

文章编号:0253-9993(2010)08-1384-07

# 埋入 SMA 纤维的复合材料薄壁结构的主动变形分析

杨树莲<sup>1,2</sup>,任勇生<sup>3</sup>,王晓辉<sup>3</sup>,朱智林<sup>1</sup>

(1. 山东工商学院 计算机基础教学部,山东 烟台 264005;2. 海军航空工程学院 研究生大队,山东 烟台 264001;3. 山东科技大学 机械电子工程学院,山东 青岛 266510)

**摘要:**建立了具有主动 SMA 材料的各向异性单闭室薄壁截面梁的二维截面分析模型;SMA 纤维沿任意 $\beta$ 角铺设,含 SMA 纤维层合板材料性能由混合率进行预测;基于 Tanaka 的 SMA 应力应变关系以及 Lin 的线性相变动力模型,导出了 SMA 诱发的轴力、扭矩与弯矩的数学表达式。由建立的具有拉伸-扭转-弯曲静变形耦合的一般公式出发,讨论周向反对称刚度配置特殊情形并给出了简化的本构方程。数值研究结果表明:相变期间空心悬臂梁在 SMA 纤维驱动下产生较为显著的弯曲变形和扭转变形。调节 SMA 纤维的激励温度、改变复合材料铺层角、改变 SMA 纤维的含量和 SMA 的初始应变都能明显改善 SMA 的变形驱动性能。

**关键词:**复合材料薄壁结构;变形主动控制;形状记忆合金纤维;风机叶片

**中图分类号:**TB301 **文献标志码:**A

## Coupled deflection analysis of SMA fiber hybrid active thin-walled composite structures

YANG Shu-lian<sup>1,2</sup>, REN Yong-sheng<sup>3</sup>, WANG Xiao-hui<sup>3</sup>, ZHU Zhi-lin<sup>1</sup>

(1. Department of Computer Foundation Studies, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China; 2 Graduate Students' Brigade, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China; 3 College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science & Technology, Qingdao 266510, China)

**Abstract:** A model for analyzing single-cell composite cross-sectional thin-walled beams incorporating SMA active fibers was developed. The constitutive relationships for evaluation of the properties of a hybrid SMA composite ply were obtained following the rule of mixtures. The analytical expressions of the actuation components for the active beam were derived based on Tanaka's constitutive equation and Lin's linear phase transformation kinetics for SMA fiber. The general form of constitutive relation was applied to the case of extension-twist coupling, corresponding to Circumferentially AntiSymmetric (CAS). Numerical results show that significant stretching and twisting deflection occur during the phase transformation due to SMA actuation. The effects of SMA driving temperature, the SMA composite ply angle, the volume fraction of the SMA fiber and the martensitic residual strain on structural response behavior are significant during phase transformation from martensite to austenite.

**Key words:** thin-walled composite structures; active deformation control; shape memory alloy fiber composite; blade

复合材料薄壁梁由于轻质、高强度和高刚度以及强度和刚度的可设计性,在矿井通风机叶片、风力发电电机桨叶等机械结构设计中得到越来越广泛地应用。但是由于复合材料薄壁梁的柔性较大,在使用过程中

易产生气动弹性稳定性问题<sup>[1-2]</sup>。目前具有发展潜力的风机叶片主动控制方法是基于智能材料与结构概念的主动叶片,其目的是利用埋入复合材料基体的智能材料驱动叶片变形从而改善叶片表面气动载荷

分布,避免风机叶片产生气弹耦合不稳定问题。

本文基于变分渐进法<sup>[3]</sup>、Tanaka 的 SMA 应力应变关系<sup>[4]</sup>以及 Lin 的线性相变动力模型<sup>[5]</sup>导出具有 SMA 主动纤维的复合材料薄壁空心梁的二维截面刚度系数以及截面内力(矩)与位移(转角)关系方程和 SMA 诱发的轴力与弯矩的数学表达式,讨论了周向反对称刚度配置特殊情形并给出了简化的本构方程。通过数值计算揭示了 SMA 对弯曲-扭转静变形特性的作用规律,分析了 SMA 纤维含量与初始应变、驱动温度和复合材料铺层角的影响。

### 1 基本理论

#### 1.1 基于变分渐进法的二维横截面分析

具有主动 SMA 材料的各向异性单闭室薄壁截面梁的二维截面分析采用 Badir 的变分渐进法<sup>[3]</sup>推广得到。变分渐进分析能够给出关于各向异性薄壁闭口截面梁的位移、应变和横截面刚度系数的封闭表达式。按照变分渐进分析理论,除了包括经典的扭转翘曲之外,位移场还包括由轴向伸长和弯曲产生的面外翘曲。

考虑一细长的薄壁柱体结构(图 1),长度为  $L$ ,厚度为  $h$ ,中面曲率半径为  $r$ ,最大横截面尺寸为  $d$ 。假定  $d \ll L, h \ll d, h \ll r$ ,坐标  $\zeta$  沿中面法线方向度量,满足  $-h/2 \leq \zeta \leq h/2$ 。假定 SMA 纤维沿着薄壁与梁轴向  $x$  方向成  $\beta$  角铺设。

