

第四章 应力 - 应变关系

本章目的

本章目的

- ▶ 进行简单加载材料实验，获得材料响应规律；
- ▶ 获得材料机械性能、表征材料变形程度及强度性能的指标；建立材料线弹性应力 - 应变关系 (线弹性本构关系)；
- ▶ 建立复杂应力状态下应变能的计算式。

基本要求

- ▶ 初步掌握材料宏观 (拉伸、压缩) 实验的方法、原理和步骤；
- ▶ 熟悉低碳钢和铸铁拉、压下的力学行为，理解比例极限、屈服极限、强度极限，延伸率、断面收缩率以及弹性模量和泊松比的力学意义并掌握其测量方法；明确塑性材料与脆性材料。
- ▶ 了解其它金属及复合材料等拉、压下的力学行为；
- ▶ 熟练应用广义虎克定律；掌握应变能计算；了解热应变概念。

第四章 应力 - 应变关系 材料的性能



1 材料的机械性能 (Mechanical Properties of Materials)

1.1 材料拉、压试验 (Tension and Compression Test)

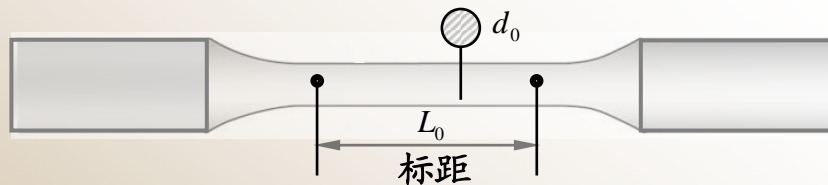
试验条件 常(室)温、准静态加载

试验设备 材料试验机

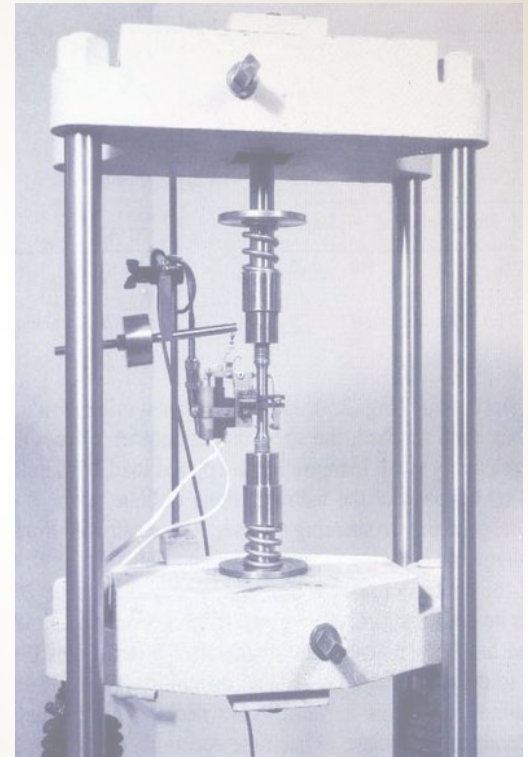
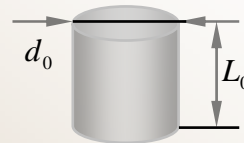
Ziwek, MTS, INSTRON;

试件 GB6397-86 《金属拉伸试验试样》

拉伸试件 $L_0 = 10d_0$ 或 $L_0 = 5d_0$

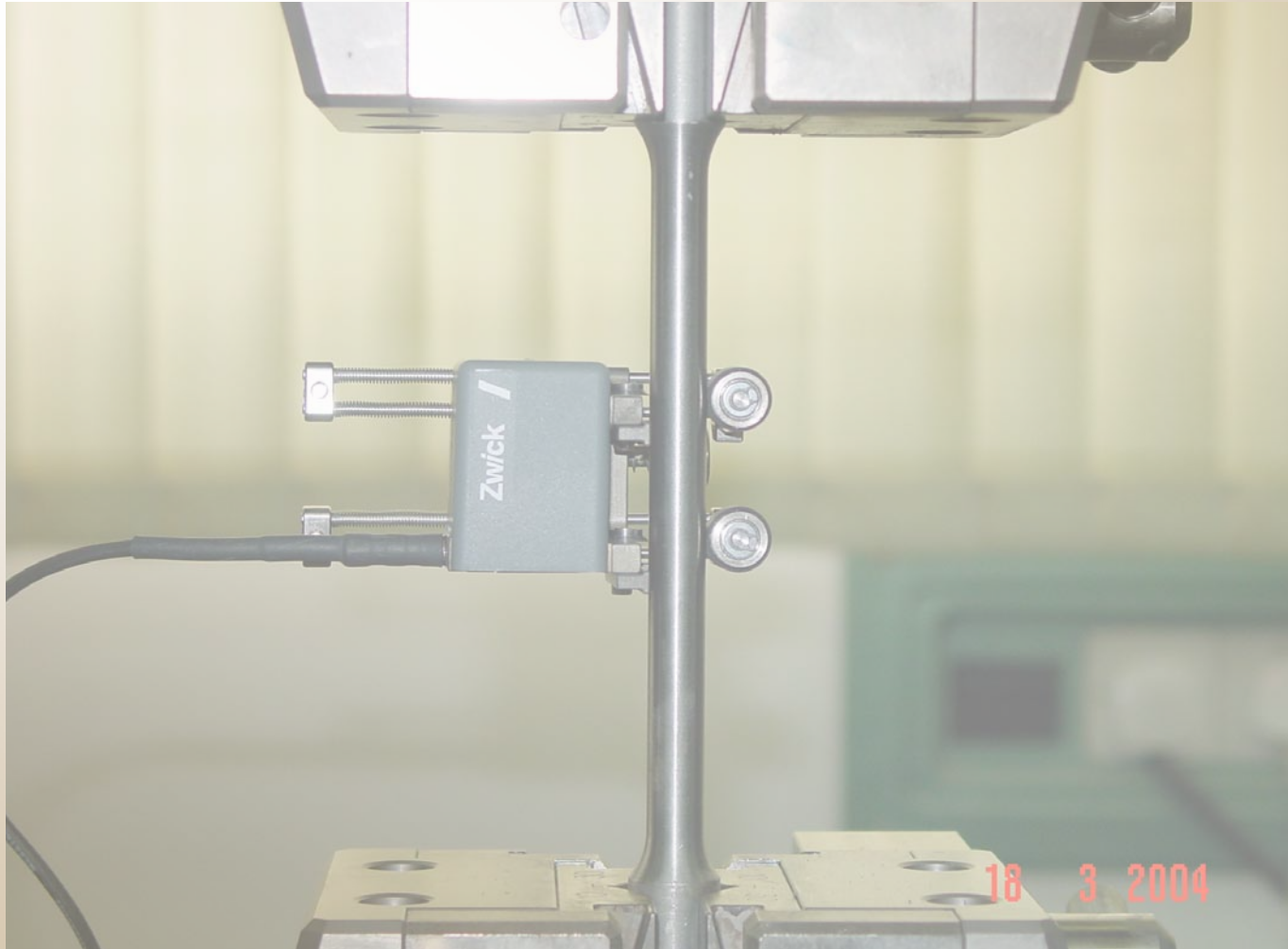


压缩试件 $L_0 = (1.5 \sim 3.0)d_0$



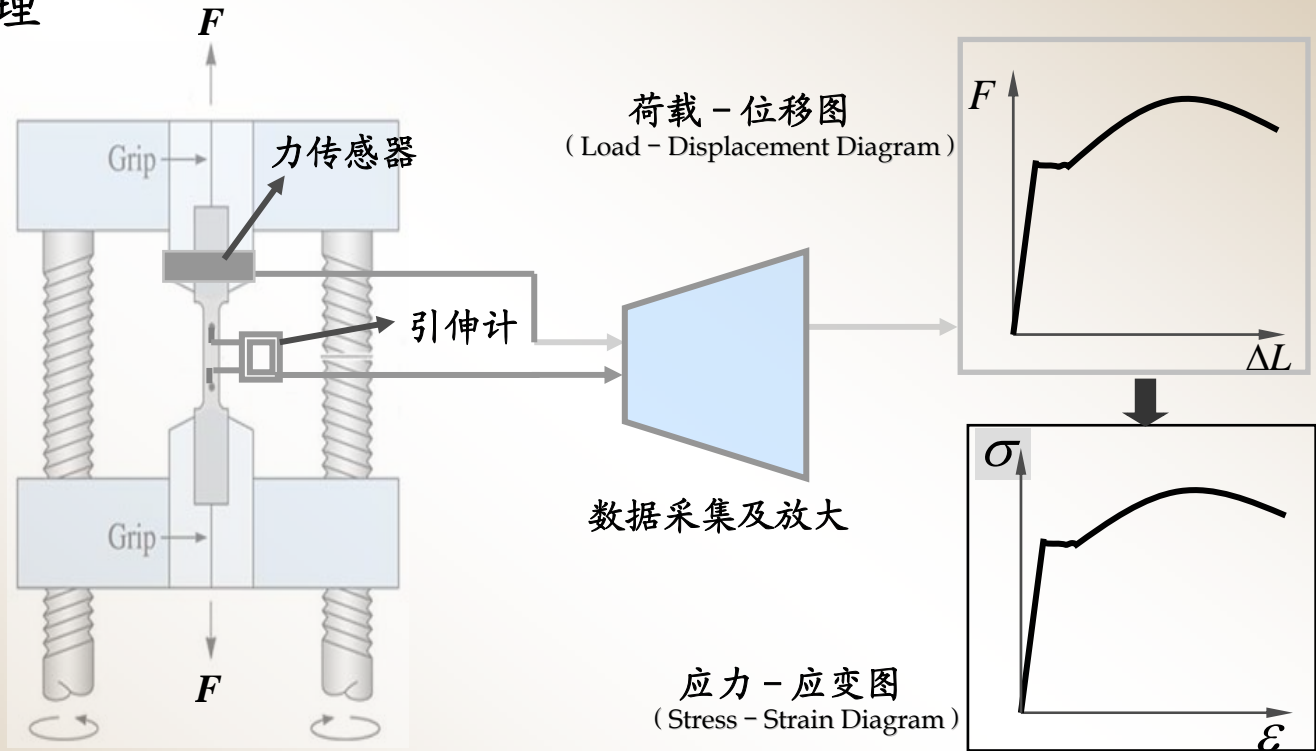
第四章 应力 - 应变关系

材料的性能



第四章 应力 - 应变关系 材料的性能

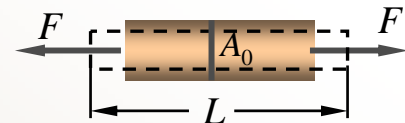
试验原理



名义或工程应力和应变 (Nominal or Engineering Stress and Strain)

