi_{01}}{l_3} + \frac{S_0 S_3 \cos \lambda_{30}}{l_1 l_3} \end{aligned}$$

解此关于 φ_{03} 的方程得：

$$\varphi_{03} = 2 \arctg \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C}$$

式中根号前的“±”表明：给出主动件一个角位置 φ_{01} ，从动件有两个可能的位置，即机构有两种装配模式。因此，具体取值应根据机构运动简图及运动连续性来确定。

将上式对时间求导数，代入原动件的运动参数即可求出从动构件的角速度和角加速度。

2. 球面四杆机构（万向联轴节）的运动分析 单万向联轴节的结构简图如图 2-122a 所示，单万向联轴节中所有的转动副均分布在同一球面，它们的轴线都汇交于一点，故这种空间四杆机构称为球面四杆机构。运动输入轴 1 与运动输出轴 3 均为端部带叉的结构，连接两叉的中间构件——连杆为十字架形状。当轴 1 与轴 3 共线时，输出角速度与输入角速度相等；当轴 1 与轴 3 不共线夹 α 角时，轴 1 作等速回转，轴 3 作变速回转，它们之间的转动关系，可用解析法求出。分析时采用拆杆法，即设想将连杆 2 拆离，但运动输出轴的叉平面与运动输入轴的叉平面必须相互垂直，并以此作为约束条件来建立运动输入轴与输出轴的角位置关系。

为了建立运动输入轴 1 与输出轴 3 的角位置关系，在图 2-122b 所示的机构简图中，设置了随轴转动的动坐标系： $O-x_1 y_1 z_1$ 、 $O-x_3 y_3 z_3$ 和两个固定坐标系：

$O-x_4y_4z_4$ 、 $O-x'_4y'_4z'_4$ 。在垂直于运动输入轴 1 的回转平面 I 上，以两叉端连线为 x_1 轴，以轴 1 的回转轴为 z_1 轴建立动坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 。固定坐标系 $O-x_4y_4z_4$ 的 z_4 轴与 z_1 轴共线且方向相同， x_1 轴与 y_4 轴的夹角 θ_1 为叉端面相对机架坐标的转角。在垂直于运动输出轴 3 的回转平面 III 上，以从动叉两端连线为 x_3 轴，以从动轴轴线为 z_3 轴建立动坐标系 $O-x_3y_3z_3$ ， x_3 轴与 x_1 轴相互垂直。固定坐标系 $O-x'_4y'_4z'_4$ 的 z'_4 轴与 z_3 轴共线且方向相同， x_3 轴与 x'_4 轴的夹角 θ_3 为从动叉端面相对于机架的角位移。主动轴 1 与从动轴 3 的轴间夹角为 α 。设沿 x_1 轴正向有单位矢量 $e^{(1)}$ ，沿 x_3 轴正向有单位矢量 $e^{(3)}$ 。从图中可以看出： $e^{(1)}$ 在 $O-x_4y_4z_4$ 坐标系的坐标 $e_4^{(1)}$ 为 $(-\sin\theta_1, \cos\theta_1, 0)$ ； $e^{(3)}$ 在 $O-x'_4y'_4z'_4$ 坐标系的坐标 $e_4^{(3)}$ 为 $(\cos\theta_3, \sin\theta_3, 0)$ ，因为坐标系 $O-x'_4y'_4z'_4$ 可以看成是由坐标系 $O-x_4y_4z_4$ 绕 x_4 轴转过角 α 得到的，根据绕 x_4 轴的旋转变换矩阵公式 (2-62)，注意到从平面 I 到平面 III 的转角 α 为负得：

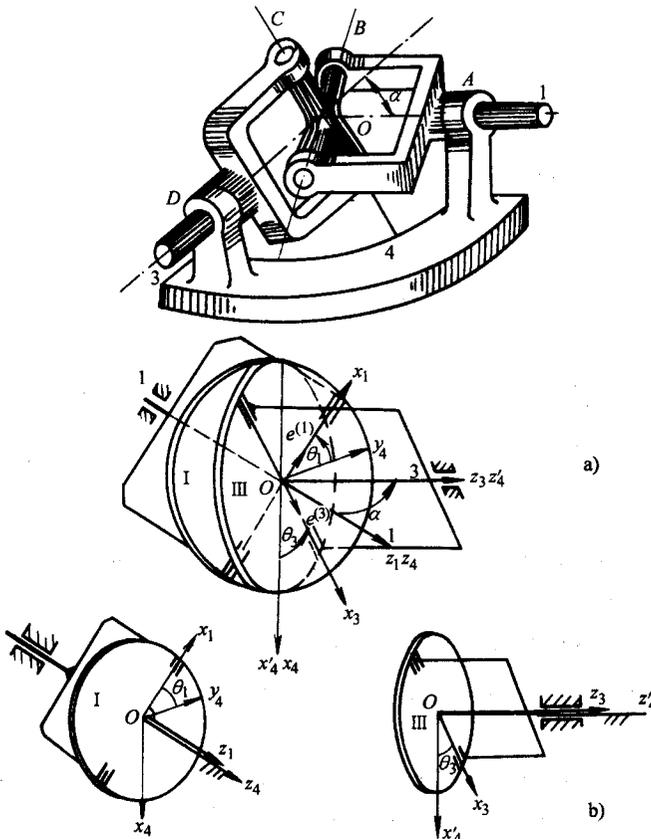


图 2-122 球面四杆机构的运动分析
a) 机构结构图 b) 坐标系及运动参数

$$R_{44'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

故 $e_4^{(3)}$ 在 $O-x_4y_4z_4$ 坐标系的坐标 $e_4^{(3)}$ 为: $e_4^{(3)} = R_{44'}e_4^{(3)}$

$$e_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \cos\alpha\sin\theta_3 \\ -\sin\alpha\sin\theta_3 \end{bmatrix}$$