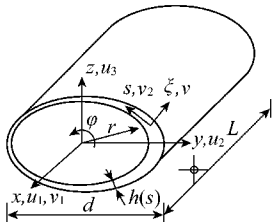


图 1 单闭室复合材料薄壁梁

Fig. 1 Single-cell composite thin-walled beam

二阶近似位移场形为

$$\begin{cases} v_1 = u_1(x) - y(s)u'_2(x) - z(s)u'_3(x) + g(s, x) \\ v_s = u_2(x) \frac{dy}{ds} + u_3(x) \frac{dz}{ds} + \varphi(x)r_n \\ v_\zeta = u_2(x) \frac{dz}{ds} - u_3(x) \frac{dy}{ds} + \varphi(x)r_t \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $u_i(x) (i = 1, 2, 3)$  为沿坐标方向的平均位移;  $g(s, x)$  为未知的翘曲函数,由位移场的连续性、环向力为零以及定常剪力条件决定;  $\varphi$  为弹性扭转角。

曲线坐标系  $(x, s, \zeta)$  下的面内应变为

$$\bar{\gamma}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, 2\bar{\gamma}_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x}, \bar{\gamma}_{22} = \frac{v_\zeta}{R} + \frac{\partial v_2}{\partial s} \quad (2)$$

根据定义,轴力和剪力为

$$\begin{cases} N_{11} = A(s)\bar{\gamma}_{11} + B(s)\bar{\gamma}_{12} - A^{(a)} \\ N_{12} = \frac{B(s)\bar{\gamma}_{11} + C(s)\bar{\gamma}_{12}}{2} - \frac{C^{(a)}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

假定剪力  $N_{12}$  为常数,式(3)中的  $\bar{\gamma}_{12}$  可写为

$$\bar{\gamma}_{12} = \frac{2N_{12}}{C} - \frac{B}{C}\bar{\gamma}_{11} + \frac{C^{(a)}}{C} \quad (4)$$

将式(1)、(2)代入式(4),略去  $\frac{dg}{dx}$  的项,利用

$$\frac{1}{l} \oint_r \frac{\partial g}{\partial s} ds = 0 \text{ 的条件可以导出}$$

$$\begin{aligned} g(s, x) &= G(s)\varphi'(x) + g_1(s)u'_1(x) + \\ &g_2(s)u''_2(x) + g_3(s)u''_3(x) + v_1^{(a)}(s) \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $G$  和  $g_i (i = 1, 2, 3)$  分别为扭转、拉伸和两个方向弯曲的翘曲函数<sup>[6]</sup>,与此同时,可以导出由 SMA 纤维驱动所产生的位移分量为

$$v_1^{(a)} = 2 \int_0^s \frac{C^{(a)}}{C} ds - 2 \left( \frac{\oint_r \frac{C^{(a)}}{C} ds}{\oint_r \frac{1}{C} ds} \right) \int_0^s \frac{1}{C} ds \quad (6)$$

二阶近似应变场为

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{11} = u'_1(x) - y(s)u''_2(x) - z(s)u''_3(x) \\ 2\bar{\gamma}_{12} = \left( \frac{dG}{ds} + r_n \right) \varphi'(x) + \frac{dg_1}{ds} u'_1(x) + \\ \frac{dg_2}{ds} u''_2(x) + \frac{dg_3}{ds} u''_3(x) + \frac{dv_1^{(a)}}{ds} \\ \bar{\gamma}_{22} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

由文献[7]可知,轴向力  $F_1^e$ 、扭矩  $M_1^e$ 、展向弯矩  $M_2^e$  和弦向弯矩  $M_3^e$  (上标 e 表示机械外载荷)为

$$\begin{cases} F_1^e = \oint_r N_{11} ds = c_{11}u'_1 + c_{12}\varphi' + c_{13}u''_3 + c_{14}u''_2 - F_1^{(a)} \\ M_1^e = \oint_r N_{12} r_n ds = c_{12}u'_1 + c_{22}\varphi' + \\ c_{23}u''_3 + c_{24}u''_2 - M_1^{(a)} \\ M_2^e = \oint_r N_{11} z ds = c_{13}u'_1 + c_{23}\varphi' + c_{33}u''_3 + \\ c_{34}u''_2 - M_2^{(a)} \\ M_3^e = - \oint_r N_{11} y ds = c_{14}u'_1 + c_{24}\varphi' + \\ c_{34}u''_3 + c_{44}u''_2 - M_3^{(a)} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $[C]$  为  $4 \times 4$  对称刚度矩阵,它的元素  $c_{ij} (i, j = 1, \dots, 4)$  由复合材料薄壁空心梁横截面几何以及材料特性表示<sup>[7]</sup>。将式(3)、(6)、(7)代入式(8),得