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$



第四章 应力 - 应变关系

低碳钢拉伸

1.2 低碳钢 (Mild Steel) 拉伸时的力学性能

① 弹性阶段 (Elastic Behavior) (*OAB*段)

(1) 线弹性阶段 (*OA*段)

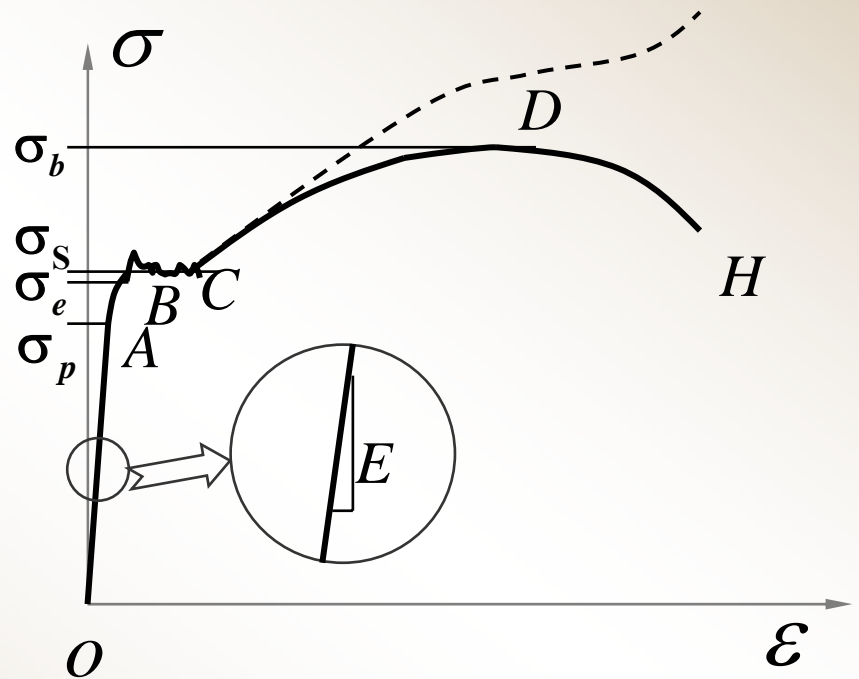
拉压比例极限 (Proportional Limit) σ_p

杨氏模量 (Young's Modulus - 1807) E

(2) 非性线弹性阶段 (*AB*段)

拉压弹性极限 (Elastic Limit) σ_e

Q235钢
 $E \approx 200 \text{ GPa}$
 $\sigma_p \approx 200 \text{ MPa}$
 $\sigma_b \approx 390 \text{ MPa}$
 $\sigma_s \approx 235 \text{ MPa}$



拉伸应力 - 应变图

第四章 应力 - 应变关系

低碳钢拉伸

1.2 低碳钢 (Mild Steel) 拉伸时的力学性能

② 屈服阶段 (Yielding) (**BC**段)

拉压屈服极限 (Yielding Stress) σ_s

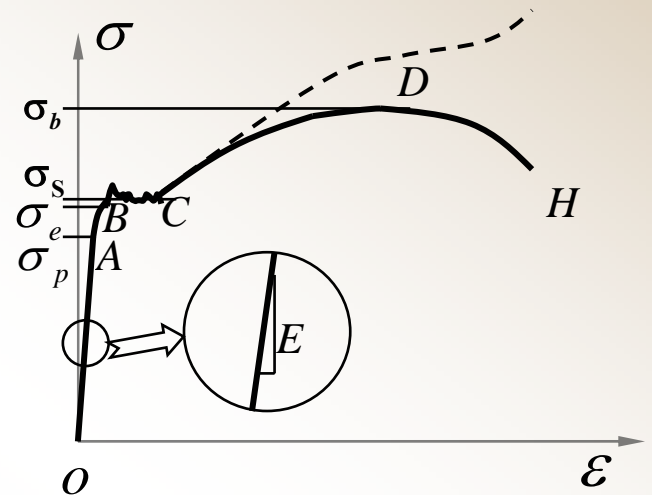
③ 应变强化阶段 (Strain Hardening) (**CD**段)

拉压强度极限 (Ultimate Limit) σ_b

④ 颈缩阶段 (Necking) (**DH**段) 局部变形阶段

真应力 - 应变图 (True Stress-Strain Diagram)

Thomas Young - England Scientist



拉伸应力 - 应变图



Q235钢

$E \approx 200 \text{ GPa}$

$\sigma_p \approx 200 \text{ MPa}$

$\sigma_b \approx 390 \text{ MPa}$

$\sigma_y \approx 235 \text{ MPa}$

第四章 应力 - 应变关系

低碳钢拉伸



第四章 应力 - 应变关系

低碳钢性能

1.3 低碳钢卸载、再加载时的力学行为

卸载 (Unloading)

弹性阶段内 → 荷载逐渐卸至零，
变形完全恢复。

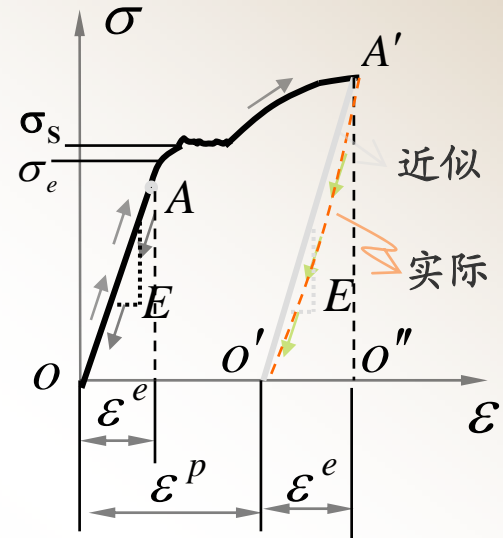
$o \rightarrow A \rightarrow o$ $\varepsilon = \varepsilon^e \rightarrow$ 弹性应变

屈服、强化阶段内 → 荷载逐渐卸至零，
部分变形恢复，部分变形残留。即：

$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \rightarrow$ 塑性应变 - 残留

弹性应变 - 消失 $o \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow o'$ $A'o' \approx // Ao$

☞ 卸载符合线弹性规律。(小变形下，忽略微弱的非线性行为)



第四章 应力 - 应变关系

低碳钢性能

卸载再加载 (Reloading)

荷载逐渐卸至零，立即再加载

$$A' \rightarrow o' \rightarrow A' \rightarrow D \rightarrow H$$

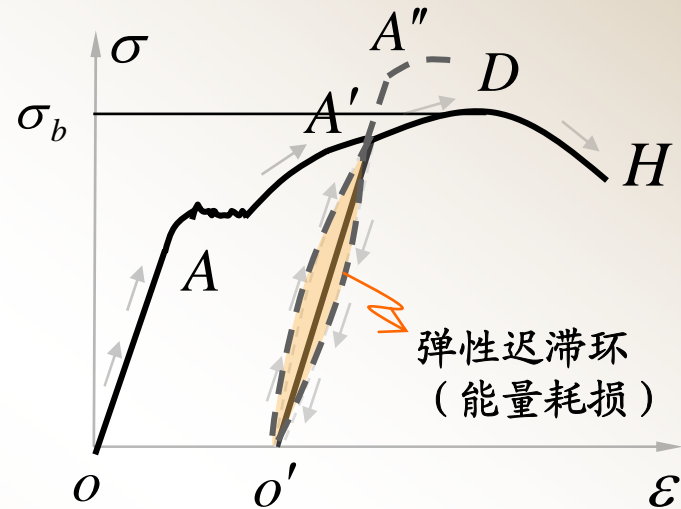
👉 **冷作硬化** - 经过塑性变形，使材料比例极限或弹性极限提高、塑性降低的现象。

经过一段时间后再加载

$$A' \rightarrow o' \rightarrow A'' \rightarrow D''$$

👉 **冷作时效** - 预加塑性变形，经过一段时间再加载使材料的比例极限或弹性极限还有所提高的现象。

👉 精确测量表明，强化段卸载再加载并不严格沿直线，而有一机械迟滞迴线，因能量损耗。



第四章 应力-应变关系

延伸率和收缩率



1.4 衡量材料塑性变形能力的指标

材料的塑性: 材料经受较大塑性变形而不破坏的能力。其度量如下:

延伸率 (Percent Elongation)

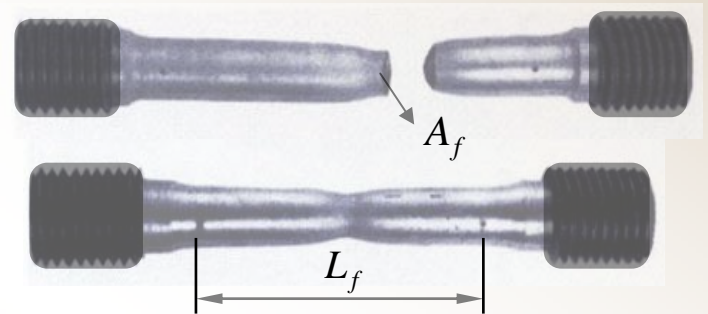
$$\delta = \frac{L_f - L_0}{L_0} \times 100\%$$

试件断裂时的
残留变形

断面收缩率 (Percent Reduction in Area)

$$\psi = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100\%$$

试件断裂时
断口的面积



韧 (塑或延) 性材料 (Ductile Material)

延伸率较大 $\delta \geq 5\%$

脆性材料 (Brittle Material)

延伸率较小 $\delta < 5\%$

典型塑性材料



Q235钢

$\delta = 25 \sim 30\%$

$\psi = 60\%$

第四章 应力 - 应变关系

泊松比

1.5 横向变形系数 - 泊松比 (Poisson's Ratio)