因为 $e_4^{(1)}$ 与 $e_4^{(3)}$ 在运动中始终垂直, 即 $e_4^{(1)}e_4^{(3)} = 0$ 。将 $e_4^{(1)}$ 和 $e_4^{(3)}$ 代入上式得:

$$-\sin\theta_1\cos\theta_3 + \cos\theta_1\cos\alpha\sin\theta_3 = 0$$

整理可得主、从动轴角位移方程

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_3\cos\alpha$$

将上式对时间求导得两轴的角速度之比:

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\theta_1} \quad (2-72)$$

取不同的 α 值, 画出 i_{31} 随 θ_1 的变化线图如图 2-123a 所示。从图中可以看出: 随着两轴夹角 α 增大, 传动比 i_{31} 的波动增大, 即 ω_3 的变化幅值变大。从式 (2-72) 可知: 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $i_{31} = 0$, 即两轴不能进行传动, 考虑到摩擦和传动效率等方面因素, 在实际应用中, 夹角 α 一般不超过 $35^\circ \sim 45^\circ$ 。

当 α 值一定时, 单万向联轴节的输出角速度 ω_3 是主动轴角位移 θ_1 的函数, 当 θ_1 为 0° 或 180° 时, ω_3 有最大值为 $\frac{\omega_1}{\cos\alpha}$; 当 θ_1 为 90° 或 270° 时, ω_3 有最小值为 $\omega_1\cos\alpha$ 。

为了避免单万向联轴节传动中的不均匀性, 可采用双万向联轴节(图 2-123b)。即用一个中间轴 C 将两个单万向联轴节的主动轴与从动轴联接起来。为了保证传动比 i_{31} 恒等于 1, 必须保证:

1) 中间轴与主动轴和从动轴的

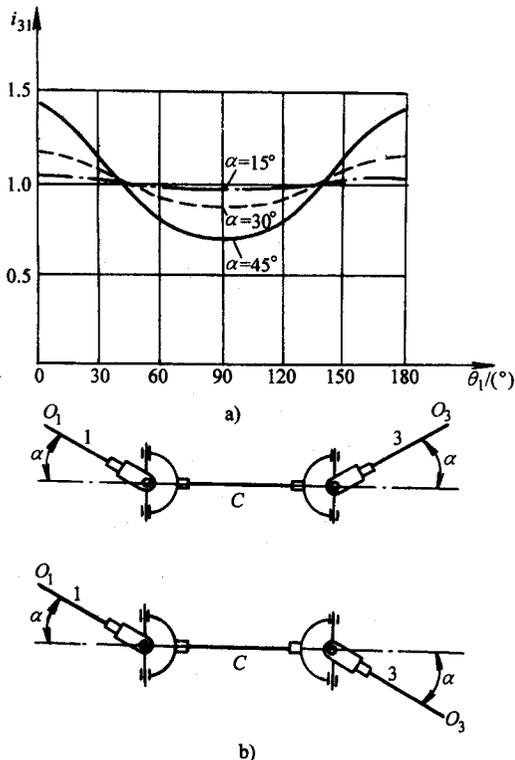


图 2-123 球面四杆机构的运动特性

a) 运动线图 b) 传动比恒为 1 的结构要求

夹角必须相等, 即 $\alpha_1 = \alpha_3$ 。

2) 中间轴两端的叉平面必须位于同一平面内, 因为: 设想以中间轴 C 为主动轴, 由单万向联轴器传动比计算公式得:

$$\frac{\omega_1}{\omega_C} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \theta_1} \text{ 和 } \frac{\omega_3}{\omega_C} = \frac{\cos \alpha_3}{1 - \sin^2 \alpha_3 \cos^2 \theta_3}$$

两式相除得:

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha_3 (1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \theta_1)}{\cos \alpha_1 (1 - \sin^2 \alpha_3 \cos^2 \theta_3)}$$

当中间轴两端叉平面在同一平面时, θ_1 与 θ_3 角位移值相同, 如果 $\alpha_1 = \alpha_3$, 则 $\omega_1 = \omega_3$ 。在这种条件下, 当以 ω_1 为主动时, 才能使 $\omega_1 = \omega_3$, i_{31} 恒等于 1。

三、开链型空间连杆机构的运动分析

开链型空间连杆机构在工业机器人和机械手中应用十分普遍。在机器人和机械手中各构件以机架为基础, 用低副 (不含球面副) 依次连接, 形成如图 2-124 所示机器人中的腰、肩、肘、腕和手 (亦称夹持器) 和各个关节。这类问题的运动分析通常是要求出夹持器在机架坐标系中的工作空间位置和姿态, 以保证使机械手能到达设计所要求的空间位置, 准确地取送、移动、翻转工件并保证在完成这些运动时的速度及加速度要求。对这类开链型的连杆机构进行运动分析时, 仍然必须先确定出夹持器的位置方程, 然后对方程求解出其速度与加速度。夹持器的位置姿态一般可用夹持器上的一点 P 在机架坐标系中的坐标 (x_0, y_0, z_0) 和该点上的两个相互垂直的单位矢量 $e^{(1)}$ 、 $e^{(3)}$ 的方向余弦 (l, m, n) 和 (u, v, w) 来确定 (单位矢量 $e^{(2)}$ 用右手定则确定, 故省略不写)。