$$\left\{ \begin{aligned}
 F_1^{(a)} &= \oint_R A^{(a)} ds - \oint_R \frac{B}{C} C^{(a)} ds + \left( \oint_R \frac{B}{C} ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(a)} ds = F_1^{\Delta T} + F_1^{\text{SMA}} \\
 F_1^{(\text{SMA}, \Delta T)} &= \oint_R A^{(s, \Delta T)} ds - \oint_R \frac{B}{C} C^{(s, \Delta T)} ds + \left( \oint_R \frac{B}{C} ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(s, \Delta T)} ds \\
 M_1^{(a)} &= \left( \oint_R \frac{1}{C} C^{(a)} ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) A_e = M_1^{\Delta T} + M_1^{\text{SMA}} \\
 M_1^{(\text{SMA}, \Delta T)} &= \left( \oint_R \frac{1}{C} C^{(s, \Delta T)} ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) A_e \\
 M_2^{(a)} &= \oint_R A^{(a)} z ds - \oint_R \frac{B}{C} C^{(a)} z ds + \left( \oint_R \frac{B}{C} z ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(a)} ds = M_2^{\Delta T} + M_2^{\text{SMA}} \\
 M_2^{(\text{SMA}, \Delta T)} &= \oint_R A^{(s, \Delta T)} z ds - \oint_R \frac{B}{C} C^{(s, \Delta T)} z ds + \left( \oint_R \frac{B}{C} z ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(s, \Delta T)} ds \\
 M_3^{(a)} &= - \oint_R A^{(a)} y ds + \oint_R \frac{B}{C} C^{(a)} y ds - \left( \oint_R \frac{B}{C} y ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(a)} ds = M_3^{\Delta T} + M_3^{\text{SMA}} \\
 M_3^{(\Delta T)} &= - \oint_R A^{(\Delta T)} y ds + \oint_R \frac{B}{C} C^{(\Delta T)} y ds - \left( \oint_R \frac{B}{C} y ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(\Delta T)} ds \\
 M_3^{(\text{SMA})} &= - \oint_R A^{(s)} y ds + \oint_R \frac{B}{C} C^{(s)} y ds - \left( \oint_R \frac{B}{C} y ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} C^{(s)} ds \\
 A(s) &= \bar{A}_{11} - \frac{\bar{A}_{12}^2}{\bar{A}_{22}}, B(s) = 2 \left( \bar{A}_{16} - \frac{\bar{A}_{12} \bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} \right), C(s) = 4 \left( \bar{A}_{66} - \frac{\bar{A}_{26}^2}{\bar{A}_{22}} \right) \\
 A^{(a)} &= A_{1111}^{\Delta T} + A_{1222}^{\Delta T} + A_{1612}^{\Delta T} - \frac{\bar{A}_{12}}{\bar{A}_{22}} (A_{1211}^{\Delta T} + A_{2222}^{\Delta T} + A_{2612}^{\Delta T}) - A_{11}^s + \frac{\bar{A}_{12}}{\bar{A}_{22}} A_{22}^s = A^{(\Delta T)} + A^{(s)} \\
 A^{(\Delta T)} &= A_{1111}^{\Delta T} + A_{1222}^{\Delta T} + A_{1612}^{\Delta T} - \frac{\bar{A}_{12}}{\bar{A}_{22}} (A_{1211}^{\Delta T} + A_{2222}^{\Delta T} + A_{2612}^{\Delta T})
 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\text{其中, } C^{(a)} = 2 \left( -A_{12}^s + \frac{\bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} \right) + 2(A_{6612}^{\Delta T} + A_{2622}^{\Delta T} + A_{1611}^{\Delta T}) - 2 \frac{\bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} (A_{2612}^{\Delta T} + A_{2222}^{\Delta T} + A_{1211}^{\Delta T}) = C^{(\Delta T)} + C^{(s)};$$

$$C^{(\Delta T)} = 2(A_{6612}^{\Delta T} + A_{2622}^{\Delta T} + A_{1611}^{\Delta T}) - 2 \frac{\bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} (A_{2612}^{\Delta T} + A_{2222}^{\Delta T} + A_{1211}^{\Delta T});$$

$$A_{1211}^{\Delta T}; A^{(s)} = A_{11}^s - \frac{\bar{A}_{12}}{\bar{A}_{22}} A_{22}^s = \hat{A} \sigma_p^{\text{SMA}}; C^{(s)} = 2 \left( A_{12}^s - \frac{\bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} A_{22}^s \right) = \hat{C} \sigma_p^{\text{SMA}}; \hat{A} = \int V_s \cos^2 \beta d\zeta - \frac{\bar{A}_{12}}{\bar{A}_{22}} \int V_s \sin^2 \beta d\zeta; \hat{C} =$$

$$\left( \int V_s \sin \beta \cos \beta d\zeta - \frac{\bar{A}_{26}}{\bar{A}_{22}} \int V_s \sin^2 \beta d\zeta \right); A_{ij}(i, j = 1, 2, 6) \text{ 为层合板的面内刚度; } A_{ijkl}(i, j = 1, 2, 6; k, l = 1, 2)$$

为与温度相关的面内刚度;上标  $\Delta T$  和 SMA 分别表示由温度变化和 SMA 相变驱动产生的力或矩;  $B$ 、 $C$  为梁的刚度系数<sup>[7]</sup>。

## 1.2 SMA 诱发的轴力与弯矩

SMA 的应力应变关系<sup>[8]</sup>为

$$\sigma^{\text{SMA}} = E_s (\bar{\gamma}_{1'1'} - \varepsilon_0) + \Theta (T - T_f) + \Omega (\xi - 1)$$

式中,  $E_s$ 、 $\Theta$ 、 $\Omega$  分别为 SMA 的弹性模量、热弹性张量和相变张量;  $\varepsilon_0$ 、 $T_f$ 、 $\xi$  分别为 SMA 的马氏体残余应变、参考温度和马氏体含量;  $\bar{\gamma}_{1'1'}$  为薄壁梁沿 SMA 纤维方向的正应变。