拉伸时，轴向伸长，横向收缩。

压缩时，轴向收缩，横向膨胀。

轴向应变 $\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$

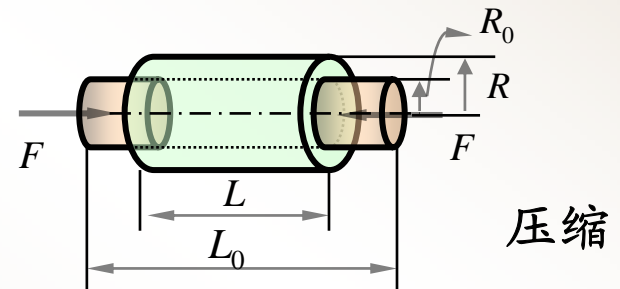
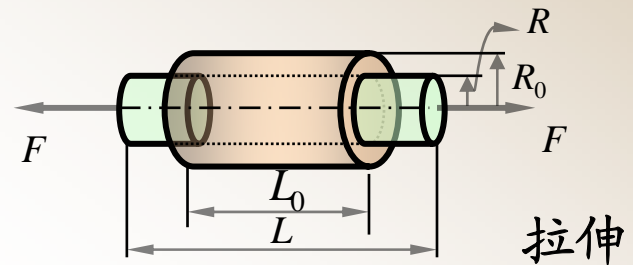
横向应变 $\varepsilon' = \frac{R - R_0}{R_0}$

泊松比 $\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ 或 $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ 无量纲

线弹性范围内，对均匀、各向同性材料，此比值为一常数。不同材料，此常数不同。

☞ 工程用金属材料 $\mu = \frac{1}{4} \sim \frac{1}{3}$ ；一般 $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ；

S D Poisson - French scientist



└─┬─┘ 材料不可压

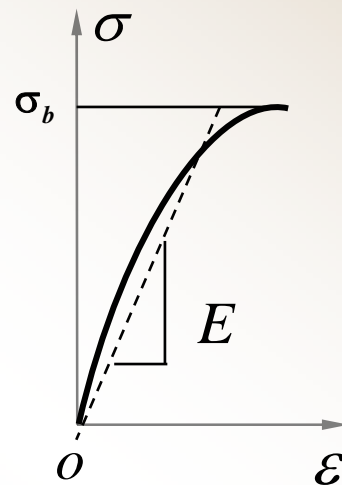
第四章 应力 - 应变关系

铸铁的拉伸



1.6 铸铁 (Gray Cast Iron) 拉伸时的力学性能

- ① 应力与应变无明显的线性关系，通常弹性模量 E 以规定总应变（如 0.25%）对应的割线斜率来近似度量 - 割线弹性模量。
- ② 无屈服、强化和局部变形现象，衡量其强度的唯一指标是强度极限。
- ③ 受拉直至断裂，变形很小，横截面的大小几乎无变化。



☞ $\delta = 0.4 \sim 0.5\%$ \implies 典型脆性材料

第四章 应力 - 应变关系

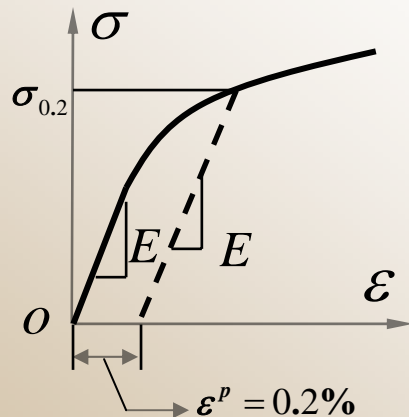
其他塑性材料的拉伸

1.7 其它塑性金属材料拉伸时的力学行为

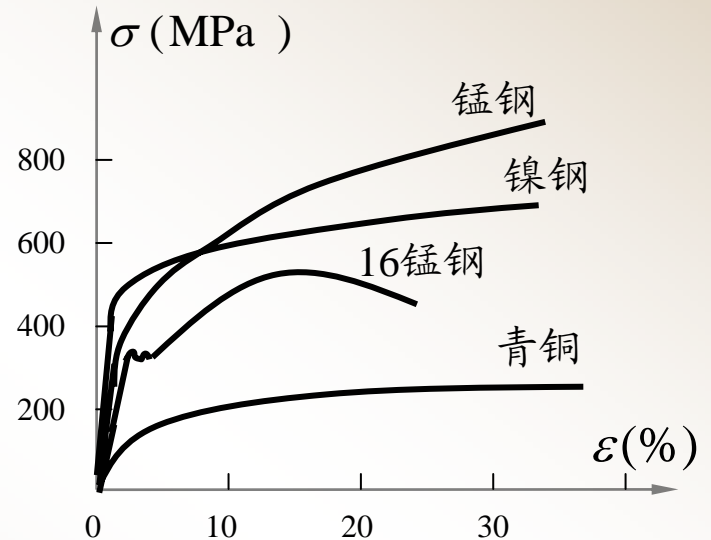
与低碳钢拉伸时力学行为类似的塑性材料，如16锰钢，50钢，以及一些高强度低合金钢等。

另一些塑性材料，如青铜等，则无明显的屈服阶段。

名义屈服应力 (Mean Yield Stress)



工程上，对无明显屈服极限的塑性材料，取残余或塑性应变为0.2%对应的应力，作为其屈服极限，称为名义屈服极限，记为 $\sigma_{0.2}$ 。



第四章 应力 - 应变关系

压缩时的性能



1.8 低碳钢压缩时的力学性能

① $\sigma_p^c = \sigma_p^t$
 $E^c = E^t$
 $\sigma_s^c = \sigma_s^t$

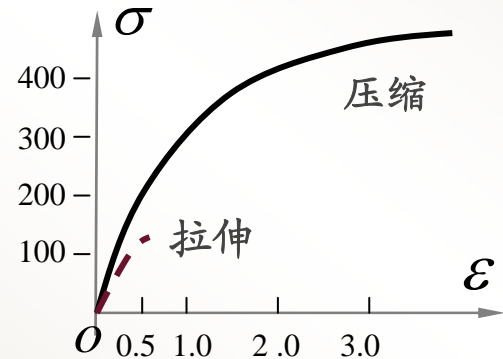
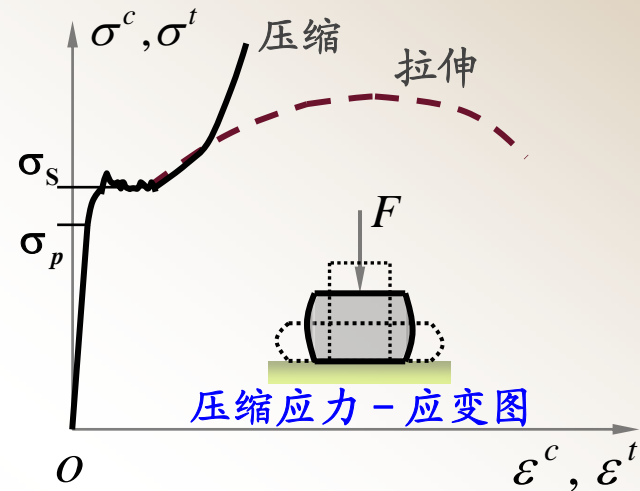
② 可一直压成币状而不破坏，因而得不到强度极限。

👉 为此，一般不再做此实验。

铸铁压缩时的力学性能

① 应力 - 应变图形状同其拉伸。

② 强度极限和延伸率比拉伸时大得多。



第四章 应力-应变关系

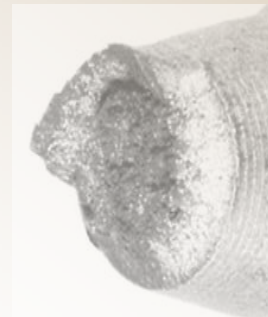
破坏形态



1.9 材料的破坏机理

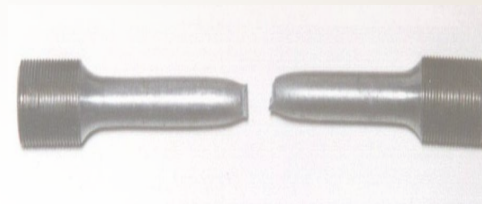
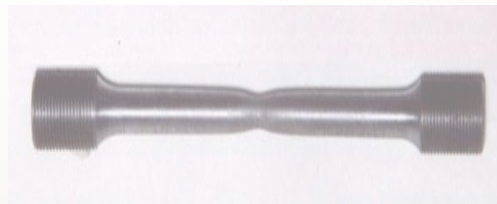
① 低碳钢拉伸

屈服阶段 - 滑移线

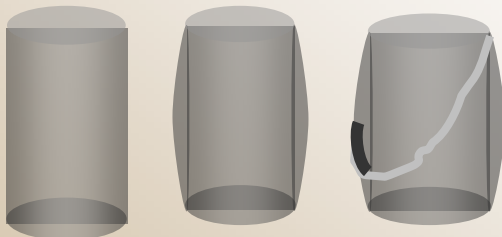


② 颈缩阶段 - 滑移线

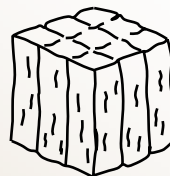
断口



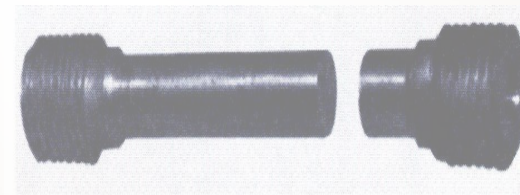
低碳钢 (受拉)



铸铁 (受压)



混凝土 (受压)



铸铁 (受拉)

第四章 应力 - 应变关系

胡克定律



2 线弹性应力-应变关系 - 广义虎克定律

2.1 胡克定律 (Hooke's Law - 1676)