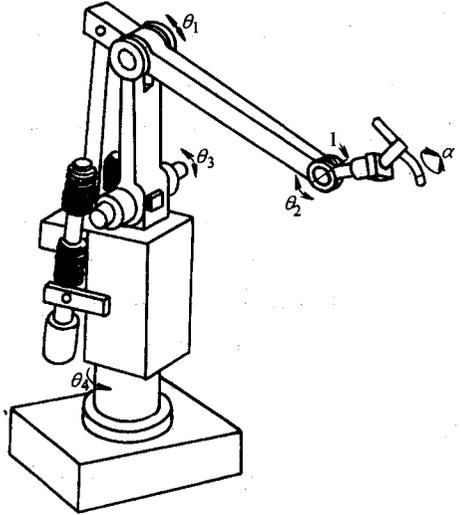


图 2-124 工业机器人机构

为了确定 P 在机架坐标系中的坐标和两单位矢量 $e^{(1)}$ 、 $e^{(3)}$ 在机架坐标中的方向余弦, 必须在各运动构件上固结一坐标系。设各构件上的坐标系设置如图 2-125 所示: P 点在各坐标系中的位置矢量分别用 r_0 、 $r_1 \cdots r_{n-1,n}$ 、 r_n 表示, M_{01} 、 $M_{12} \cdots M_{n-1,n}$ 依次为每两个相邻坐标系之间的坐标变换矩阵, 它们均具有式 (2-65) 中矩阵 M_{ij} 的形式。

利用式 (2-65) 依次递推, 可得点 P 由 n 坐标系到机架坐标系的坐标变换关系:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_0 \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \begin{bmatrix} r_1 \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \cdot M_{12} \begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \cdot M_{12} \cdots M_{n-1,n} \begin{bmatrix} r_n \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= M_{0n} \begin{bmatrix} r_n \\ 1 \end{bmatrix} = M_{0n} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-73}$$

式中：\$(x_n, y_n, z_n)\$ 为 \$P\$ 点在 \$n\$ 坐标系中的坐标。若单位矢量 \$e^{(1)}, e^{(3)}\$ 在 \$n\$ 坐标系中的方向余弦分别为 \$(e_x^{(1)}, e_y^{(1)}, e_z^{(1)})\$ 和 \$(e_x^{(3)}, e_y^{(3)}, e_z^{(3)})\$，则有：

$$\begin{bmatrix} x_0 & l & u \\ y_0 & m & v \\ z_0 & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{0n} \begin{bmatrix} x_n & e_x^{(1)} & e_x^{(3)} \\ y_n & e_y^{(1)} & e_y^{(3)} \\ z_n & e_z^{(1)} & e_z^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-74}$$

下面以机械手为例，简要介绍用 H-D 矩阵对其进行运动分析的方法。

例 2-25 图 2-125 为一台四自由度 PRPR 型机械手，除构件 2、3 间用移动副联接外，其余各构件间均用转动副相联。需分析的问题是：当各构件的相对位置确定后，求夹持器相对于机架坐标系的位置姿态。

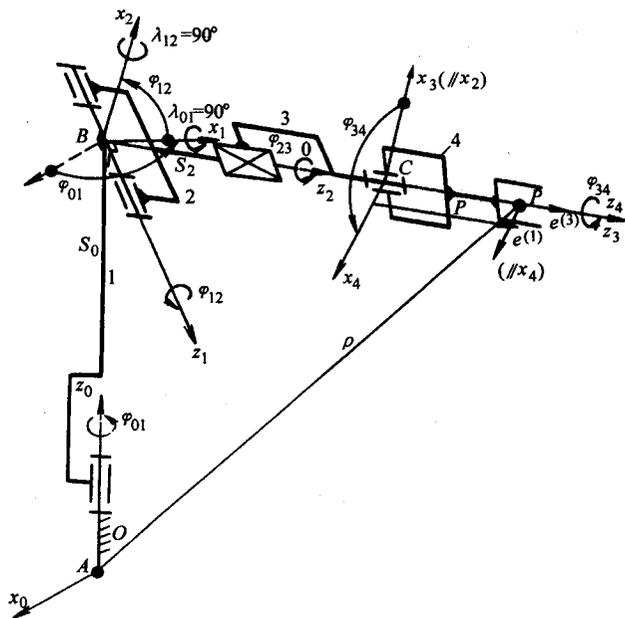


图 2-125 PRPR 型四自由度机构手

解

1) 在夹持器的对称轴上选取参考点 P , 过 P 点取与夹持器固结彼此正交的单位矢量 $e^{(1)}$ 和 $e^{(3)}$ ($e^{(2)}$ 用右手定则确定, 故省略不画), P 点在机架坐标系的坐标可描述夹持器的位置, $e^{(1)}$ 、 $e^{(3)}$ 在机架坐标系的方向余弦可表达夹持器的姿态。设参考点 P 在夹持器坐标系 $C-x_4(y_4)z_4$ 中的坐标为 $(0, 0, p)$; $e^{(1)}$ 、 $e^{(3)}$ 在该坐标系中的方向余弦为 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 0, 1)$ 。

2) 为了运用 H-D 矩阵将上述坐标变换到机架坐标系中, 在各可动构件上建立坐标系如下:

机架上建立坐标系 $O-x_0(y_0)z_0$, 其中 z_0 轴方向与机械手的回转轴重合, x_0 轴方向任意选取。

构件 1 上建立坐标系 $B-x_1(y_1)z_1$, 其中 z_1 轴方向与机械手的回转轴线重合, x_1 轴垂直于 z_1 和 z_0 轴。

构件 2 上建立坐标系 $B-x_2(y_2)z_2$, 其中 z_2 轴方向与机械手的回转轴线重合, x_2 轴垂直于 z_2 和 z_1 轴。

构件 3 上建立坐标系 $C-x_3(y_3)z_3$, 其中 z_3 轴方向与 z_2 轴方向重合, x_3 轴垂直于 z_3 与 x_2 轴方向平行。

构件 4 上建立坐标系 $C-x_4(y_4)z_4$, 其中 z_4 轴方向与 z_3 、 z_2 轴同向, x_4 轴垂直于 z_4 和 z_3 轴。

单位矢量 $e^{(1)}$ 与 x_4 轴平行方向一致, $e^{(3)}$ 与 z_4 轴重合。上述坐标系中的 y 轴均用右手定则确定, 故均未说明。

3) 按 H-D 矩阵的参数符号、确定机械手的结构参数: 由于在建立各坐标系时, 使各坐标系的 z 轴与转动副的回转轴重合; x 轴与相邻两坐标系中的两个 z 轴垂直, 因此, 该机械手的结构参数在各 H-D 矩阵中的对应值比较容易确定。在 H-D 矩阵中, 坐标原点在 z_i 轴的平移距离用 S_i 表示; 在 x_i 轴上的平移距离用 h_i 表示, 故 $S_0=l_{AB}$, $S_1=0$, $S_2=\overline{CB}$, $S_3=0$, $h_0=h_1=h_2=h_3=0$ 。相邻坐标系 z 轴间的相对转角用 λ_{ij} 表示, 故, $\lambda_{01}=\angle z_0, z_1=90^\circ$, $\lambda_{12}=\angle z_1, z_2=90^\circ$, $\lambda_{23}=\angle z_2, z_3=0^\circ$, $\lambda_{34}=\angle z_3, z_4=0^\circ$ 。相邻坐标系 x 轴间的转角用 φ_{ij} 表示, 故 $\varphi_{01}=\angle x_0, x_1$, $\varphi_{12}=\angle x_1, x_2$, $\varphi_{34}=\angle x_3, x_4$, 这三个转角由机械手的运动状态而定, $\varphi_{23}=\angle x_2, x_3=0$ 。

根据以上参数, 由式 (2-67) 得相邻两坐标系坐标变换的 H-D 矩阵:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{01} & 0 & \sin\varphi_{01} & 0 \\ \sin\varphi_{01} & 0 & -\cos\varphi_{01} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{12} & 0 & \sin\varphi_{12} & 0 \\ \sin\varphi_{12} & 0 & -\cos\varphi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{34} & -\sin\varphi_{34} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{34} & \cos\varphi_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将这些矩阵代入式(2-73)和(2-74)得:

$$\begin{bmatrix} x_0 & l & u \\ y_0 & m & v \\ z_0 & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{01} M_{12} M_{23} M_{34} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

整理得点 P 在机架坐标系中的坐标:

$$\begin{cases} x_0 = (p + S_2)\cos\varphi_{01}\sin\varphi_{12} \\ y_0 = (p + S_2)\sin\varphi_{01}\sin\varphi_{12} \\ z_0 = -(p + S_2)\cos\varphi_{12} + S_0 \end{cases} \quad (2-75)$$

$e^{(1)}$ 在机架坐标系中的方向余弦:

$$\begin{cases} l = \cos\varphi_{01}\cos\varphi_{12}\cos\varphi_{34} + \sin\varphi_{01}\sin\varphi_{34} \\ m = \sin\varphi_{01}\cos\varphi_{12}\cos\varphi_{34} - \cos\varphi_{01}\sin\varphi_{34} \\ n = \sin\varphi_{12}\cos\varphi_{34} \end{cases}$$

$e^{(3)}$ 在机架坐标系中的方向余弦:

$$\begin{cases} u = \cos\varphi_{01}\sin\varphi_{12} \\ v = \sin\varphi_{01}\sin\varphi_{12} \\ w = -\cos\varphi_{12} \end{cases}$$

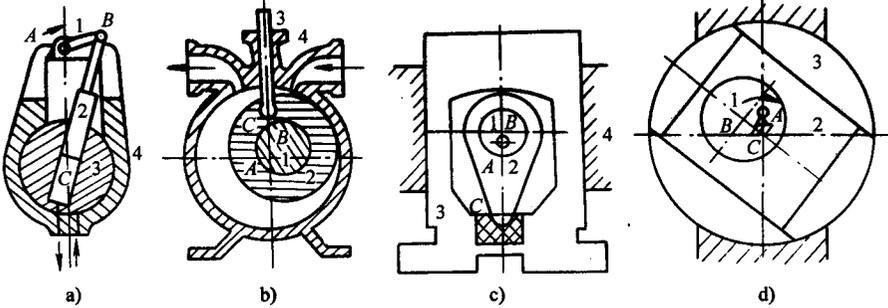
夹持器的作业空间, 即 A 点到 P 点的距离为:

$$\overline{AP} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{S_0^2 + (p + S_2)^2 - 2S_0(p + S_2)\cos\varphi_{12}}$$

将式(2-75)对时间求导数, 可得夹持器的运动速度和加速度。有关内容可查阅机器人或机械手的专著。

习 题

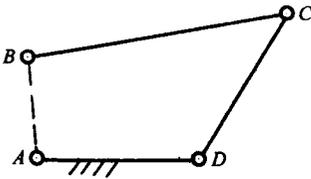
2-1 绘制题图 2-1 所示机构的机构运动简图，说明它们各为何种机构？



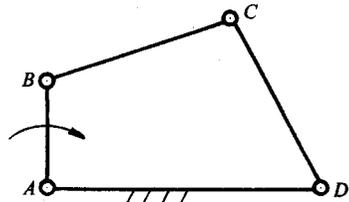
题图 2-1

2-2 已知题图 2-2 所示铰链四杆机构 $ABCD$ 中， $l_{BC}=50\text{mm}$ ， $l_{CD}=35\text{mm}$ ， $l_{AD}=30\text{mm}$ ，取 AD 为机架。

- 1) 如果该机构能成为曲柄摇杆机构，且 AB 是曲柄，求 l_{AB} 的取值范围；
- 2) 如果该机构能成为双曲柄机构，求 l_{AB} 的取值范围；
- 3) 如果该机构能成为双摇杆机构，求 l_{AB} 的取值范围。