由薄壁梁坐标系 (1, 2, 3) 下的应变  $\bar{\gamma}_{11}$  和  $2\bar{\gamma}_{12}$  ( $\bar{\gamma}_{22} \approx 0$ ) 求得 SMA 纤维混杂单层在 SMA 纤维轴向 1' 的应变为

$$\bar{\gamma}_{1'1'} \approx \bar{\gamma}_{11} \cos^2 \beta + 2\bar{\gamma}_{12} \sin \beta \cos \beta$$

低温马氏体相到高温奥氏体相 (M  $\rightarrow$  A) 的相变动力学方程<sup>[9-10]</sup>为

$$\xi = \begin{cases} 1 & (\text{温度区间 1}) \\ 1 - \frac{T - A_s}{A_f - A_s} + \frac{|\sigma^{\text{SMA}}|}{C_A(A_f - A_s)} & (\text{温度区间 2}) \\ 0 & (\text{温度区间 3}) \end{cases} \quad (10)$$

其中,温度区间 1 为  $T \leq A_s + |\sigma^{\text{SMA}}|/C_A$ ; 温度区间 2 为  $A_s + |\sigma^{\text{SMA}}|/C_A \leq T \leq A_f + |\sigma^{\text{SMA}}|/C_A$ ; 温度区间 3 为  $T \geq A_f + |\sigma^{\text{SMA}}|/C_A$ 。

由 SMA 的应力应变关系和相变动力学方程,可解出 SMA 纤维的相变应力  $\sigma_p^{\text{SMA}}$  为

$$\sigma_p^{\text{SMA}} = \Omega(1 - \xi) = \begin{cases} 0 & (\text{温度区间 1}) \\ \Gamma(T) + \Lambda(\bar{\gamma}_{1'1'} - \varepsilon_0) & (\text{温度区间 2}) \\ \Omega & (\text{温度区间 3}) \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $\Gamma(T) = \frac{\Omega}{C_A(A_f - A_s)} [(C_A - j\Omega)T -$

$$(C_A A_s - j\Omega T_f)]; \Lambda = - \frac{j\Omega E_s}{C_A(A_f - A_s) - j\Omega}; j = \text{sgn}(\sigma^{\text{SMA}})。$$

由式(9)和式(10),导出  $F_1^{\text{SMA}}, M_1^{\text{SMA}}, M_2^{\text{SMA}}, M_3^{\text{SMA}}$  的表达式为

$$\begin{cases} F_1^{\text{SMA}} = \Gamma_1 + \Lambda_{11}u'_1 + \Lambda_{12}\varphi' + \Lambda_{13}u''_3 + \Lambda_{14}u''_2 \\ M_1^{\text{SMA}} = \Gamma_2 + \Lambda_{21}u'_1 + \Lambda_{22}\varphi' + \Lambda_{23}u''_3 + \Lambda_{24}u''_2 \\ M_2^{\text{SMA}} = \Gamma_3 + \Lambda_{31}u'_1 + \Lambda_{32}\varphi' + \Lambda_{33}u''_3 + \Lambda_{34}u''_2 \\ M_3^{\text{SMA}} = \Gamma_4 + \Lambda_{41}u'_1 + \Lambda_{42}\varphi' + \Lambda_{43}u''_3 + \Lambda_{44}u''_2 \end{cases} \quad (12)$$

在式(11)的温度区间 1:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Lambda_{11} = \Lambda_{12} = \Lambda_{13} = \Lambda_{14} = 0 \\ \Gamma_2 &= \Lambda_{21} = \Lambda_{22} = \Lambda_{23} = \Lambda_{24} = 0 \\ \Gamma_3 &= \Lambda_{31} = \Lambda_{32} = \Lambda_{33} = \Lambda_{34} = 0 \\ \Gamma_4 &= \Lambda_{41} = \Lambda_{42} = \Lambda_{43} = \Lambda_{44} = 0 \end{aligned}$$

在式(11)的温度区间 2:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \oint_r \Gamma(T) \hat{A} ds - \oint_r \Gamma(T) \frac{B}{C} \hat{C} ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Gamma(T) \frac{1}{C} \hat{C} ds + \\ &\quad \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \hat{A} ds - \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{B}{C} \hat{C} ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{1}{C} \hat{C} ds \\ \Lambda_{1i} &= \oint_r \Lambda(L_j) \hat{A} ds - \oint_r \Lambda(L_j) \frac{B}{C} \hat{C} ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_j) \frac{1}{C} \hat{C} ds \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 0, 3, 2) \\ \Gamma_2 &= A_e \left( \oint_r [\Gamma(T) + \Lambda(L_4 - \varepsilon_0)] \frac{1}{C} \hat{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \\ \Lambda_{2i} &= A_e \oint_r (\Lambda L_j) \frac{1}{C} \hat{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 0, 3, 2) \\ \Gamma_3 &= \oint_r \Gamma(T) \hat{A} z ds - \oint_r \Gamma(T) \frac{B}{C} \hat{C} z ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} z ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Gamma(T) \frac{1}{C} \hat{C} ds + \\ &\quad \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \hat{A} z ds - \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{B}{C} \hat{C} z ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} z ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{1}{C} \hat{C} ds \\ \Lambda_{3i} &= \oint_r \Lambda(L_j) \hat{A} z ds - \oint_r \Lambda(L_j) \frac{B}{C} \hat{C} z ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} z ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_j) \frac{1}{C} \hat{C} ds \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 0, 3, 2) \\ \Gamma_4 &= \oint_r \Gamma(T) \hat{A} y ds - \oint_r \Gamma(T) \frac{B}{C} \hat{C} y ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} y ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Gamma(T) \frac{1}{C} \hat{C} ds + \\ &\quad \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \hat{A} y ds - \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{B}{C} \hat{C} y ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} y ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_4 - \varepsilon_0) \frac{1}{C} \hat{C} ds \\ \Lambda_{4i} &= \oint_r \Lambda(L_j) \hat{A} y ds - \oint_r \Lambda(L_j) \frac{B}{C} \hat{C} y ds + \left( \oint_r \frac{B}{C} y ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \Lambda(L_j) \frac{1}{C} \hat{C} ds \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 0, 3, 2) \end{aligned}$$

