# 一、观测误差 (Observation  Error)

1、为什么要进行观测  必要观测、多余观测

2、  误差存在的现象

3、  误差产生的原因

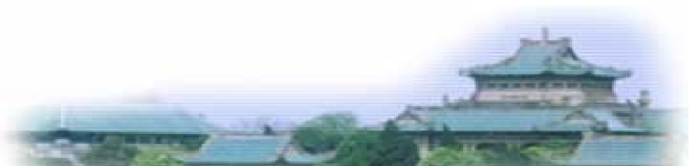
观测条件：观测仪器、观测者、外界条件

4、  误差的分类

粗差  **(gross error) ,** 系统误差**(systematic error)**

偶然误差**(random error、accident error)**

5、  误差的处理办法



二、测量平差的简史和发展

三、测量平差的两大任务及本课程的主要内容

# 第二章 误差分布与精度指标

## Error Distribution and Index of Precision

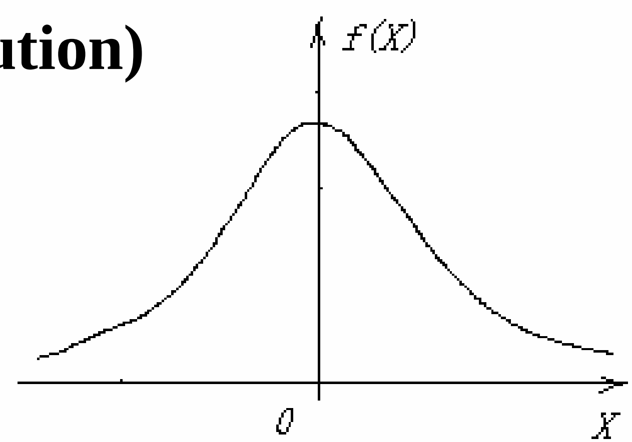
## 一、偶然误差的规律性

**1、随机变量（stochastic variable)**

**2、偶然误差的分布**

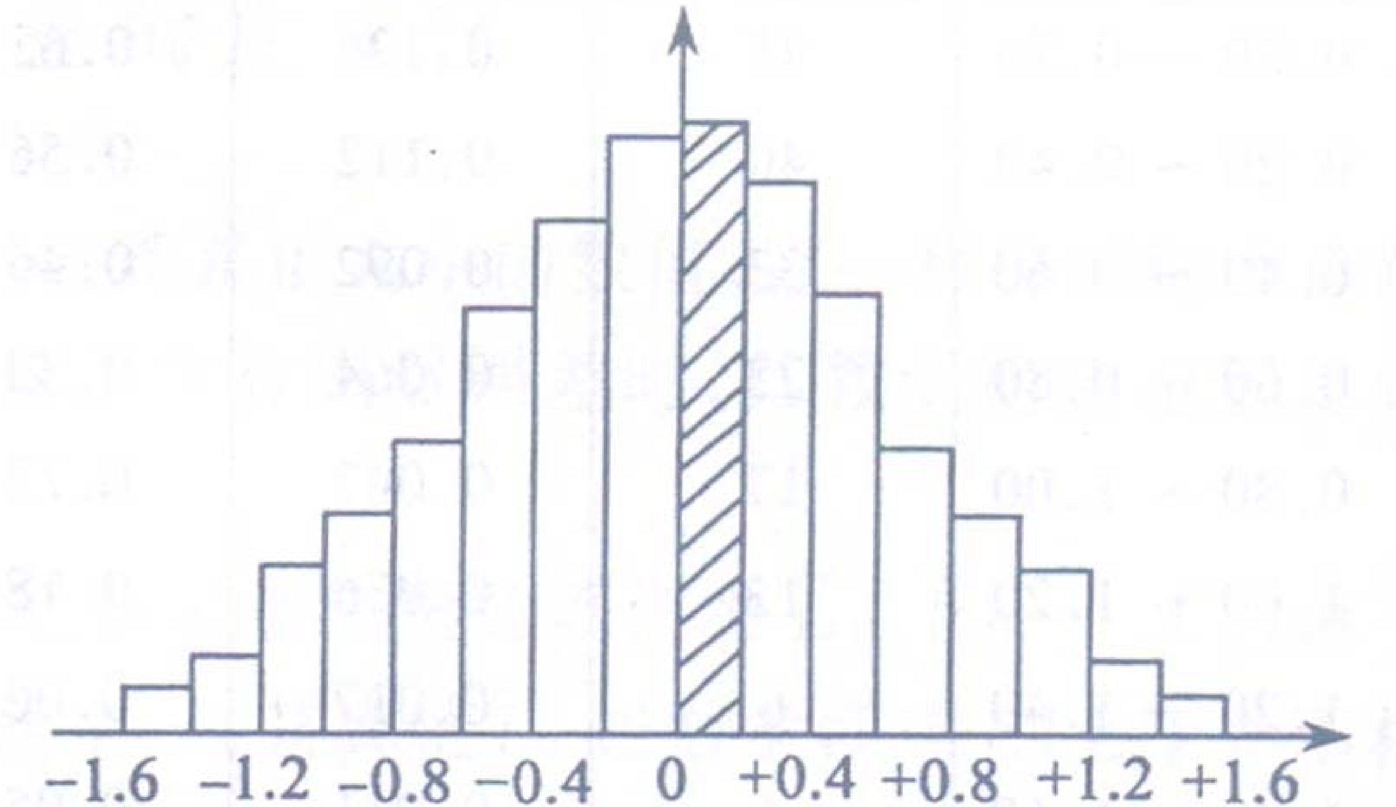
正态分布 **(normal distribution)**

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$




| 误差的区间 ″ | Δ为负值 | | | Δ为正值 | | | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 个数 $v_i$ | 频率 $v_i/n$ | $\frac{v_i/n}{d\Delta}$ | 个数 $v_i$ | 频率 $v_i/n$ | $\frac{v_i/n}{d\Delta}$ | |
| 0.00 ~ 0.20 | 45 | 0.126 | 0.630 | 46 | 0.128 | 0.640 | $d\Delta = 0.20''$；等于区间左端值的误差算入该区间内。 |
| 0.20 ~ 0.40 | 40 | 0.112 | 0.560 | 41 | 0.115 | 0.575 | |
| 0.40 ~ 0.60 | 33 | 0.092 | 0.460 | 33 | 0.092 | 0.460 | |
| 0.60 ~ 0.80 | 23 | 0.064 | 0.320 | 21 | 0.059 | 0.295 | |
| 0.80 ~ 1.00 | 17 | 0.047 | 0.235 | 16 | 0.045 | 0.225 | |
| 1.00 ~ 1.20 | 13 | 0.036 | 0.180 | 13 | 0.036 | 0.180 | |
| 1.20 ~ 1.40 | 6 | 0.017 | 0.085 | 5 | 0.014 | 0.070 | |
| 1.40 ~ 1.60 | 4 | 0.011 | 0.055 | 2 | 0.006 | 0.030 | |
| 1.60 以上 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\sum$ | 181 | 0.505 | | 177 | 0.495 | | |