题图 2-2



题图 2-3

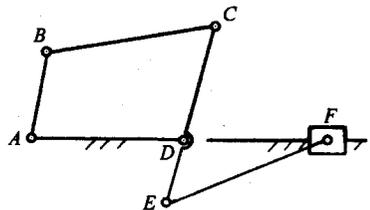
2-3 在题图 2-3 所示的铰链四杆机构中，各杆件长度分别为： $l_{AB}=28\text{mm}$ ， $l_{BC}=52\text{mm}$ ， $l_{CD}=50\text{mm}$ ， $l_{AD}=72\text{mm}$ 。

1) 若取 AD 为机架，求该机构的极位夹角 θ 和往复行程时间比系数 K ，杆 CD 的最大摆角 φ 和最小传动角 γ_{\min} ；

2) 若取 AB 为机架，该机构将演化为何种类型的机构？为什么？这时 C 、 D 两个转动副是整转副还是摇转副？

2-4 题图 2-4 所示六杆机构中，各构件的尺寸为： $l_{AB}=30\text{mm}$ ， $l_{BC}=55\text{mm}$ ， $l_{AD}=50\text{mm}$ ， $l_{CD}=40\text{mm}$ ， $l_{DE}=20\text{mm}$ ， $l_{EF}=60\text{mm}$ ，滑块为运动输出构件。试确定：

- 1) 四杆机构 $ABCD$ 的类型。
- 2) 机构的行程时间比系数 K 为多少？

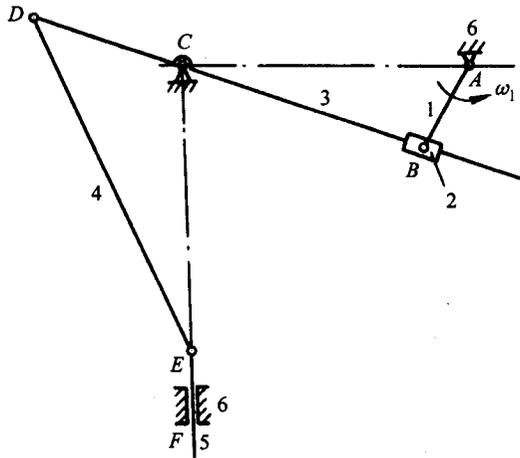


题图 2-4

- 3) 滑块 F 的行程 H 为多少?
- 4) 求机构的最小传动角 γ_{\min} 。传动角最大值为多少?
- 5) 导轨 DF 在什么位置时滑块在运动中的压力角最小?

2-5 题图 2-5 所示六杆机构。已知 $l_{AB}=200\text{mm}$, $l_{AC}=585\text{mm}$, $l_{CD}=30\text{mm}$, $l_{DE}=700\text{mm}$, $AC \perp EC$, ω_1 为常数。试求:

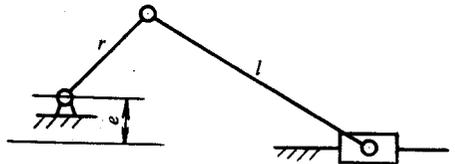
- 1) 机构的行程时间比系数 K ;
- 2) 构件 5 的行程 H ;
- 3) 机构的最小传动角 γ_{\min} 为多少? 传动角的最大值为多少?
- 4) 滑块的最大压力角 α_{\max} 发生的位置及大小; 欲使 α_{\max} 减小, 应对机构做怎样改进?
- 5) 在其他尺寸不变的情况下, 欲使行程为原行程的 2 倍, 问曲柄长度应为多少?



题图 2-5

2-6 如题图 2-6 所示, 对于一偏置曲柄滑块机构, 已知曲柄长为 r , 连杆长为 l , 偏距为 e , 求:

- 1) 当曲柄为原动件机构传动角的表达式; 说明曲柄 r 、连杆 l 和偏距 e 对传动角的影响;
- 2) 说明出现最小传动角时的机构位置;
- 3) 若令 $e=0$ (即对心式曲柄滑块机构), 其传动角在何处最大? 何处最小? 并比较其行程 H 的变化情况。



题图 2-6

2-7 题图 2-7 所示为小型插床常用的转动导杆机构, 已知 $l_{AB}=50\text{mm}$, $l_{AD}=40\text{mm}$, 行程时间比系数 $K=2.27$, 求曲柄 BC 的长度 l_{BC} 及插刀 P 的行程 H 。

2-8 试求题图 2-8 所示各机构在图示位置时全部瞬心的位置。

2-9 在题图 2-9 所示的齿轮连杆机构中, 三个圆轮互作纯滚, 试用相对瞬心 P_{13} 来求轮 1 和轮 3 的速度比。

2-10 在题图 2-10 所示凸轮机构中, 已知 $r=50\text{mm}$, $l_{OA}=22\text{mm}$, $l_{AC}=80\text{mm}$, $\varphi_1=90^\circ$, 凸轮 I 以角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ 逆时针方向转动。试用瞬心法求从动件 2 的角速度 ω_2 。

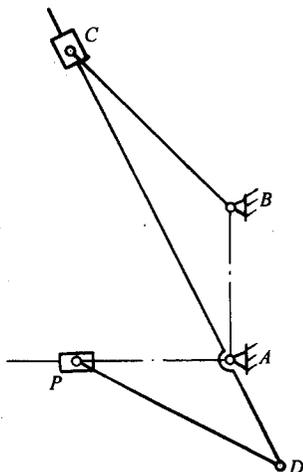
2-11 试求题图 2-11 所示连杆机构中构件 4 与构件 2 的角速度比 ω_4/ω_2 。