在式(11)的温度区间 3:

$$\Lambda_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$\Gamma_1 = \oint_r \hat{A} \Omega ds - \oint_r \frac{B}{C} \hat{C} \Omega ds +$$

$$\left( \oint_r \frac{B}{C} ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right) \oint_r \frac{1}{C} \hat{C} \Omega ds$$

$$\Gamma_2 = \left( \oint_r \frac{1}{C} \hat{C} \Omega ds / \oint_r \frac{1}{C} ds \right)$$

$$\Gamma_3 = \oint_R \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Omega} z ds - \oint_R \frac{B}{C} \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Omega} z ds +$$

$$\left( \oint_R \frac{B}{C} z ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Omega} z ds$$

$$\Gamma_4 = \oint_R \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Omega} y ds - \oint_R \frac{B}{C} \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Omega} y ds +$$

$$\left( \oint_R \frac{B}{C} y ds / \oint_R \frac{1}{C} ds \right) \oint_R \frac{1}{C} \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Omega} y ds$$

将式(9)、(12)代入方程(8),得 SMA 纤维混杂复合材料薄壁梁的力(矩)位移(转角)的本构方程为

$$\begin{cases} F_1^e + F_1^{\Delta T} + \Gamma_1 = (c_{11} - \Lambda_{11})u'_1 + (c_{12} - \Lambda_{12})\varphi' + \\ (c_{13} - \Lambda_{13})u''_3 + (c_{14} - \Lambda_{14})u''_2 \\ M_1^e + M_1^{\Delta T} + \Gamma_2 = (c_{12} - \Lambda_{21})u'_1 + (c_{22} - \Lambda_{22})\varphi' + \\ (c_{23} - \Lambda_{23})u''_3 + (c_{24} - \Lambda_{24})u''_2 \\ M_2^e + M_2^{\Delta T} + \Gamma_3 = (c_{13} - \Lambda_{31})u'_1 + (c_{23} - \Lambda_{32})\varphi' + \\ (c_{33} - \Lambda_{33})u''_3 + (c_{34} - \Lambda_{34})u''_2 \\ M_3^e + M_3^{\Delta T} + \Gamma_4 = (c_{14} - \Lambda_{41})u'_1 + (c_{24} - \Lambda_{42})\varphi' + \\ (c_{34} - \Lambda_{43})u''_3 + (c_{44} - \Lambda_{44})u''_2 \end{cases} \quad (13)$$

上述结果说明,在 SMA 纤维沿着与薄壁梁轴  $x$  呈  $\beta$  角铺设时,在 SMA 相变作用驱动下一般将会产生轴向力  $\Gamma_1$ , 扭矩  $\Gamma_2$  和弯矩  $\Gamma_3, \Gamma_4$ 。显然,如果温度变化  $\Delta T$  以及 SMA 纤维含量  $V_s$  均为零,由于

$$F_1^{\Delta T} = M_1^{\Delta T} = M_2^{\Delta T} = M_3^{\Delta T} = 0$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$$

$$\Lambda_{ij} = 0$$

故方程(13)退化为文献[6]的结果。

### 1.3 周向反对称刚度配置薄壁梁的本构方程

式(13)为一般情况下描述复合材料薄壁梁的力和位移的控制方程,它涉及弯曲、扭转、拉压之间的耦合。实际当中,薄壁结构有一种常见的刚度配置方式,即周向反对称刚度配置(CAS):  $\theta(y) = -\theta(-y)$ ,  $\theta(z) = -\theta(-z)$ ,其中  $\theta$  表示由正的  $s$  轴进行度量的纤维铺层角。在这种情况下,有

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{24} = C_{34}$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{13} = \Lambda_{14} = \Lambda_{24} = \Lambda_{34} = 0$$

$$\Lambda_{21} = \Lambda_{31} = \Lambda_{41} = \Lambda_{42} = \Lambda_{43} = 0$$

$$\Gamma_1 \neq 0, \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = 0, F_1^{\Delta T} \neq 0$$

$$M_1^{\Delta T} = M_2^{\Delta T} = M_3^{\Delta T} = 0$$

$$\begin{cases} F_1^e + F_1^{\Delta T} + \Gamma_1 = (c_{11} - \Lambda_{11})u'_1 \\ M_1^e = (c_{22} - \Lambda_{22})\varphi' + (c_{23} - \Lambda_{23})u''_3 \\ M_2^e = (c_{23} - \Lambda_{32})\varphi' + (c_{33} - \Lambda_{33})u''_3 \\ M_3^e = (c_{44} - \Lambda_{44})u''_2 \end{cases} \quad (14)$$