试验表明, 若材料处于线弹性阶段, 即 $\sigma \leq \sigma_p$, 则应力与相应的应变成比例。

$$\sigma = E\varepsilon$$

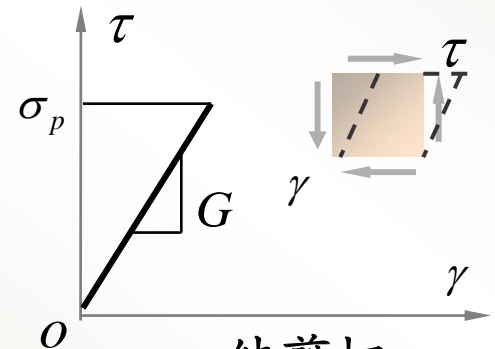
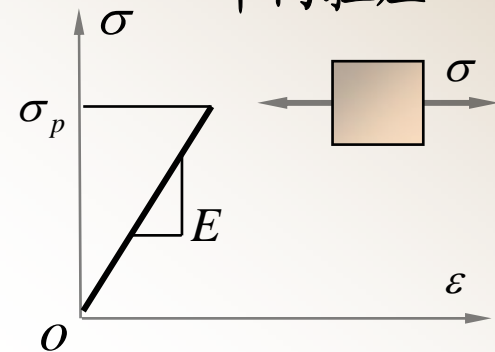
同理, 若材料单元体承受纯剪切, 在线弹性阶段内, 即 $\tau \leq \tau_p$, 则剪应力与剪应变成比例关系。

$$\tau = G\gamma$$

剪切弹性模量 (Shear Modulus of Elasticity)

Robert Hooke - England Scientist

单向拉压



纯剪切



2.2 广义虎克定律 (Generalized Hooke's Law)

叠加原理 (Principle of Superposition)

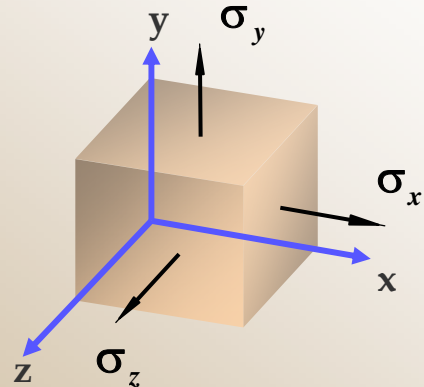
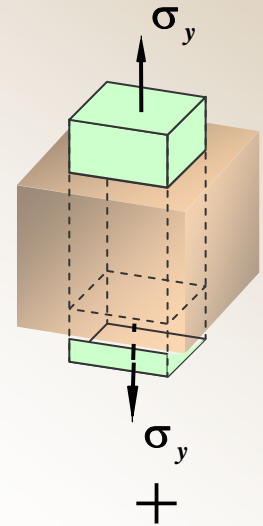
① 应力与应变成线性关系

② 小变形

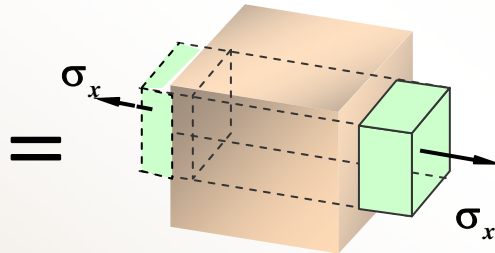
$$\varepsilon'_x = -\mu\varepsilon'_y = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon'_y = +\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon'_z = -\mu\varepsilon'_y = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$



线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$



$$\varepsilon'_x = +\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_y = -\mu\varepsilon'_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

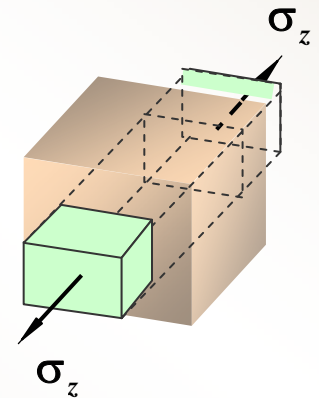
$$\varepsilon'_z = -\mu\varepsilon'_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

+

$$\varepsilon'_x = -\mu\varepsilon'_z = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon'_y = -\mu\varepsilon'_z = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon'_z = +\frac{\sigma_z}{E}$$

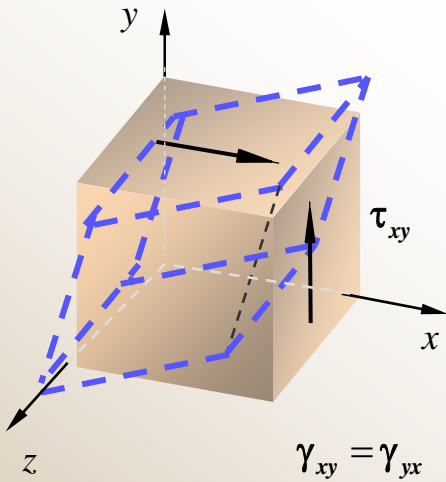


第四章 应力 - 应变关系

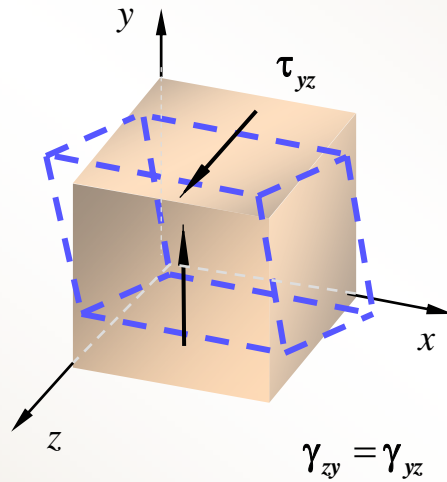
广义胡克定律



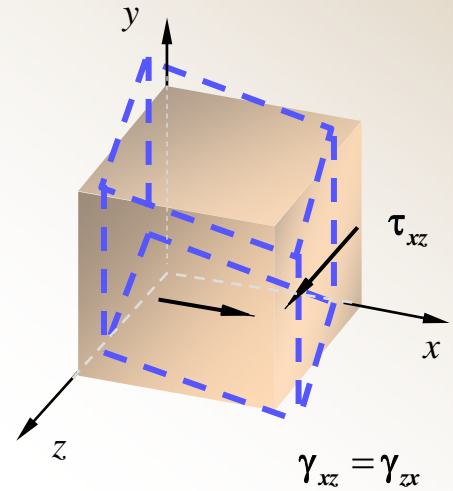
实验表明切应力不引起线应变，且某面内的切应力仅引起该面内的切应变。



切应变 $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$



$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$



$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$

第四章 应力 - 应变关系

广义胡克定律

线应变叠加，切应变与切应力关系，共同组成广义虎克定律。



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

第四章 应力 - 应变关系

广义胡克定律

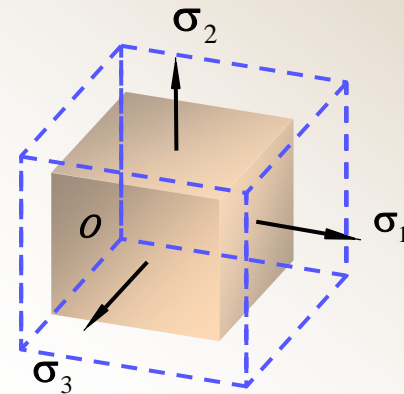


主应力:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$



$$\gamma_{12} = \frac{1}{G} \tau_{12} = 0, \quad \dots$$

应变主轴与应力主轴一致

第四章 应力 - 应变关系

广义胡克定律

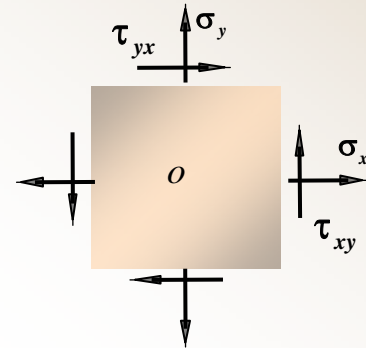


平面应力状态

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$



第四章 应力 - 应变关系

材料常数间的关系

2.3 材料常数间的关系 (Relationship Involving E , G and μ)

纯剪应力状态 $\xrightarrow[\alpha=45^\circ]{\text{同一点}}$ 主应力状态

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

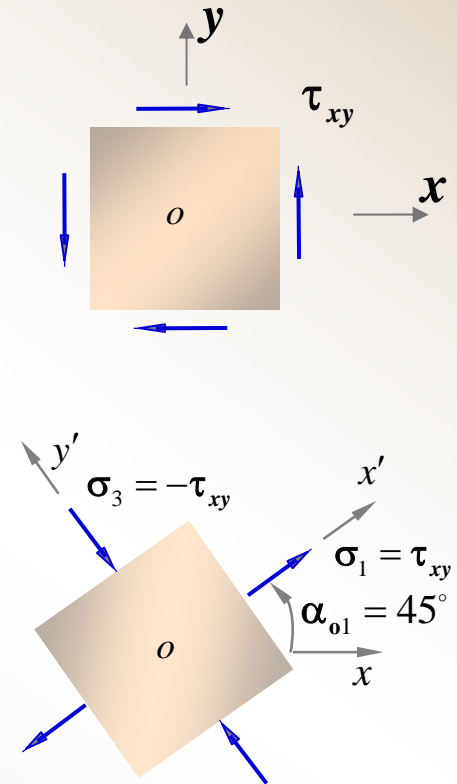
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_3) = \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy}$$

$\alpha = 45^\circ$ 应变变换

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{x'} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



第四章 应力 - 应变关系

体积应变和体积模量



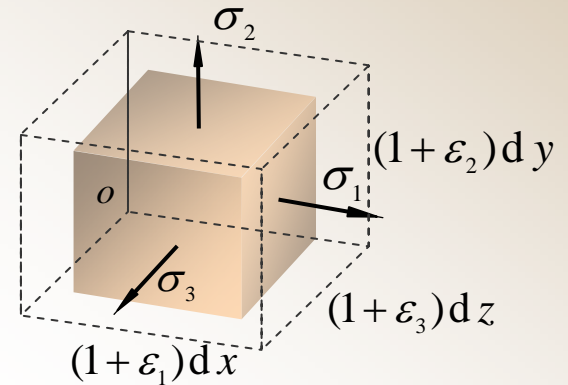
2.4 体积应变和体积模量 (Volumetric Strain or Dilatation and Bulk Modulus)

单元体承受正应力，体积将变化。

$$dV = dx dy dz$$

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz$$

$$\Theta = \frac{\delta V}{dV} = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