2-12 在题图 2-12 所示缩放机构中, 已知构件 1 的角速度 ω_1 , 试作出机构的速度多边形图并示出 I 点的速度 v_I 。

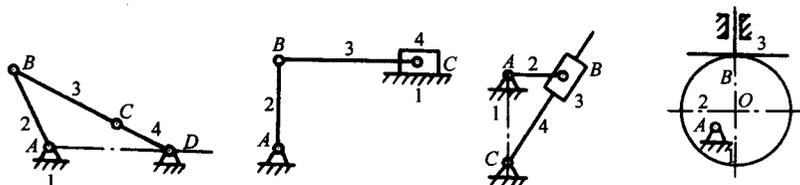
2-13 题图 2-13 为干草压缩机中的六杆机构, 已知各构件长度: $l_{AB}=600\text{mm}$, $l_{OA}=150\text{mm}$, $l_{BC}=120\text{mm}$, $l_{BD}=500\text{mm}$, $l_{CE}=600\text{mm}$ 及 $x_D=400\text{mm}$, $y_D=500\text{mm}$, $y_E=600\text{mm}$, $\omega_1=10\text{rad/s}$ 。用图解法求活塞 E 在一个运动循环中的位移, 用相对运动图解法求曲柄 OA 转角 $\varphi_1=0$ 时活塞 E 的速度和加速度。

2-14 在题图 2-14 所示机构中, 已知角速度 ω_1 , 试作出该机构的速度多边形图及加速度多边形图的草图, 并示出 F 点的速度和加速度。

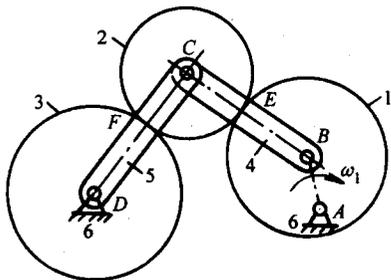
2-15 在题图 2-15 所示的六杆机构中, 已知 $\angle CAE=90^\circ$, $l_{AB}=150\text{mm}$, $l_{BC}=550\text{mm}$, $l_{BD}=80\text{mm}$, $l_{DE}=500\text{mm}$, 曲柄以等角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ 沿逆时针方向回转, 用相对位移图解法求当 $\angle BAE=45^\circ$ 时, 构件 3 的角速度、角加速度和构件 5 的速度、加速度。



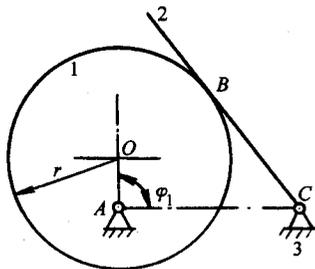
题图 2-7



题图 2-8

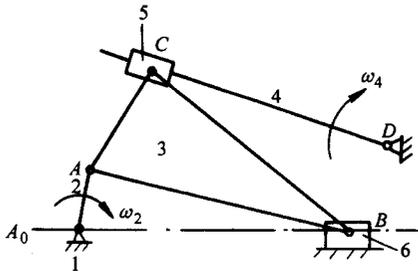


题图 2-9

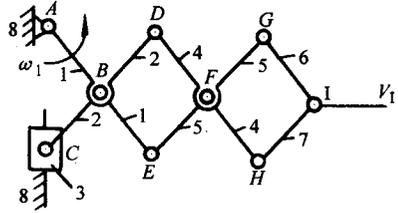


题图 2-10

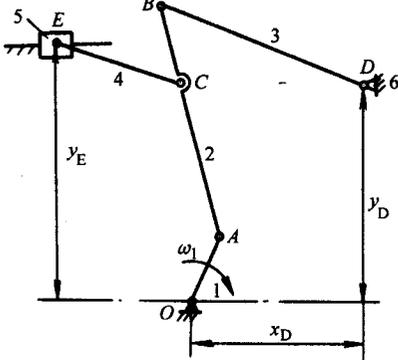
2-16 题图 2-16 所示的六杆机构中, 各构件尺寸分别为: $l_{AB}=200\text{mm}$, $l_{BC}=500\text{mm}$, $l_{CD}=800\text{mm}$, $x_F=400\text{mm}$, $x_D=350\text{mm}$, $y_D=350\text{mm}$, $\omega_1=100\text{rad/s}$, 用相对运动图解法求当曲柄转角 $\varphi_1=45^\circ$ 时构件 5 上的 F 点的速度和加速度。



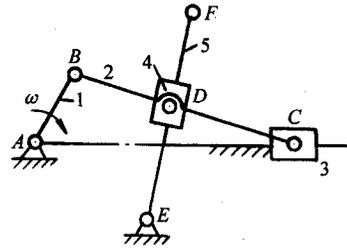
题图 2-11



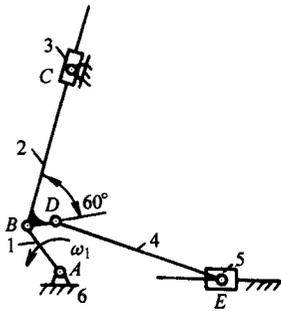
题图 2-12



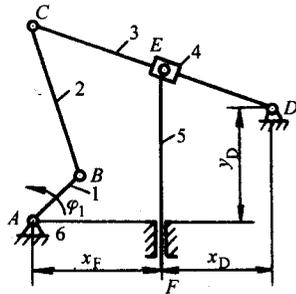
题图 2-13



题图 2-14



题图 2-15



题图 2-16

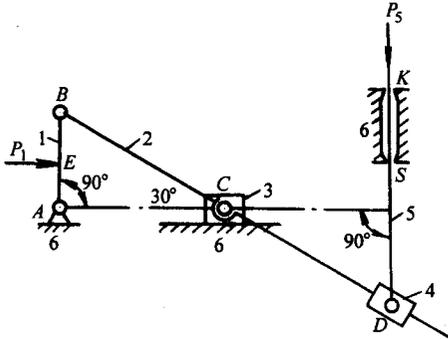
2-17 在题图 2-17 所示机构中, 已知 $P_5 = 3000\text{N}$, $AB = 50\text{mm}$, $AE = BE$, $BC = CD = 2AB$, $DS = 1.5AB$, $SK = 0.5AB$, 不计运动副中的摩擦, 试求各运动副中的反力及应在 E 点垂直作用于原动件 1 的平衡力 P_1 。