上述方程描述 SMA 纤维混杂复合材料薄壁梁的弯-扭转耦合静力平衡方程,由此可以分析结构在外力作用、温度变化和 SMA 驱动下的弯-扭转耦合变形特性。

## 2 数值结果与讨论

数值计算针对壁面为 6 层 NiTi/石墨/环氧铺层的矩形截面复合材料薄壁梁,复合材料薄壁梁长  $L = 762$  mm,  $a = 24.21$  mm,  $b = 13.46$  mm,假定只限于在薄壁梁自由端沿着  $z$  向作用横向力为 1 N,即  $F_1^e = M_3^e = M_1^e = 0, M_2^e = L - x$  (N·mm),SMA 纤维只在上下壁的两个单层内铺设并且沿着与  $x$  轴向呈  $45^\circ$ ,参考温度  $T_r = 20$  °C。采用 CAS 构型:上下壁铺层分别为  $[\theta_2/45^\circ]_2$  和  $[-\theta_2/-45^\circ]_2$ ;左右壁铺层分别为  $[\theta/-\theta]_3$  和  $[\theta/-\theta]_3$ ,梁的结构尺寸和截面铺层方式如图 2 所示,其中  $\theta$  表示普通纤维角; $45^\circ$  表示 SMA 纤维角。

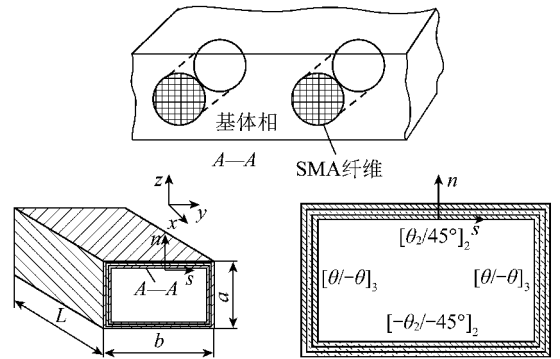


图 2 箱形梁的结构尺寸和截面铺层方式

Fig. 2 Box-beam configuration and composite layout

选取材料的性能参数<sup>[11]</sup>:

(1) 石墨/环氧<sup>[6]</sup>。  $E_{11m} = 142$  GPa,  $E_{22m} = 9.8$  GPa,  $G_{12m} = 6.0$  GPa,  $\nu_{12m} = 0.42$ ,  $\alpha_{1m} = -0.07 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_{2m} = 30.1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,其中,下标 m 表示复合材料介质。

(2) SMA 纤维<sup>[7]</sup>。  $E_s = 26.3$  GPa (Mar),  $A_s = 34.5$  °C,  $A_r = 49$  °C,  $\theta = 0.55$ ,  $\nu_s = 0.33$ ,  $\alpha_s = 10.26 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $C_A = 13.8$  MPa/°C,  $\boldsymbol{\Omega} = -1762$  MPa,其中,下标 s 表示 SMA 材料。

当激励温度给定时,为了求得复合材料梁任意截

面上的  $u_3$  和  $\varphi$  以及截面指定点处的  $\bar{\gamma}_{11r}$  和  $\sigma^{\text{SMA}}$ ,首先要计算马氏体含量  $\xi$ ,但这又必须已知  $\sigma^{\text{SMA}}$ ,所以要借助于迭代求解。

图 3(a) 为在 SMA 纤维含量给定情况下 ( $\nu_s = 0.5$ ),对应于不同激励温度的薄壁梁自由端的横向

位移  $u_3$  和扭转角  $\varphi$  随普通纤维铺层角  $\theta$  变化的曲线。计算表明,在高温奥氏体相(取  $T=200\text{ }^\circ\text{C}$ , 对应的曲线没有画出)与低温马氏体相( $T=20\text{ }^\circ\text{C}$ )的曲线是重合的,原因是  $\Gamma_2 = \Gamma_3 = M_1^{(\Delta T)} = M_2^{(\Delta T)} = 0$ , 并且低温和高温状态下的  $\Lambda_{ij}$  均为零,所以,由方程(14)可知,在低温和高温对应的响应曲线是相同的。计算表明,在  $T=20\text{ }^\circ\text{C}$  时并且在所给定铺层角范围内,马氏体含量  $\xi = 1$ , 说明 SMA 纤维为马氏体相;在  $T=200\text{ }^\circ\text{C}$  时,马氏体含量  $\xi = 0$ , 说明 SMA 纤维为奥氏体相;在温度  $T=50\text{ }^\circ\text{C}$  时,  $0 < \xi < 1$ , 说明 SMA 纤维中上述两种体相并存。当  $T=20\text{ }^\circ\text{C}$  时, SMA 纤维没有被激活,此时复合材料悬臂梁由 SMA 相变诱发的扭矩和弯矩为零,图 3(a) 中所对应的位移和转角是由

于外载荷  $M_2^e$  引起的。当温度为相变温度  $T=50\text{ }^\circ\text{C}$  时, SMA 纤维被激活,  $\Lambda_{ij} \neq 0$ , 于是薄壁梁的横向变形和扭转变形发生显著的变化。研究结果表明,在给定的铺层角范围内,能够发生马氏体向奥氏体转变的温度区域很窄( $48 \sim 56\text{ }^\circ\text{C}$ ), 在该温度区域取值时(如取  $T=56\text{ }^\circ\text{C}$ ), 响应曲线在铺层角的某个中间区间上具有马氏体向奥氏体转变的状态,而其余为马氏体(或奥氏体)相状态,这一现象表明在 SMA 纤维驱动作用与铺层角之间存在复杂的相互耦合机理,这反映出在一定的激励温度区间内,铺层角的变化导致 SMA 纤维应力的变化,使得 SMA 在不同的相变状态之间发生转换。另外由图 3(a) 可见,弯曲变形和扭转变形在铺层角为  $70^\circ$  时 SMA 驱动作用最明显。

