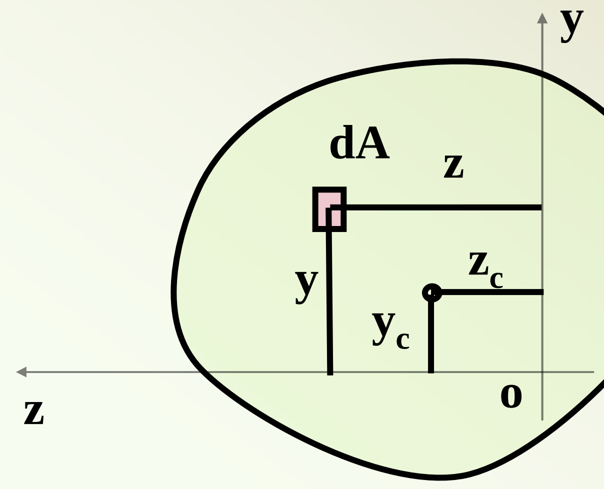
附录B 截面图形的几何性质

1，面积矩，惯性矩与极惯性矩

面积矩（静矩）与形心

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = y_c \cdot A$$

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A = z_c \cdot A$$



$$y_c = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A} \qquad z_c = \frac{\int_A z\mathrm{d}A}{A}$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} \qquad z_c = \frac{S_y}{A}$$

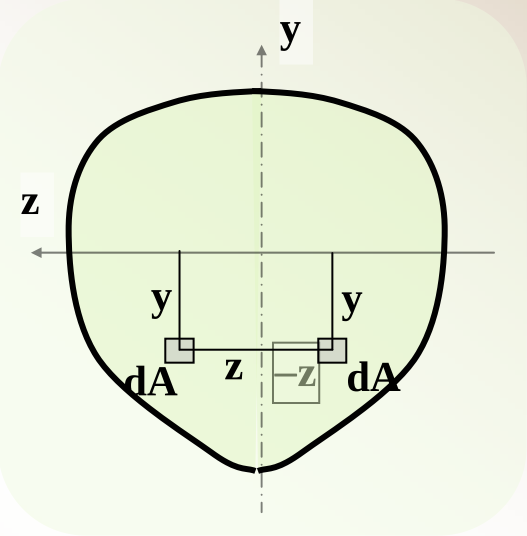
附录B 截面图形的几何性质

薄壁圆截面 $I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A \approx R_0^2 A = 2\pi R_0^3 t$

惯性矩 $I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A \quad I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$

惯性积 $I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A$

当截面具有一对称轴时， $I_{yz} = 0$



$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + \int_A z^2 \mathrm{d}A = I_z + I_y$$

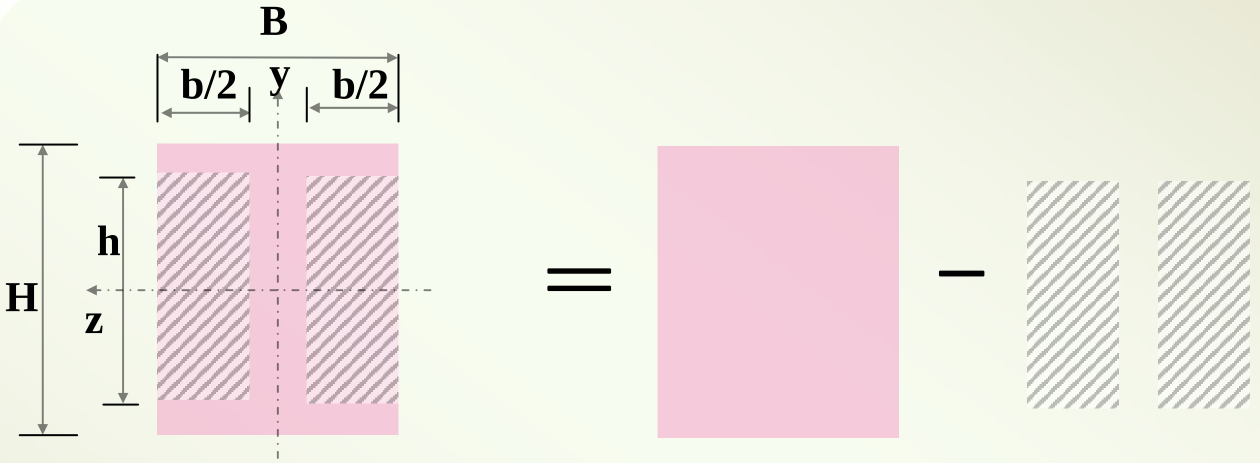
附录B 截面图形的几何性质

圆截面的惯性矩

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} \qquad I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