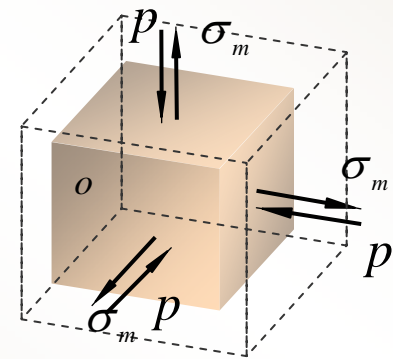
$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{K} \sigma_m$$

其中平均应力 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

体积模量 $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$

$$\mu = \frac{1}{3} \rightarrow K \approx E$$

$$\mu = \frac{1}{2} \rightarrow \Theta = 0$$



静水压力 (Hydrostatic Stress)

体积应变与平均应力成正比

第四章 应力 - 应变关系

例题1



2.4 例题1

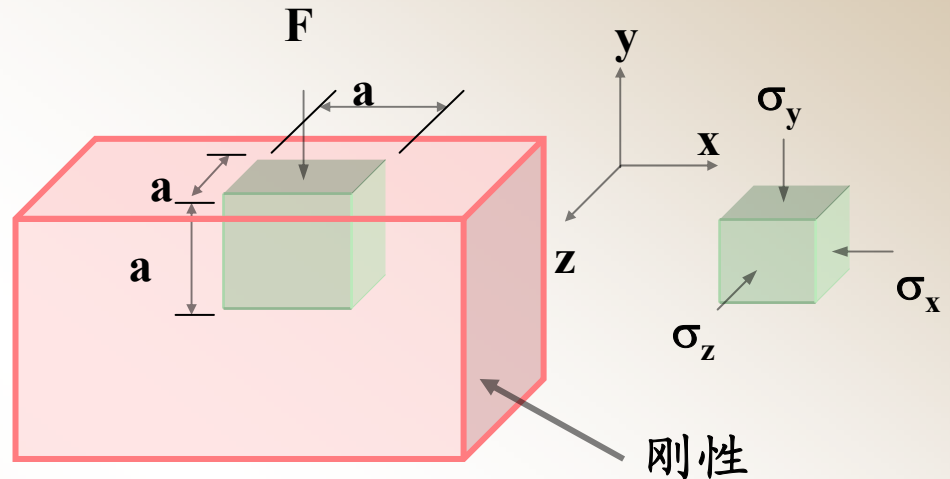
边长为 $a = 0.1\text{m}$ 的铝质立方块，
无间隙地嵌入钢制凹槽内。

铝的弹性模量 $E = 71\text{GPa}$

泊松比 $\mu = 0.3$ 。

$F = 100\text{KN}$ 。

求铝块的主应力，最大切应力。



解：根据 y 方向平衡条件可知

$$\sigma_y = -\frac{F}{a^2} = -\frac{100 \times 10^3 \text{ N}}{0.1^2 \text{ m}^2} = -10.0 \text{ MPa}$$

注意：力 F 应该理解为作用在立方体上表面的均布力。

第四章 应力 - 应变关系

例题1

几何条件:

由于受钢壁的阻碍, 使其在 x 、 z 方向的应变为零。

根据广义胡克定律:

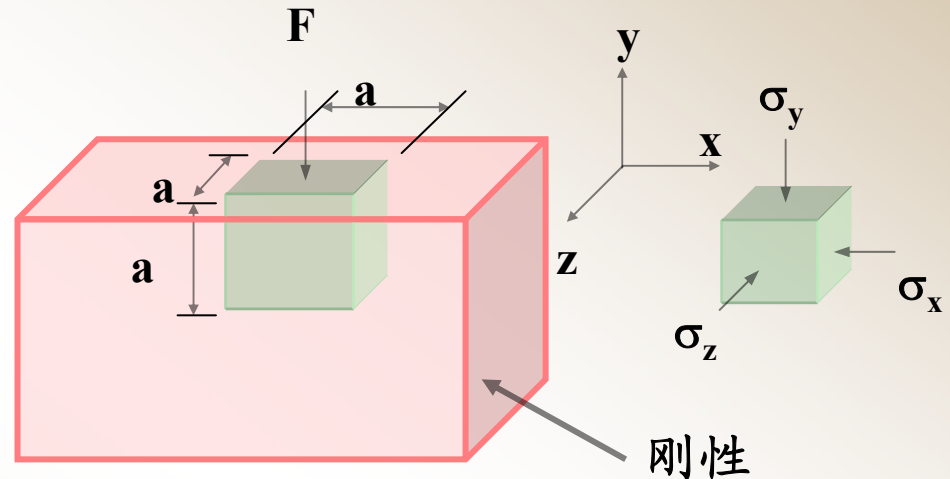
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu^2} \sigma_y = \frac{0.3 \times (1+0.3)}{1-0.3^2} (-10.0 \text{MPa}) = -4.29 \text{MPa}$$

$$\text{主应力 } \sigma_1 = \sigma_2 = -4.29 \text{MPa}, \quad \sigma_3 = -10.0 \text{MPa}$$

$$\text{最大切应力 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 2.86 \text{MPa}$$

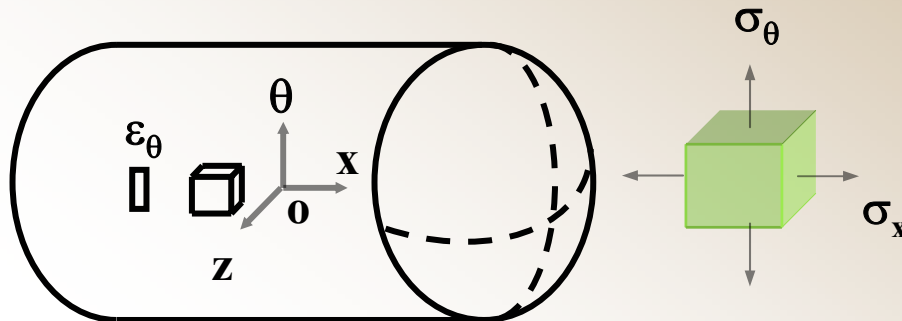


第四章 应力 - 应变关系

例题2

例题2

圆筒形薄壁压力容器。筒壁中面直径 $D = 800\text{mm}$ ，壁厚 $t = 5\text{mm}$ ，容器钢材的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ ，测得周向应变 $\varepsilon_\theta = 600 \times 10^{-6}$ 。求筒内压力 p ，轴向应变 ε_x 。



解：因为
$$\sigma_\theta = \frac{pD}{2t} \quad \sigma_x = \frac{pD}{4t}$$

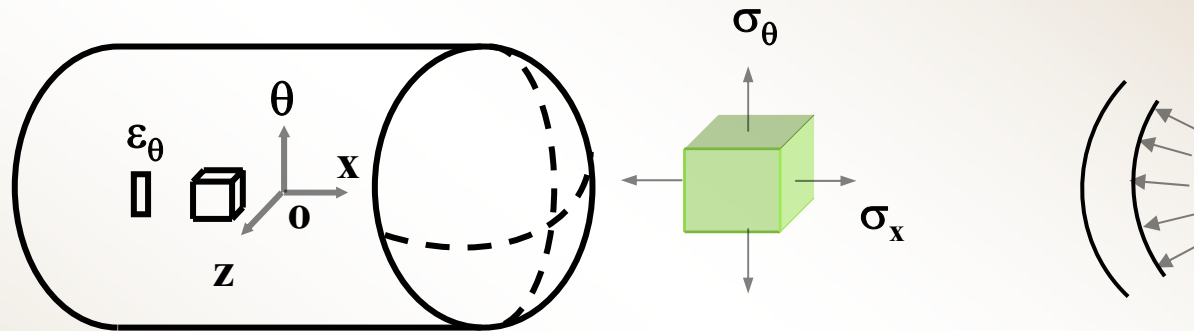
根据广义胡克定律
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_x) = \frac{pD}{4Et}(2 - \mu)$$

所以
$$p = \frac{4Et\varepsilon_\theta}{D(2 - \mu)} = \frac{4 \times 200 \times 10^9 \text{ Pa} \times 0.005 \text{ m}}{0.8 \text{ m} \times (2 - 0.3)} \times 600 \cdot 10^{-6} = 1.76 \text{ MPa}$$

轴向应变
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_\theta) = \frac{pD}{4Et}(1 - 2\mu) = 140 \times 10^{-6}$$

第四章 应力 - 应变关系

例题2



- 1, 忽略沿厚度方向的应力 σ_z
- 2, 中间部分筒壁都处于相同的应力状态

第四章 应力 - 应变关系

例题3

例题3

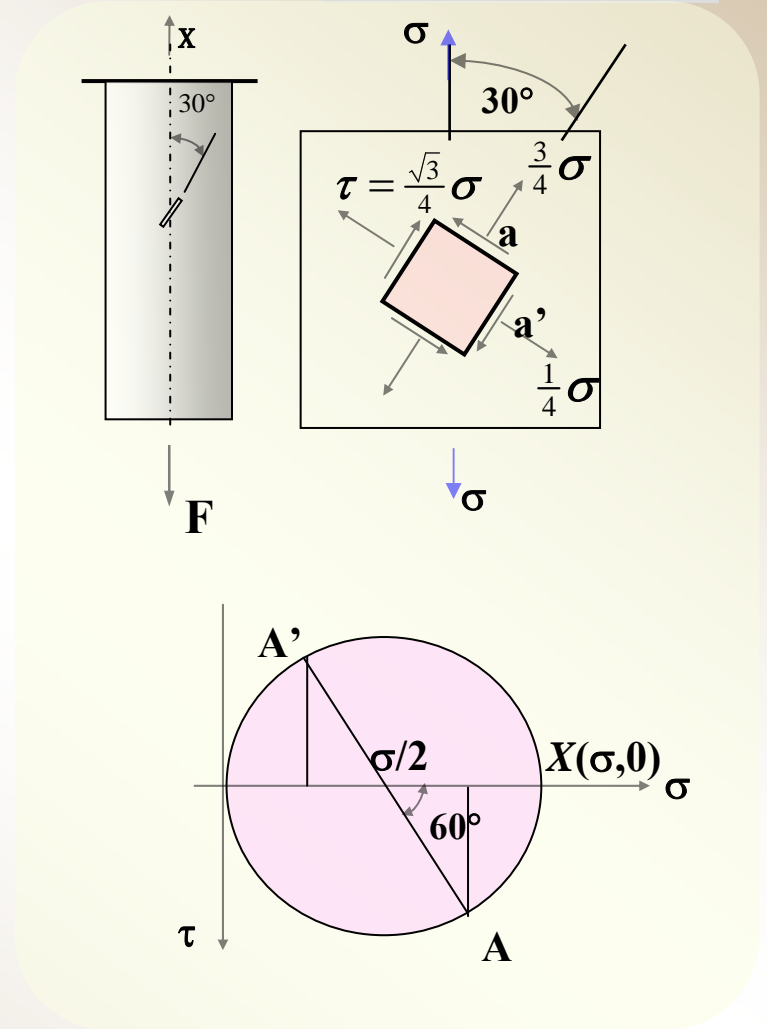
钢制圆杆的直径 $d = 2\text{cm}$ ，钢材的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ 。测得 30° 方向应变 $\varepsilon_{30} = 410 \times 10^{-6}$ ，求拉力 F 。