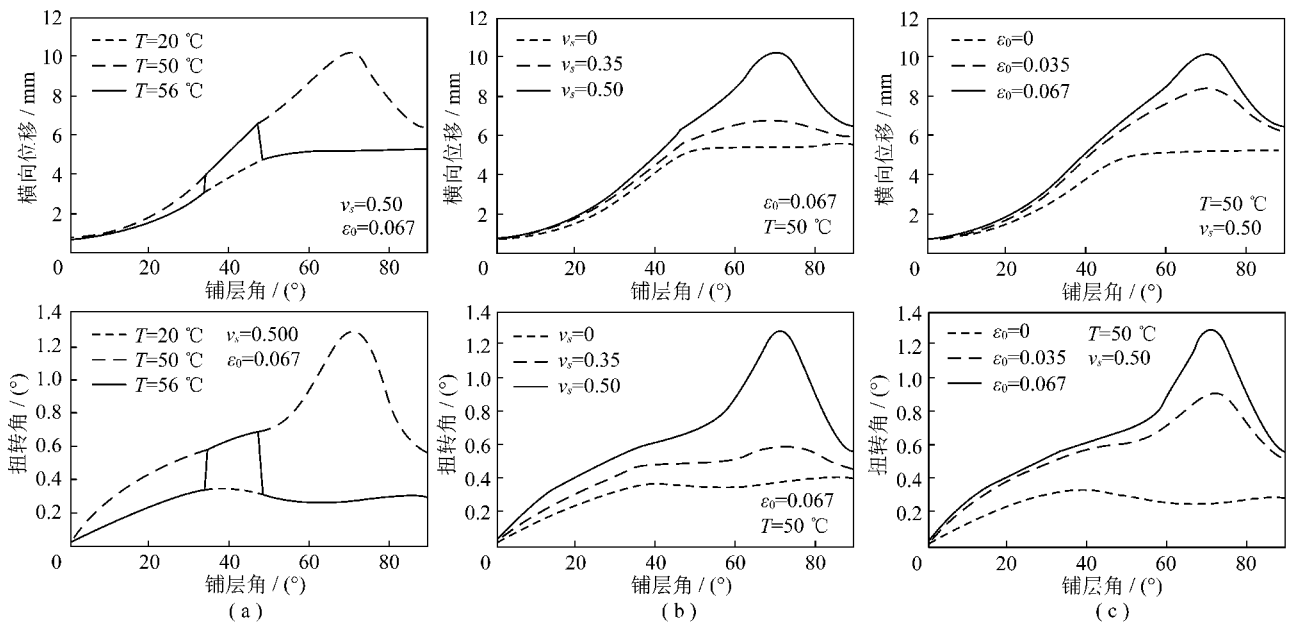


图 3 自由端横向位移和扭转角随铺层角的响应曲线

Fig. 3 The curves of tip displacement and tip twist angle with ply angle

图 3(b) 为 SMA 纤维含量对横向位移  $u_3$  和扭转角  $\varphi$  的影响。结果表明,在 SMA 纤维相变阶段,随着 SMA 纤维含量的增加, SMA 纤维的变形驱动作用随之增加,薄壁梁的弯曲变形以及扭转变形有了明显改善。显然,由图 3(b) 可见,在整个铺层角范围内弯曲变形和扭转变形随 SMA 含量的增加而增加。

图 3(c) 为 SMA 纤维的初始应变对横向位移  $u_3$  和扭转角  $\varphi$  的影响。结果表明,在整个铺层角范围内,初始应变  $\varepsilon_0$  对变形的影响明显,变化规律与 SMA 纤维含量对变形的影响相类似。

图 4(a)、(b)、(c) 分别表示在给定铺层角情况下,对应于 3 种不同温度、3 种不同 SMA 纤维含量、3 种不同 SMA 纤维初始应变的 SMA 纤维复合材料薄壁梁的横向位移  $u_3$  和扭转角  $\varphi$  沿着梁  $x$  轴的分布曲

线。显然,横向变形和扭转变形随 SMA 激励温度、SMA 纤维含量、SMA 纤维初始应变的变化规律分别与图 3(a)、(b)、(c) 的结果是一致的。

### 3 结 论

基于变分渐近法、Tanaka 的 SMA 应力应变关系以及 Lin 的线性相变动力模型,提出了具有拉伸-扭转-弯曲变形耦合的、包含 SMA 主动纤维驱动作用的复合材料薄壁空心梁的截面内力(矩)与位移(转角)本构方程,其中含 SMA 纤维层合板材料性能由混合率进行预测;导出了 SMA 诱发的轴力、扭矩与弯矩的数学表达式。所获得的结果是对文献[6]结果的推广。根据建立的具有拉伸-扭转-弯曲变形耦合的一般公式,给出周向反对称刚度配置(CAS 构型)特殊