矩形截面的惯性矩 $I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$

附录B 截面图形的几何性质



（a） （b） （c）

$$I_z^{(b)} = I_z^{(a)} + I_z^{(c)}$$

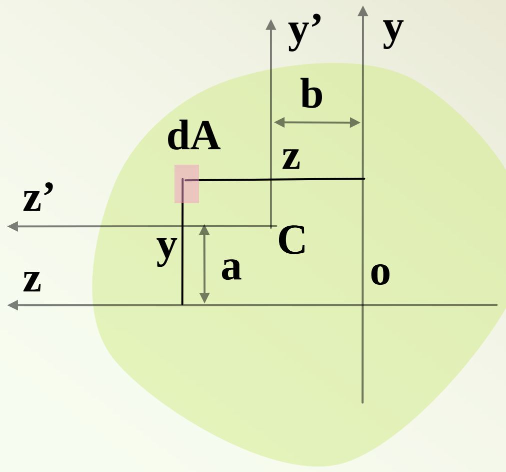
$$I_z^{(a)} = I_z^{(b)} - I_z^{(c)} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

附录B 截面图形的几何性质

惯性矩的平移轴公式

$$y = a + y'$$

$$z = b + z'$$



$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_A (a + y')^2 \mathrm{d}A$$

$$= a^2 A + 2a\int_A y' \mathrm{d}A + \int_A y'^2 \mathrm{d}A$$

如果C是形心

$$I_z = a^2 A + I_{zc} \quad I_y = b^2 A + I_{yc} \quad I_{xy} = abA + I_{xyc}$$

上海交通大学

SJTU

附录B 截面图形的几何性质

例，求半圆截面的形心坐标，以及对形心轴 z_C 的惯性矩 I_{zc}。

1, 求形心坐标:

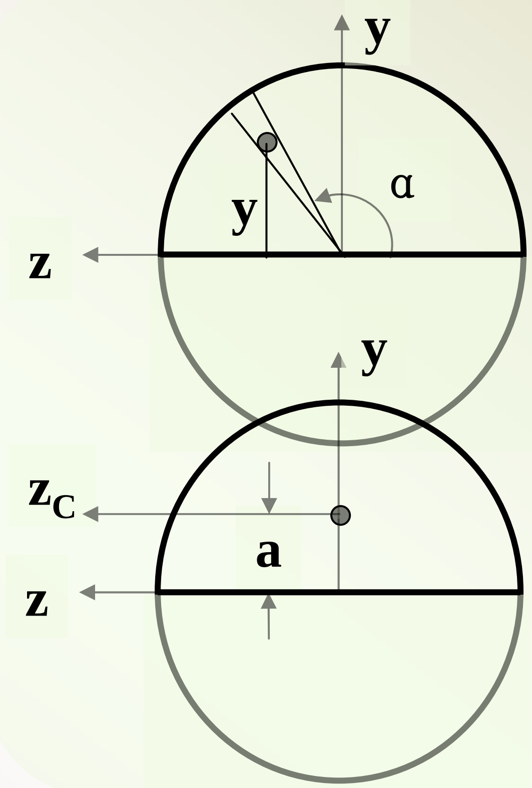
$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y dA$$

扇形微面积

$$dA = \frac{1}{2}R \cdot Rd\alpha = \frac{1}{2}R^2 d\alpha$$

扇形微面积的形心位于

$$y = \frac{2}{3}R\sin\alpha$$



附录B 截面图形的几何性质

所以 $$y_c=\frac{1}{A}\int_A ydA=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\frac{2}{3}R\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}R^2d\alpha=\frac{4R}{3\pi}$$

2，求I_z，因为半圆的惯性矩显然为整圆的惯性矩之半。

$$I_z=\frac{\pi D^4}{128}$$

3，求I_{zc}，因为 $I_z=I_{zc}+a^2A$

所以 $$I_{zc}=I_z-a^2A=\frac{\pi}{8}R^4-\frac{16R^2}{9\pi^2}\frac{\pi R^2}{2}=R^4(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi})$$