2-18 题图 2-18 所示机构中, 已知 $P_5 = 1000\text{N}$, $AB = 100\text{mm}$, $BC = CD = 2AB$, $CE = ED = DF$, 不计运动副中的摩擦, 试用图解法求各运动副中的反力和平衡力矩 M_1 。

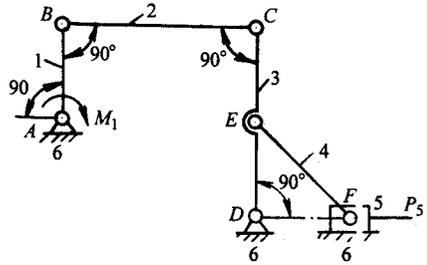
2-19 题图 2-19 所示楔块联接中, θ 角为 15° , 所有接触面的摩擦角均为 12° , 求用以克服作用于 A 和 B 上各 1000N 阻力所需加于楔块 C 上的 P 力之值。

2-20 题图 2-20 所示轧钢机，在不需要水平外力驱动的条件下，借助轧辊 2 与轧件 1 间的摩擦能将轧件 1 自动带入轧辊之间，试证明：

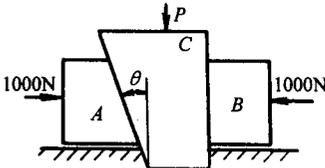
- 1) 这时轧辊与轧件间的摩擦角 φ 不应小于 α 。
- 2) 当轧辊直径 $D=1200\text{mm}$ ，轧辊间的间隙 $a=25\text{mm}$ ，轧辊与轧件间的摩擦系数 $\mu=0.3$ 时，求轧件的最大厚度。



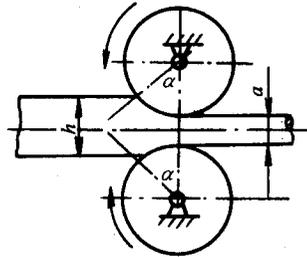
题图 2-17



题图 2-18



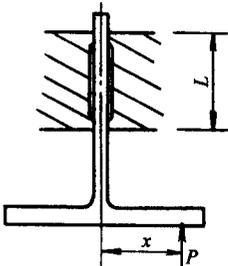
题图 2-19



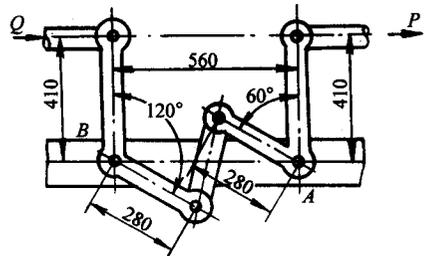
题图 2-20

2-21 题图 2-21 所示机构，推杆与导轨间的摩擦系数 $\mu=0.2$ ，忽略构件重量，求：在力 P 的作用下使推杆向上运动而不会发生自锁，导轨的长度 L 应满足什么条件？

2-22 题图 2-22 所示机构，点 A 和 B 均为固定铰销，所有铰销的直径均为 25mm ，图上所有尺寸的单位均为 mm ，设当量摩擦系数 $\mu_0=0.2$ ， $P=30\text{N}$ ，求 Q 力之值。



题图 2-21

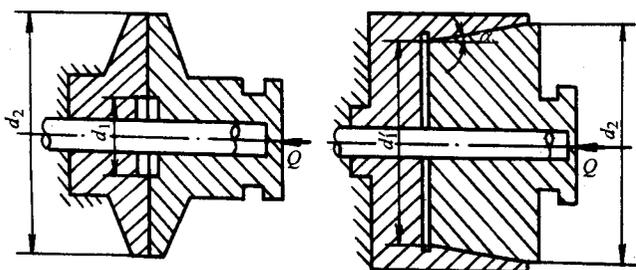


题图 2-22

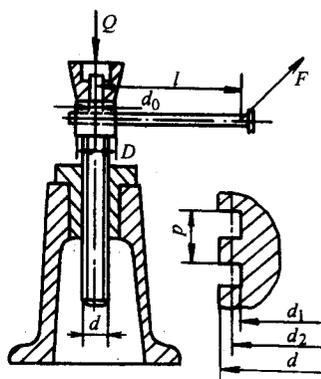
2-23 两种轴向压力式制动器, 如题图 2-23 所示, 已知: $d_1=100\text{mm}$, $d_2=200\text{mm}$, $d'_1=170\text{mm}$, $\alpha=10^\circ$, $\mu=0.3$, 二者轴向压力相等。试求在跑合情况下两种制动器产生的制动力矩分别为多大?

2-24 在题图 2-24 所示的矩形螺纹千斤顶中, 已知螺纹的中径 $d_2=22\text{mm}$, 螺距 $p=4\text{mm}$, 托环的环形摩擦面外径 $D=50\text{mm}$, 内径 $d_0=42\text{mm}$, 手柄长 $l=300\text{mm}$, 所有摩擦面的摩擦系数均为 $\mu=0.1$ 。试求:

- 1) 该千斤顶的效率;
- 2) 若 $F=100\text{N}$, 所能举起的重物 Q 的大小?