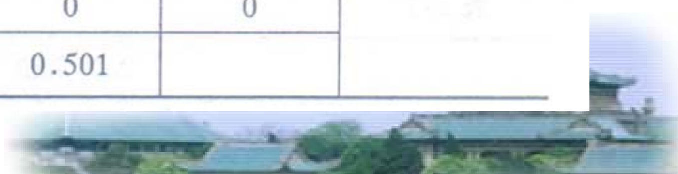



-1.6
-1.2
-0.8
-0.4
0
+0.4
+0.8
+1.2
+1.6

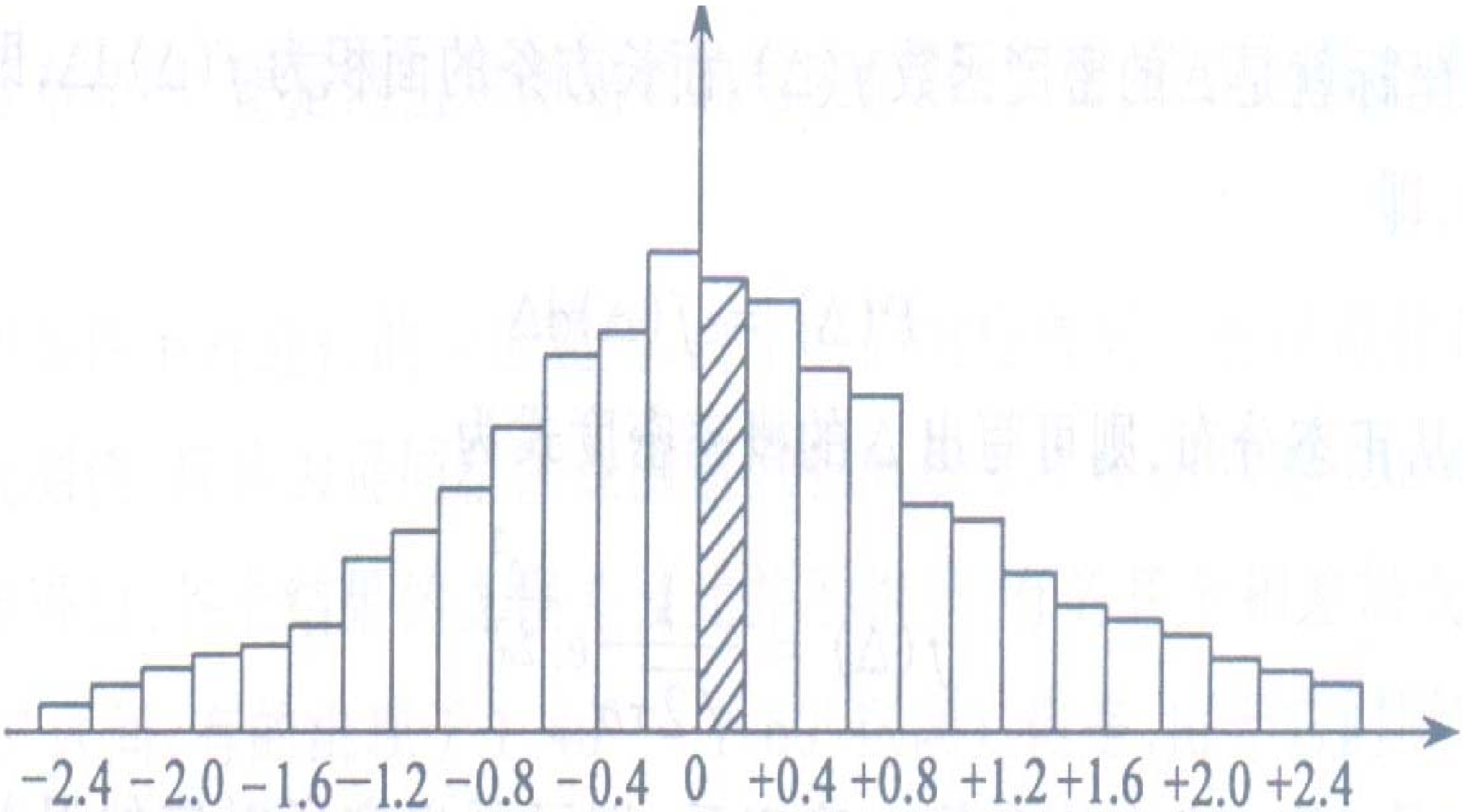
# 第二章　误差分布与精度指标

| 误差的区间 ″ | Δ为负值 | | | Δ为正值 | | | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 个数 $v_i$ | 频率 $v_i/n$ | $\frac{v_i/n}{d\Delta}$ | 个数 $v_i$ | 频率 $v_i/n$ | $\frac{v_i/n}{d\Delta}$ | |
| 0.00 ~ 0.20 | 40 | 0.095 | 0.475 | 37 | 0.088 | 0.440 | $d\Delta = 0.20''$；等于区间左端值的误差算入该区间内。 |
| 0.20 ~ 0.40 | 34 | 0.081 | 0.450 | 36 | 0.085 | 0.425 | |
| 0.40 ~ 0.60 | 31 | 0.074 | 0.370 | 29 | 0.069 | 0.345 | |
| 0.60 ~ 0.80 | 25 | 0.059 | 0.295 | 27 | 0.064 | 0.320 | |
| 0.80 ~ 1.00 | 20 | 0.048 | 0.240 | 18 | 0.043 | 0.215 | |
| 1.00 ~ 1.20 | 16 | 0.038 | 0.190 | 17 | 0.040 | 0.200 | |
| 1.20 ~ 1.40 | 14 | 0.033 | 0.165 | 13 | 0.031 | 0.155 | |
| 1.40 ~ 1.60 | 9 | 0.021 | 0.105 | 10 | 0.024 | 0.120 | |
| 1.60 ~ 1.80 | 7 | 0.017 | 0.085 | 8 | 0.019 | 0.095 | |
| 1.80 ~ 2.00 | 5 | 0.012 | 0.060 | 7 | 0.017 | 0.085 | |
| 2.00 ~ 2.20 | 6 | 0.014 | 0.070 | 4 | 0.009 | 0.045 | |
| 2.20 ~ 2.40 | 2 | 0.005 | 0.025 | 3 | 0.007 | 0.035 | |
| 2.40 ~ 2.60 | 1 | 0.002 | 0.010 | 2 | 0.005 | 0.025 | |
| 2.60 以上 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\sum$ | 210 | 0.499 | | 211 | 0.501 | | |