附录B 截面图形的几何性质

3，惯性矩的转轴公式，主惯性矩

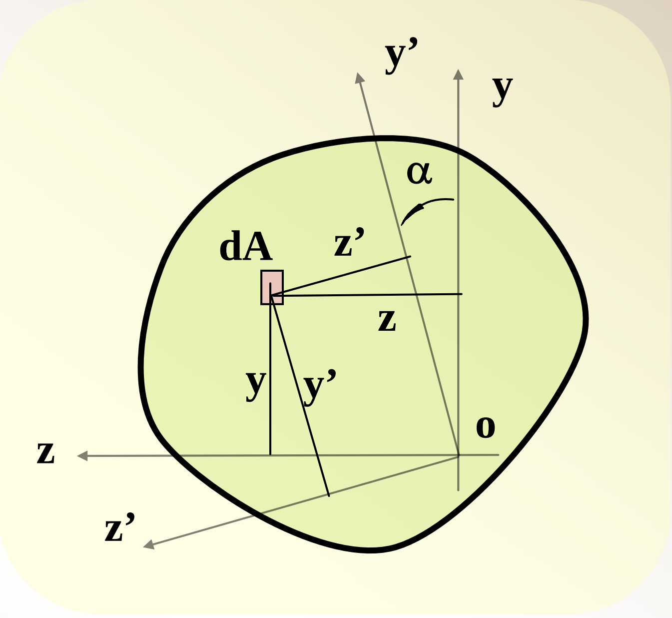
$$y' = y\cos\alpha + z\sin\alpha$$

$$z' = z\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$I_{y'} = \int_A z'^2 \mathrm{d}A = \int_A (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 \mathrm{d}A$$

$$= \cos^2\alpha \int_A z^2 \mathrm{d}A + \sin^2\alpha \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

$$- \sin 2\alpha \int_A yz\mathrm{d}A = \cos^2\alpha I_y + \sin^2\alpha I_z - \sin 2\alpha I_{yz}$$



附录B 截面图形的几何性质

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + (-I_{yz})\sin 2\alpha$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - (-I_{yz})\sin 2\alpha$$

$$(-I_{y'z'}) = -\frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + (-I_{yz})\cos 2\alpha$$

附录B 截面图形的几何性质

将I_y，I_z，$(-I_{yz})$与 σ_x，σ_y，τ_{xy} 或ε_x，ε_y，ε_{xy}一一对应，惯性矩（惯性积）具有与应力、应变相同的重要特征。

例如，惯性矩之和是个不变量，即$I_y+I_z=I_p$ 这个量在坐标变换时不变。在某一方位，I_y，I_z 达到最大和最小值，它们称为主惯性矩，此时的惯性积I_{yz}为零。这时的坐标轴称为主惯性轴。如果主惯性轴的原点通过形心，则称为形心主惯性轴。

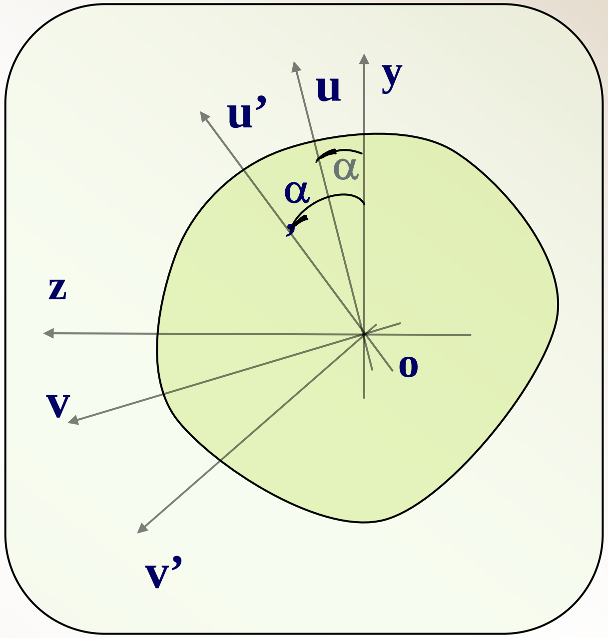
$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2(-I_{yz})}{I_y - I_z}$$

$$\left.\begin{matrix} I_{y0} \\ I_{z0} \end{matrix}\right\} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 \pm (-I_{yz})\sin 2\alpha_0$$

附录B 截面图形的几何性质

试证明截面图形对某点有一对以上不相重合的主惯性轴，则通过该点的所有的轴都是主惯性轴。

证明：如图所示，假设$y-z$ 为通过该图形o点的一对主惯性轴，$u-v$ 是通过o点的另一对主惯性轴，并且与y-z轴的夹角为α。



$$(-I_{uv}) = -\frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + (-I_{yz})\cos 2\alpha$$