解：单向拉伸应力状态， a 面和 a' 面应力分别为

$$\sigma_a = \frac{3}{4}\sigma \quad \tau_a = \frac{\sqrt{3}}{4}\sigma$$

$$\sigma_{a'} = \frac{1}{4}\sigma \quad \tau_{a'} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma$$

下一步？



第四章 应力 - 应变关系

例题3

例题3 (续)

根据广义胡克定律

$$\varepsilon_{30} = \frac{1}{E}(\sigma_a - \mu\sigma_{a'}) = \frac{1}{E}\left(\frac{3}{4}\sigma - \frac{1}{4}\mu\sigma\right)$$

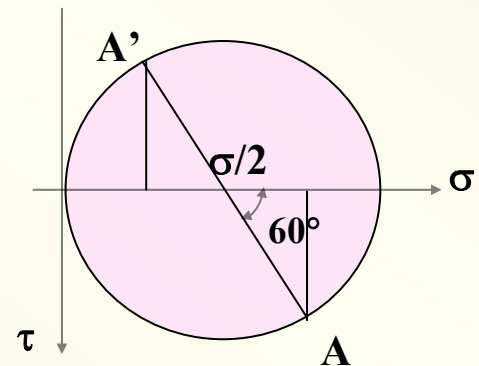
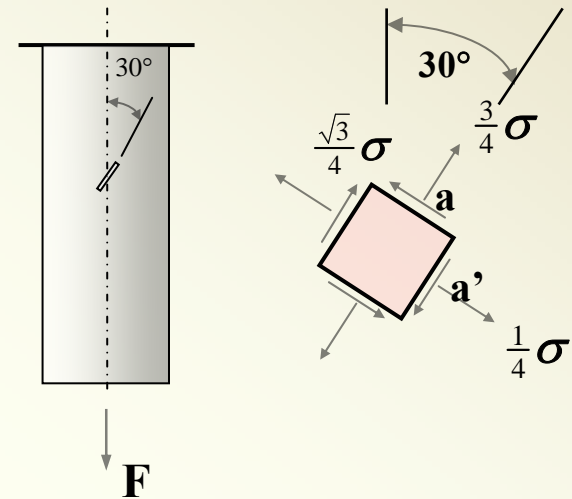
$$\sigma = \frac{4E\varepsilon_{30}}{3-\mu} =$$

$$\frac{4 \times 200 \times 10^9 \text{ Pa} \times 410 \times 10^{-6}}{2.7} = 121.5 \text{ MPa}$$

所以

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \sigma =$$

$$\frac{\pi \times 0.02^2 \text{ m}^2}{4} \times 121.5 \times 10^6 \text{ Pa} = 38.16 \text{ kN}$$

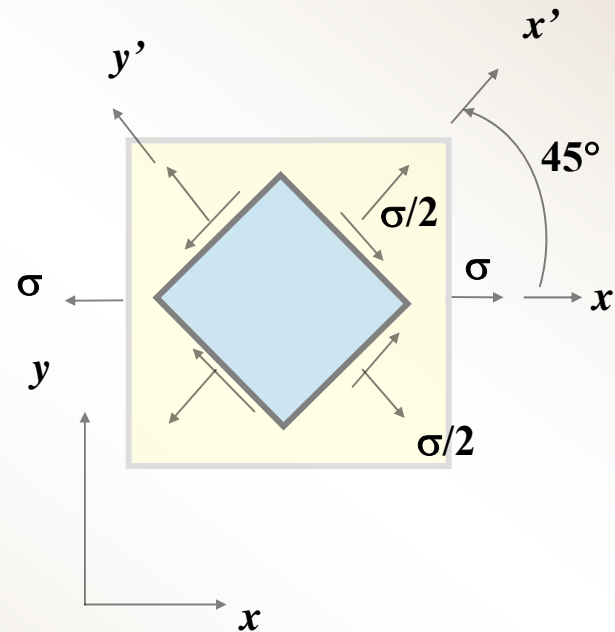
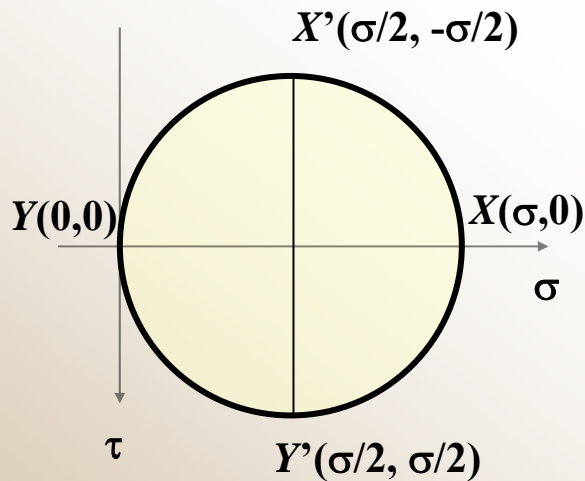
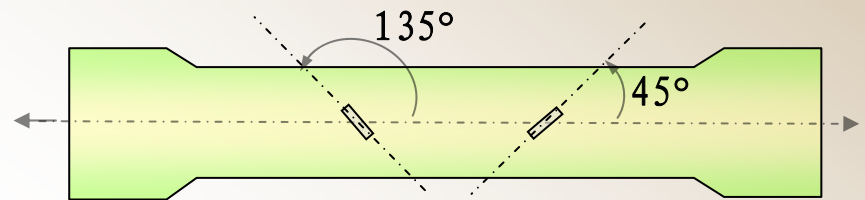


第四章 应力-应变关系

例题4

例题4

如图所示拉伸试件，已知横截面上正应力 σ ，材料的弹性模量 E ，泊松比 μ 。试求与轴向成 45° 和 135° 方向的正应变 ε_{45} 和 ε_{135} 。



第四章 应力 - 应变关系

例题4

解：(1) 通过应力应变关系求解：

$$\sigma_{45} = \sigma/2, \quad \sigma_{135} = \sigma/2。$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{E}(\sigma_{45} - \mu\sigma_{135}) = \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma \quad \varepsilon_{135} = \frac{1}{E}(\sigma_{135} - \mu\sigma_{45}) = \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma$$

(2) 利用应变变换公式求解：

$$\text{已知 } \varepsilon_x = \sigma/E, \quad \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_x = -\mu \sigma/E, \quad \gamma_{xy} = 0。$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma \quad \varepsilon_{135} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma$$

第四章 应力-应变关系

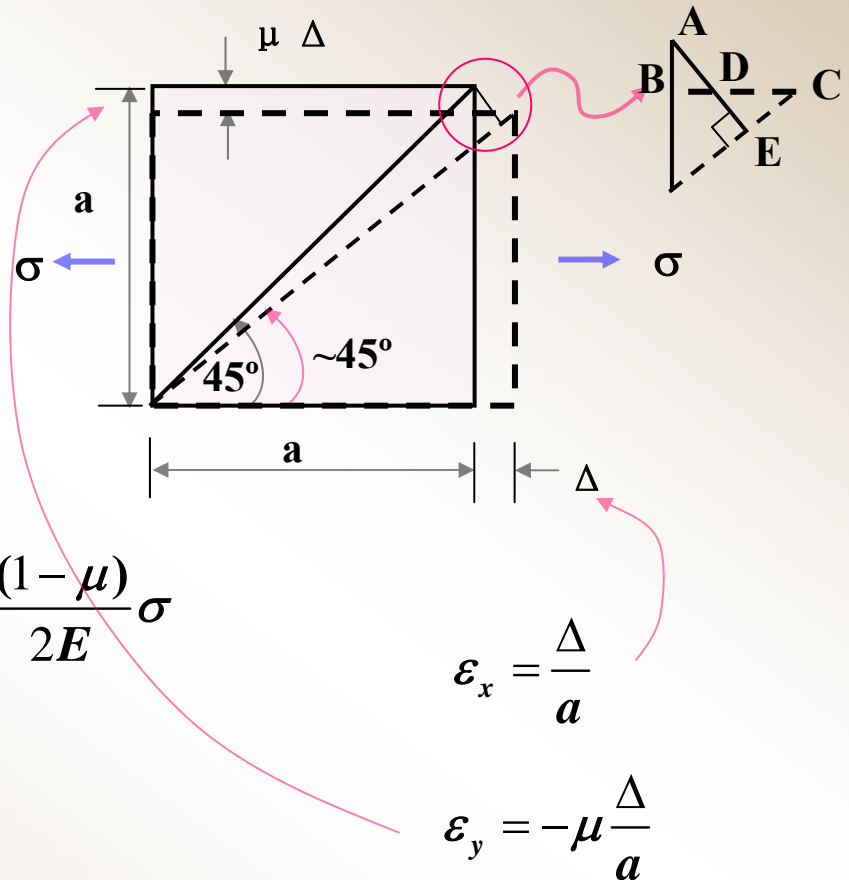
例题4

(3) 利用应变单元几何关系求解:

$$\begin{aligned} \overline{CE} &= \frac{\overline{CD}}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{CB} - \overline{DB}}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{CB} - \overline{AB}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\Delta - \mu\Delta}{\sqrt{2}} = \frac{(1-\mu)\Delta}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\overline{CE}}{\sqrt{2}a} = \frac{(1-\mu)\Delta}{2a} = \frac{(1-\mu)}{2} \varepsilon_x = \frac{(1-\mu)}{2E} \sigma$$

同理可以求得 ε_{135° .