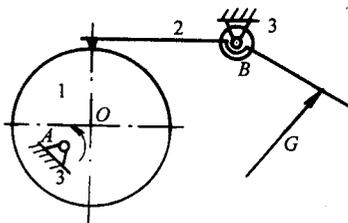
题图 2-23



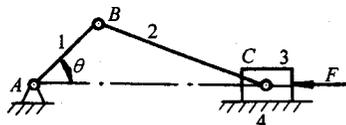
题图 2-24

2-25 题图 2-25 所示为一摆动从动件盘形凸轮机构, 凸轮 1 沿逆时针方向回转, G 为作用在从动件 2 上的外载荷, 各运动副中的当量摩擦系数已知, 轴的半径已知, 试确定总反力 R_{12} 、 R_{32} 和 R_{31} 的方位 (不考虑构件的重量及惯性力), 并计算机构在该位置时的效率。

2-26 在题图 2-26 所示的曲柄滑块机构中, 设已知机构的尺寸 (包括轴颈的直径), 各轴颈的当量摩擦系数 μ_0 , 滑块与导路之间的摩擦系数 μ 及驱动力 F (回程时力 F 的方向向右)。设从动件 1 上的阻力矩为 M_r 。若不计各构件的质量, 求 $\theta=45^\circ$ 、 135° 、 225° 和 315° 时, 各运动副中总反力的作用线。



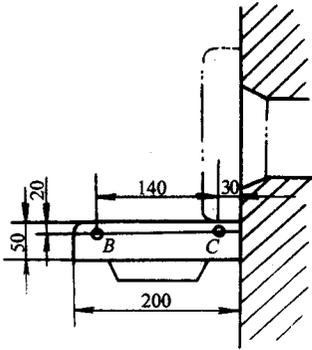
题图 2-25



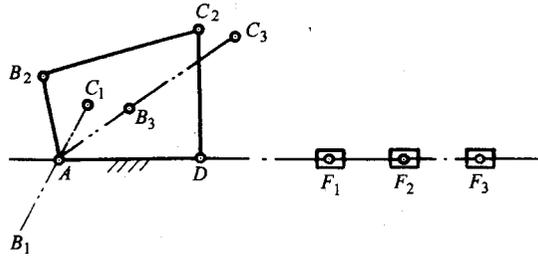
题图 2-26

2-27 用铰链四杆机构作电炉炉门的启闭机构, 若已知其两活动铰链中心 B 、 C 的位置及炉门的两个位置尺寸如题图 2-27 所示, 试确定固定铰链中心 A 、 D 位置及 AB 、 BC 、 CD 各杆杆长。

2-28 题图 2-28 所示为一已知的曲柄摇杆机构,现要求用一连杆将摇杆 CD 和一滑块 F 连接起来,使摇杆的三个已知位置 C_1D 、 C_2D 、 C_3D 和滑块的三个位置 F_1 、 F_2 、 F_3 相对应。试确定此连杆的长度及其与摇杆 CD 铰接点的位置。



题图 2-27



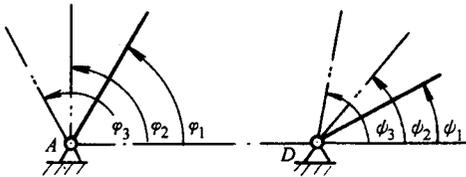
题图 2-28

2-29 已知两连架杆的三组对应位置如题图 2-29 所示为: $\varphi_1=60^\circ$, $\psi_1=30^\circ$, $\varphi_2=90^\circ$, $\psi_2=50^\circ$; $\varphi_3=120^\circ$, $\psi_3=80^\circ$, 若取机架 AD 长度 $l_{AD}=100\text{mm}$, 试用图解法计算此铰链四杆机构各杆长度。

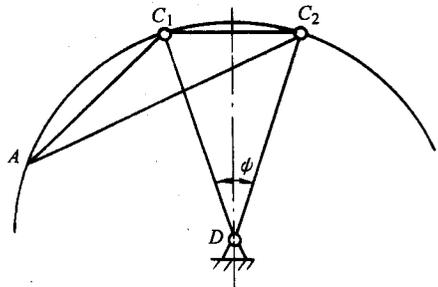
2-30 设计题图 2-30 所示的曲柄摇杆机构, 已知其摇杆 CD 的长度 $l_{CD}=290\text{mm}$, 摇杆两极限位置间的夹角 $\psi=32^\circ$, 行程时间比系数 $K=1.25$ 。

1) 若曲柄的长度 $l_{AB}=75\text{mm}$, 用图解法和解析法分别求连杆的长度 l_{BC} 和机架的长度 l_{AD} , 并校验最小传动角 γ_{\min} 是否在允许值范围内。

2) 若连杆的长度 $l_{BC}=100\text{mm}$, 用图解法和解析法分别求曲柄的长度 l_{AB} 和机架的长度 l_{AD} 。



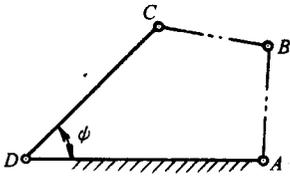
题图 2-29



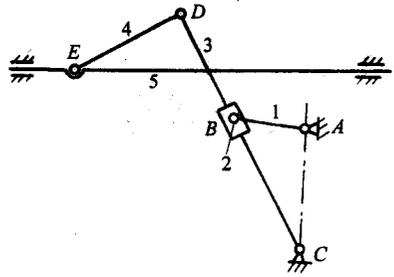
题图 2-30

2-31 如题图 2-31 所示的铰链四杆机构。设已知其摇杆 CD 的长度为 75mm , 行程时间比系数 $K=1.5$, 机架 AD 的长度为 80mm , 又知摇杆的一个极限位置与机架间的夹角 $\varphi=45^\circ$, 试求其曲柄的长度 l_{AB} 和连杆的长度 l_{BC} 。

2-32 题图 2-32 所示为一牛头刨床的主传动机构, 已知 $l_{AB}=75\text{mm}$, $l_{DE}=100\text{mm}$, 行程时间比系数 $K=2$, 刨头 5 的行程 $H=300\text{mm}$, 要求在整个行程中, 刨头 5 有较小的压力角, 试设计此机构。



题图 2-31



题图 2-32