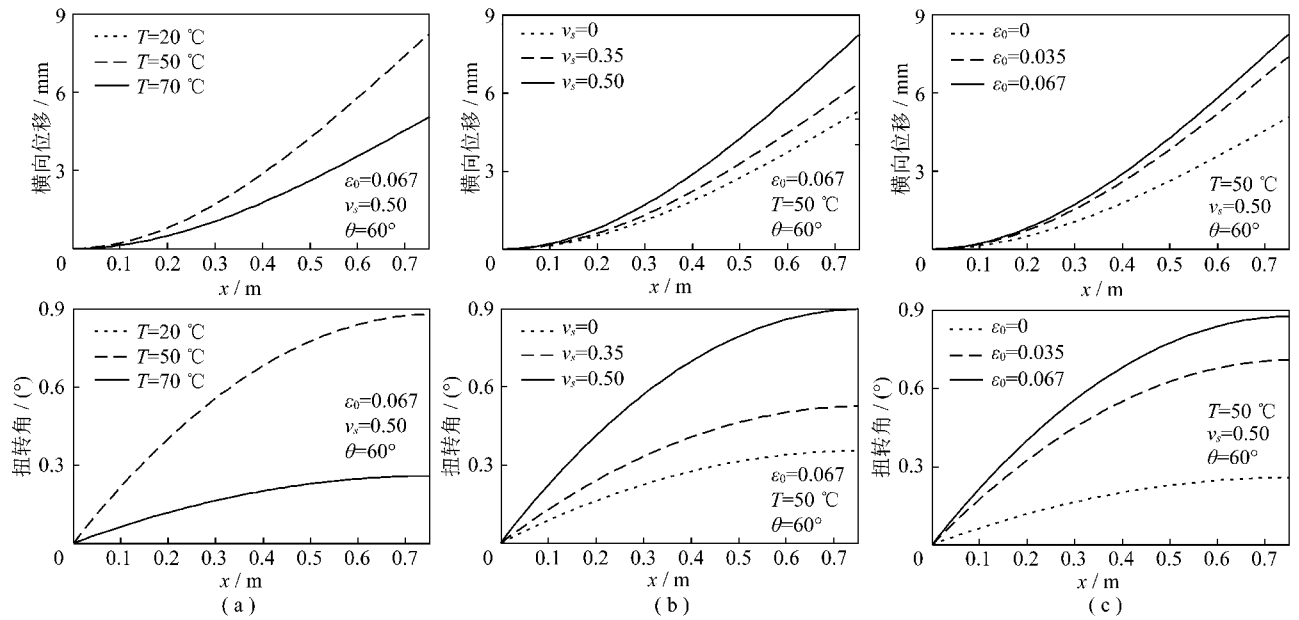


图 4 在给定铺层角情况下横向位移  $u_3$  与扭转角  $\varphi$  的分布曲线

Fig. 4 The distribution curves of transverse displacement and twist angle with given ply angle

情形下的简化本构方程。通过数值计算揭示了 SMA 对于具有一般铺层角的薄壁梁的扭转-弯曲静变形特性的作用规律。研究表明,在马氏体向奥氏体转变阶段,空心悬臂梁在 SMA 纤维驱动下的产生较为显著的弯曲变形和扭转变形,而且 SMA 纤维驱动作用与复合材料基体材料的铺层角之间存在密切的关系,调节 SMA 纤维的激励温度、改变 SMA 纤维的含量和 SMA 的初始应变,都能明显改善 SMA 的变形驱动性能。

#### 参考文献:

- [1] Hansen M O L, Sørensen J N, Voutsinas S, et al. State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2006, 42(4): 285-330.
- [2] Matthew W F. Elastically tailored composite rotor blades for stall alleviation and vibration reduction[D]. University Park; The Pennsylvania State University, 2000.
- [3] Badir A M. Analysis of advanced thin-walled composite structures [D]. Atlanta; Georgia Inst. of Technology, 1992.
- [4] Tanaka K, Nagaki S. Thermomechanical description of material with internal variables in the process of phase transformation[J]. Ingenieur Archiv., 1982, 51: 287-299.
- [5] Lin M W, Rogers C A. Analysis of stress distribution in a shape memory alloy composite beam [A]. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, And Materials Conference, 32<sup>nd</sup> [C]. Baltimore, M D, United States: 169-177.
- [6] Armanios E A, Badir A M. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams[J]. AIAA Journal, 1995; 33, 1 905-1 910.
- [7] Ren Yongsheng, Yang Shulian, Wang Xiaohui. Structural modeling of SMA fiber hybrid active thin-walled composite beams[J]. Composite Structures, 2009, 91: 120-130.
- [8] 杨树莲, 王晓辉, 任勇生, 等. 空心悬臂梁在 SMA 层驱动下的变形分析[J]. 煤炭学报, 2009, 34(12): 1 724-1 728. Yang Shulian, Wang Xiaohui, Ren Yongsheng, et al. Induced deformation analysis of the cantilever box beam with SMA layers bonded to faces of wall[J]. Journal of China Coal Society, 2009, 34(12): 1 724-1 728.
- [9] Hansen M O L, Sørensen J N, Voutsinas S, et al. State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity[J]. Progress Aerospace Sci., 2006, 42(4): 285-330.
- [10] Yin Wenming. Study on structural dynamic of large turbine blade of SMA composite[D]. Qingdao; Shandong University of Science and Technology, 2008.
- [11] Park J S, Kim J H. Design and aeroelastic analysis of active twist rotor blades incorporating single crystal macro fiber composite actuators[J]. Composites: Part B, 2008, 39: 1 011-1 025.