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{a}$$

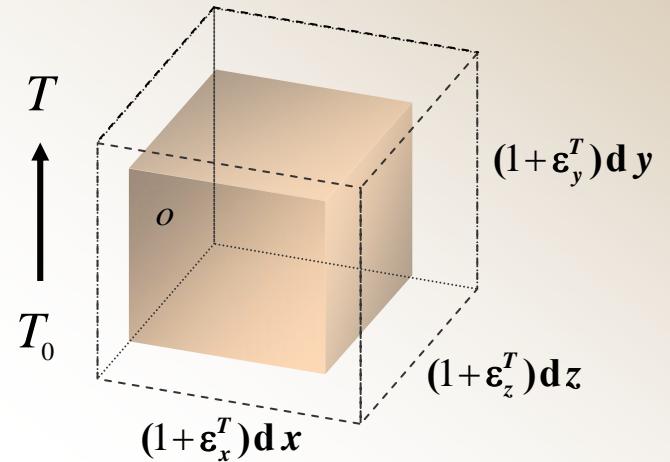
$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\Delta}{a}$$

第四章 应力-应变关系

热应变

2.5 热应变 (Thermal Strain)

温度改变 \longrightarrow 材料变形
 \downarrow
 均匀、各向同性材料
 \downarrow
 引起点各向均匀线应变，
 不引起切应变。



$$\Delta T = T - T_0$$

\uparrow
 温差



$$\epsilon_x^T = \alpha_T \Delta T$$

$$\epsilon_y^T = \alpha_T \Delta T$$

$$\epsilon_z^T = \alpha_T \Delta T$$

$$\gamma_{xy}^T = \gamma_{zy}^T = \gamma_{xz}^T = 0$$



材料热膨胀系数

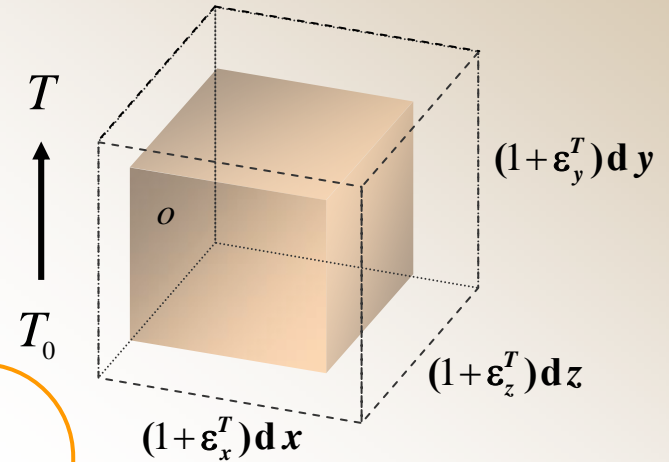
第四章 应力 - 应变关系

热应变



2.5 热应变 (Thermal Strain)

叠加法



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^T$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha_T \Delta T \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha_T \Delta T \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha_T \Delta T \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

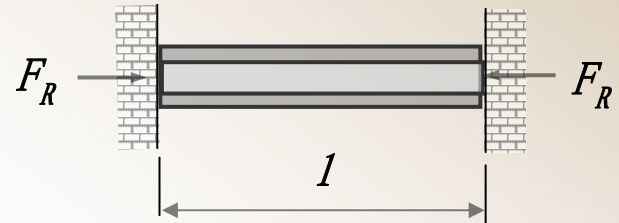
第四章 应力 - 应变关系

例题5

例题5

2.5 热应变 (Thermal Strain)

两端固定的钢制蒸汽管道，长度为 l 。
钢的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，热膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} / \text{K}$ 。温度升高 $\Delta T = 30^\circ$ 。求热应力。



解：

$$\text{温度应变 } \varepsilon^T = \alpha \Delta T$$

管道的总应变为零。

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T = 0$$

所以，

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} = -\varepsilon^T = -\alpha \Delta T$$



物体受约束时，才可能产生热应力。

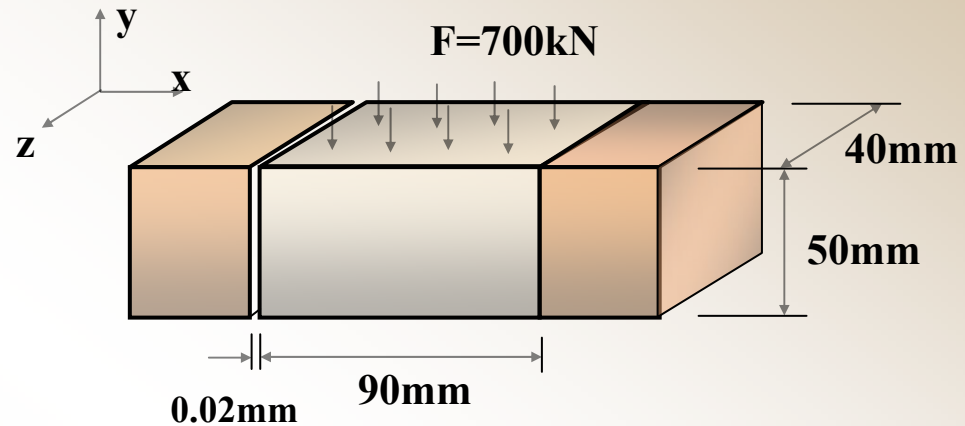
$$\sigma = -\alpha \Delta T \cdot E = -12.5 \times 10^{-6} \times 30 \times 200 \times 10^9 \text{ Pa} = -75 \text{ MPa}$$

第四章 应力 - 应变关系

例题6

例题6

正六面体钢块，体积为 $90 \times 50 \times 40 \text{mm}^3$ 。两端受固定的刚性物体阻碍，左端离刚性体有 0.02mm 间隙。钢块上表面受均布力作用，其值为 $F = 700 \text{kN}$ 。钢的弹性模量 $E = 207 \text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ ，热膨胀系数 $\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ 。当温度上升 15°C 时，求钢块的应力和体积的变化。



解：由题意知，

$$\sigma_y = -\frac{700 \times 10^3 \text{ N}}{0.09 \times 0.04 \text{ m}^2} = -194.4 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 0$$

第四章 应力 - 应变关系

例题6

例题6

(续)

x 方向允许最大的伸长为
0.02mm, 先假设变形后钢块
充满了间隙, 即

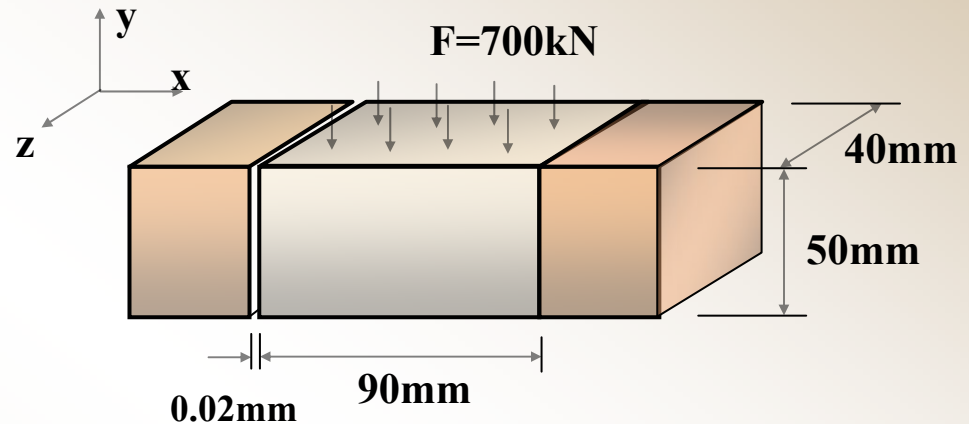
$$\varepsilon_x = \frac{0.02\text{mm}}{90\text{mm}} = 222.2 \times 10^{-6}$$

因为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon^e + \varepsilon^T = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ &= \frac{\sigma_x - 0.3 \times (-194.4 \times 10^6 + 0)\text{Pa}}{207 \times 10^9 \text{Pa}} + 11 \times 10^{-6} \times 15 = 222.2 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

所以 $\sigma_x = -46.48\text{MPa}$

计算结果 σ_x 为负, 证明先前关于变形的假设是正确的。



第四章 应力 - 应变关系

例题6

例题6 (续)

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ &= \frac{-194.4 \times 10^6 \text{ Pa} - 0.3 \times (-46.48 \times 10^6 + 0) \text{ Pa}}{207 \times 10^9 \text{ Pa}} + 11 \times 10^{-6} \times 15 = -707 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T \\ &= \frac{0 - 0.3 \times (-46.48 \times 10^6 - 194.4 \times 10^6) \text{ Pa}}{207 \times 10^9 \text{ Pa}} + 11 \times 10^{-6} \times 15 = 514 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

所以体积应变 $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 29.5 \times 10^{-6}$

钢块的体积变化为 $\Delta V = V \Theta = 90 \times 50 \times 40 \text{ mm}^3 \times 29.5 \times 10^{-6} = 5.31 \text{ mm}^3$

第四章 应力 - 应变关系

应变能

3 复杂应力状态下的应变能 (Strain Energy at Complex Stress State)

3.1 外力功与应变能

$$f: 0 \rightarrow F$$

$$\delta: 0 \rightarrow \Delta$$

线弹性

$$\text{外力功 } W = \int_0^{\Delta} f(\delta) d\delta \rightarrow W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