因为I_{yz}=0, I_{uv}=0，所以 $I_y = I_z$。
于是，对于过o点的任一对轴u'–v'，根据上式可知$I_{u'v'}$= 0。所以也是主惯性轴。

附录B 截面图形的几何性质

推论:

1，当截面图形过某一点的一对主惯性轴上的惯性矩相等（$I_y = I_z$），那么过该点的任何一对轴都是主惯性轴。

2，任何具有三个或三个以上对称轴的图形，它所有的形心轴都是主惯性轴，而且惯性矩相等（两个对称轴的交点即形心）。例如正三角形，正方形，正多边形都是如此。如果只有两个对称轴，以上结论不一定成立，例如矩形截面。

附录B 截面图形的几何性质

试确定图示截面图形的形心主惯性轴的位置和形主惯性矩之值。图上的单位是cm。

解:

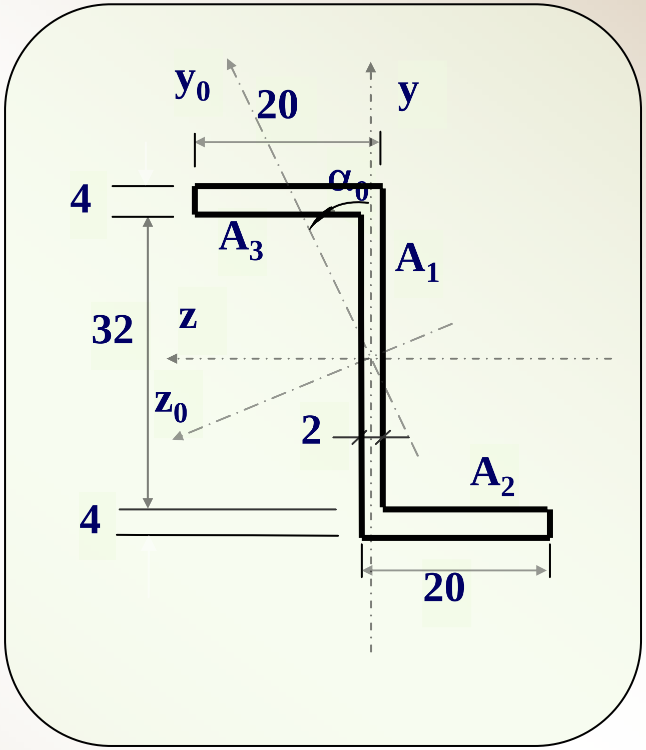
通过图形的形心建立y–z坐标系。将图形分成三块：A_1、A_2和A_3。第1块图形的面积为

$$A_1 = 2\times 32 = 64\text{cm}^2$$

对于y–z坐标的惯性矩和惯性积为

$$^1I_z = \frac{2\times 32^3}{12} = 5461.3\text{cm}^4$$

$$^1I_y = \frac{32\times 2^3}{12} = 21.3\text{cm}^4 \qquad ^1I_{yz} = 0$$



附录B 截面图形的几何性质

第2块面积

$$A_2 = 20 \times 4 = 80\text{cm}^2$$

对于y–z坐标的惯性矩和惯性积为

$${}^2I_z = \frac{20 \times 4^3}{12} + 18^2 \times 80 = 26026.7\text{cm}^4$$

$${}^2I_y = \frac{4 \times 20^3}{12} + 9^2 \times 80 = 9146.7\text{cm}^4$$

$${}^2I_{yz} = 0 + 9 \times 18 \times 80 = 12960\text{cm}^4$$

第3块面积的数据与第2块相同。

附录B 截面图形的几何性质

整个图形的惯性矩和惯性积为

$$I_z = {}^1I_z + 2\,{}^2I_z = 57515\text{cm}^4$$

$$I_y = {}^1I_y + 2\,{}^2I_y = 18315\text{cm}^4$$

$$I_{yz} = {}^1I_{yz} + 2\,{}^2I_{yz} = 25920\text{cm}^4$$

形心主轴的方位

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2\times 25920}{18315-57515} = 1.3224$$

$$2\alpha_0 = 52^o54' \qquad \alpha_0 = 26^o27'$$

形心主惯性矩的大小为

$$\left.\begin{matrix} I_{z0} \\ I_{y0} \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} I_{\max} \\ I_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}{}^2} = \left\{\begin{matrix} 70411\text{cm}^4 \\ 5419\text{cm}^4 \end{matrix}\right.$$

附录B 截面图形的几何性质