整体变形能 $U = W$

$$U = W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

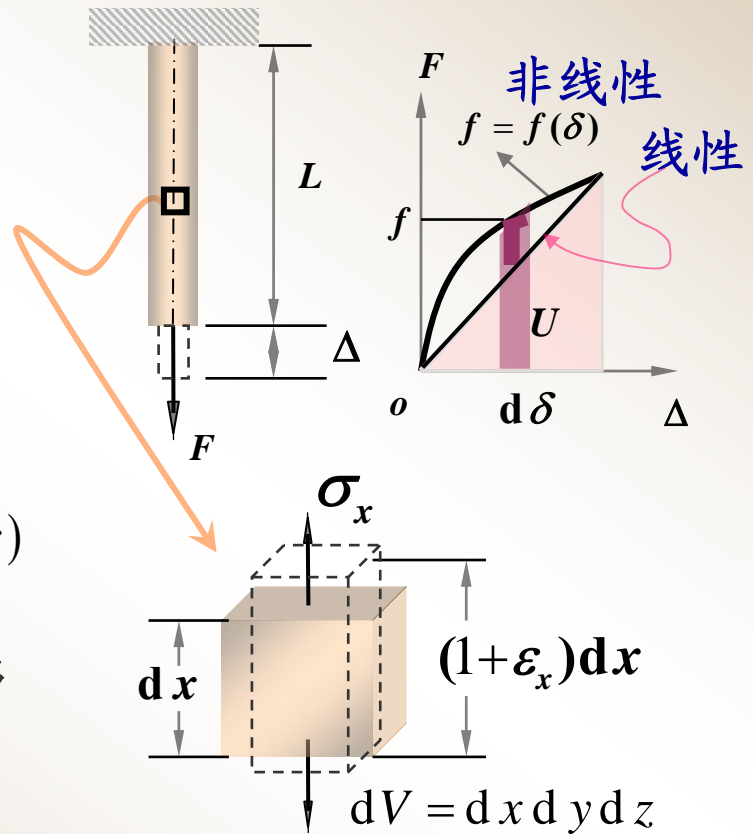
微元应变能

$$dU = dW = \frac{1}{2} (\underbrace{\sigma_x}_{\text{力}} d y d z) (\underbrace{\epsilon_x}_{\text{位移}} d x)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV$$

$$U = \int_V dU$$

变形能单位: 焦, $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$



第四章 应力-应变关系

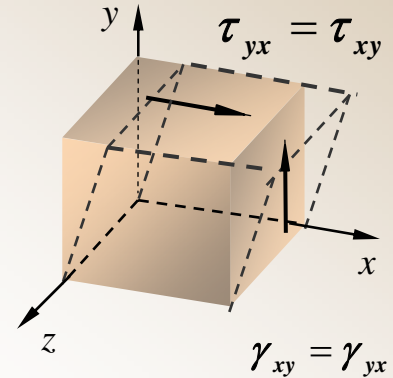
应变能



同理，对仅受纯剪的单元体（线弹性）

$$dU = dW = \frac{1}{2} \underbrace{(\tau_{yx} dx dz)}_{\text{力}} \underbrace{(\gamma_{yx} dy)}_{\text{位移}} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

$$U = \int_V dU$$

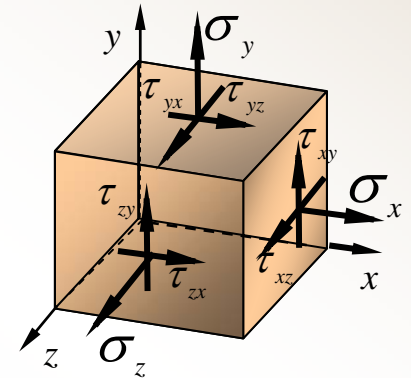


对处于一般应力状态的线弹性单元体：

$$dU = dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

用主应力表示：

$$dU = dW = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV \quad U = \int_V dU$$



第四章 应力 - 应变关系

应变比能



3.2 应变能密度 - 应变比能 (Strain-energy Density)

应变比能 - 单位体积内的应变能。
对于线弹性体：

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

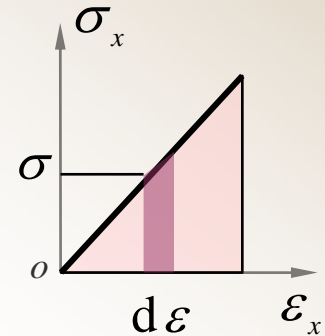
用主应力表示：

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

$$U = \int_V u dV$$

利用线弹性虎克定律得：

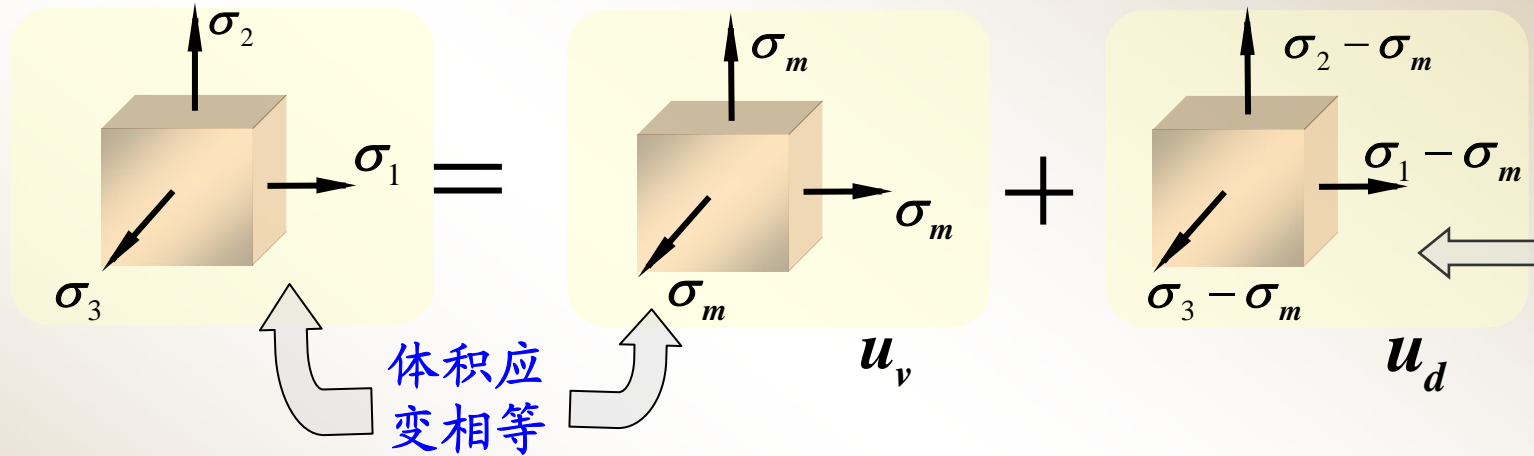
$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)$$



应变比能相当于应力在应变上做功；应变比能也可完全用应变分量表示。

第四章 应力 - 应变关系

应变比能



体积应变相等

应力偏量 $\sigma_i' = \sigma_i - \sigma_m, \quad i = 1, 2, 3$

单元体变形 = 体积改变 + 形状改变

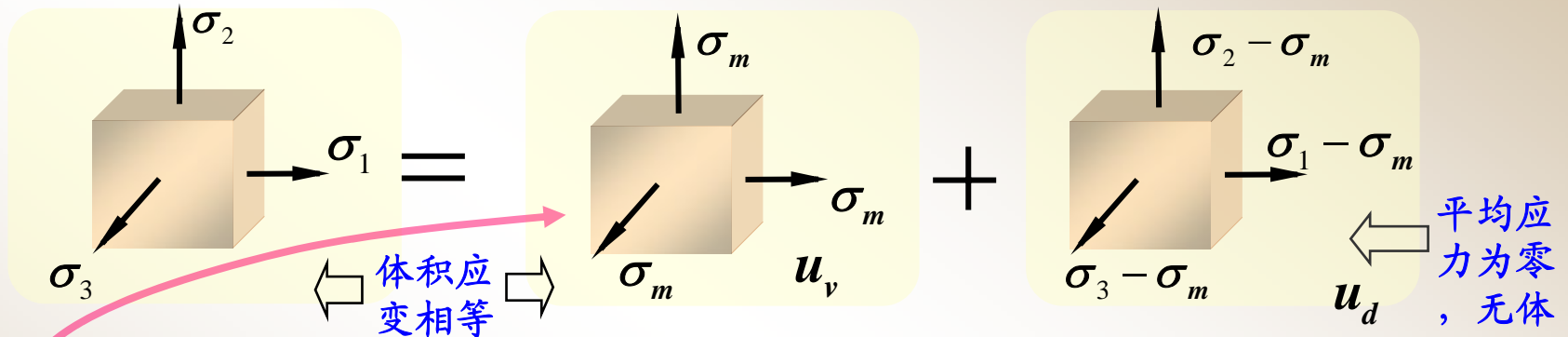
单元体应变比能 = 体积改变比能 + 形状改变比能 (歪形能)

$$u = u_v + u_d$$



第四章 应力 - 应变关系

应变比能



因为 $\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E}(3\sigma_m)$

体积改变用体积应变度量，体积应变相等的两个单元体的 u_v 相等。

$$u_v = \frac{1}{2} \Theta \sigma_m = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

则
$$u_d = u - u_v = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$



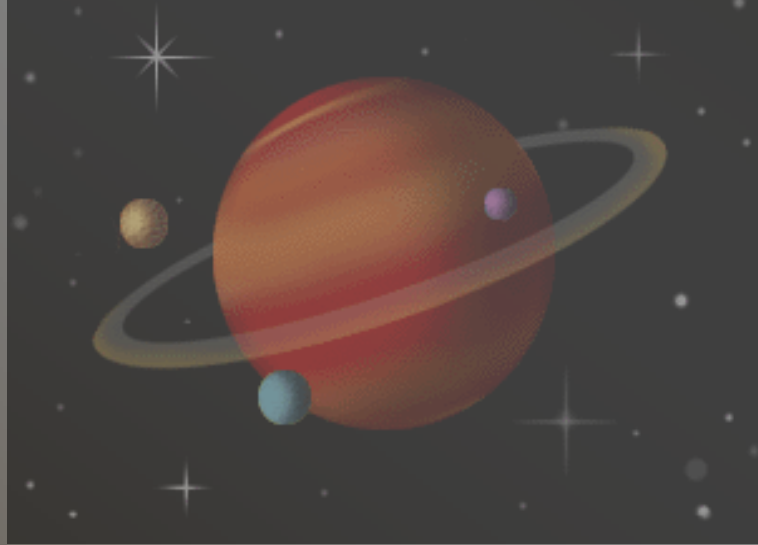
本讲结束

End of This Chapter



谢谢!

宇宙之大，粒子之小，力学无处不在。



Thank You