# 第二章　误差分布与精度指标



**3、偶然误差的统计特性**

由统计分析可以看出，偶然误差具有下列特性：

**1**、在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值有一定的限值，即超过一定限值的偶然误差出现的概率为零；

**2**、绝对值较小的偶然误差比绝对值较大的偶然误差出现的概率大；

**3**、绝对值相等的正负偶然误差出现的概率相同；

**4**、偶然误差的理论平均值为零



## 二、随机变量的数字特征

（1）反映随机变量集中位置的数字特征---数学期望

（2）反映随机变量偏离集中位置的离散程度----方差

（3）映两两随机变量x、y相关程度的数字特征---协方差

1、数学期望（**expected value)**　$E(x), \mu$

**(a)**　定义

（1）离散型：　$$E(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

连续型：　$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

**(b)**　运算规则

## 2、方差 (variance) $D(x), D_x, \sigma_x^2$

**(a)** 定义

$$D(x) = E\{[x - E(x)]^2\}$$

离散型：$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(x)]^2 p_i$$

连续型：$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - E(x)]^2 f(x)dx$$

**(b)** 运算规则

**3、协方差 (covariance)** $\sigma_{xy}$

**(a)** 定义

相关系数 **(correlation coefficient)** $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

## 三、衡量精度的指标

,

1、方差和中误差 **(variance and mean square error MSE)**

**2**、平均误差 **(average error)**

**3**、或然误差 **(probable error)**

**4**、极限误差 **(limit error)**

**5**、相对（中、真、极限）误差 **(relative error)**

# 四、随机向量的数字特征

1、随机向量

2、随机向量的数学期望

3、随机向量的方差-协方差阵

- 协方差阵的定义
- 协方差阵的特点

4、互协方差阵

- 协方差阵的定义
- 协方差阵的特点

**例1．在测站D上，观测了三个方向A、B、C，得10个测回的方向观测读数a、b、c，试估算各个方向观测值的方差、协方差、相关系数。**

$$\hat{a}=\frac{[a]}{10}=28^{o}47'31.3''$$

$$\hat{b}=\frac{[b]}{10}=47^{o}18'19.4''$$

$$\hat{c}=\frac{[c]}{10}=69^{o}50'32.8''$$

| | a | b | c | da | db | dc |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 28 47 29 | 47 18 19 | 69 50 34 | 2.3 | 0.4 | -1.2 |
| 2 | 34 | 20 | 35 | -2.7 | -0.6 | -2.2 |
| 3 | 28 | 18 | 33 | 3.3 | 1.4 | -0.2 |
| 4 | 33 | 17 | 35 | -1.7 | 2.4 | -2.2 |
| 5 | 35 | 24 | 31 | -3.7 | -4.6 | 1.8 |
| 6 | 35 | 18 | 30 | -3.7 | 1.4 | 2.8 |
| 7 | 31 | 16 | 29 | 0.3 | 3.4 | 3.8 |
| 8 | 29 | 25 | 32 | 2.3 | -5.6 | 0.8 |
| 9 | 27 | 19 | 32 | 4.3 | 0.4 | 0.8 |
| 10 | 32 | 18 | 37 | 0.7 | 1.4 | -4.2 |

$$da_i = \hat{a} - a_i, db_i = \hat{b} - b_i, dc_i = \hat{c} - c_i$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{[da^2]}{10-1} = \frac{78.1}{9} = 8.68(''^2) \qquad \hat{\sigma}_b^2 = \frac{[db^2]}{10-1} = \frac{76.4}{9} = 8.49(''^2)$$

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{[dc^2]}{10-1} = \frac{55.6}{9} = 6.18(''^2)$$

, ,

$$\sigma_a = 2.95'' \quad \sigma_b = 2.91'' \quad \sigma_c = 2.49''$$

$$\hat{\sigma}_{ab} = \frac{[dadb]}{9} = \frac{3.8}{9} = 0.42, \qquad \hat{\rho}_{ab} = \frac{\hat{\sigma}_{ab}}{\hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b} = 0.05$$

例1：求随机变量 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 的期望和方差。

例2：对正态分布密度函数

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\Delta-\mu)^2\right),\ -\infty<\Delta<+\infty$$

求随机变量 $\Delta$ 的数学期望和方差。

# 五、精度　准确度　精确度

观测值的质量取决于观测误差（偶然误差、系统误差、粗差）的大小。

## 1、精度：(precision)

描述偶然误差，可从分布曲线的陡峭程度看出精度的高低。

## 2、准确度：(accuracy)

描述系统误差和粗差，可用观测值的真值与观测值的数学期望之差来描述，即：

$$\varepsilon = \tilde{L} - E(L)$$

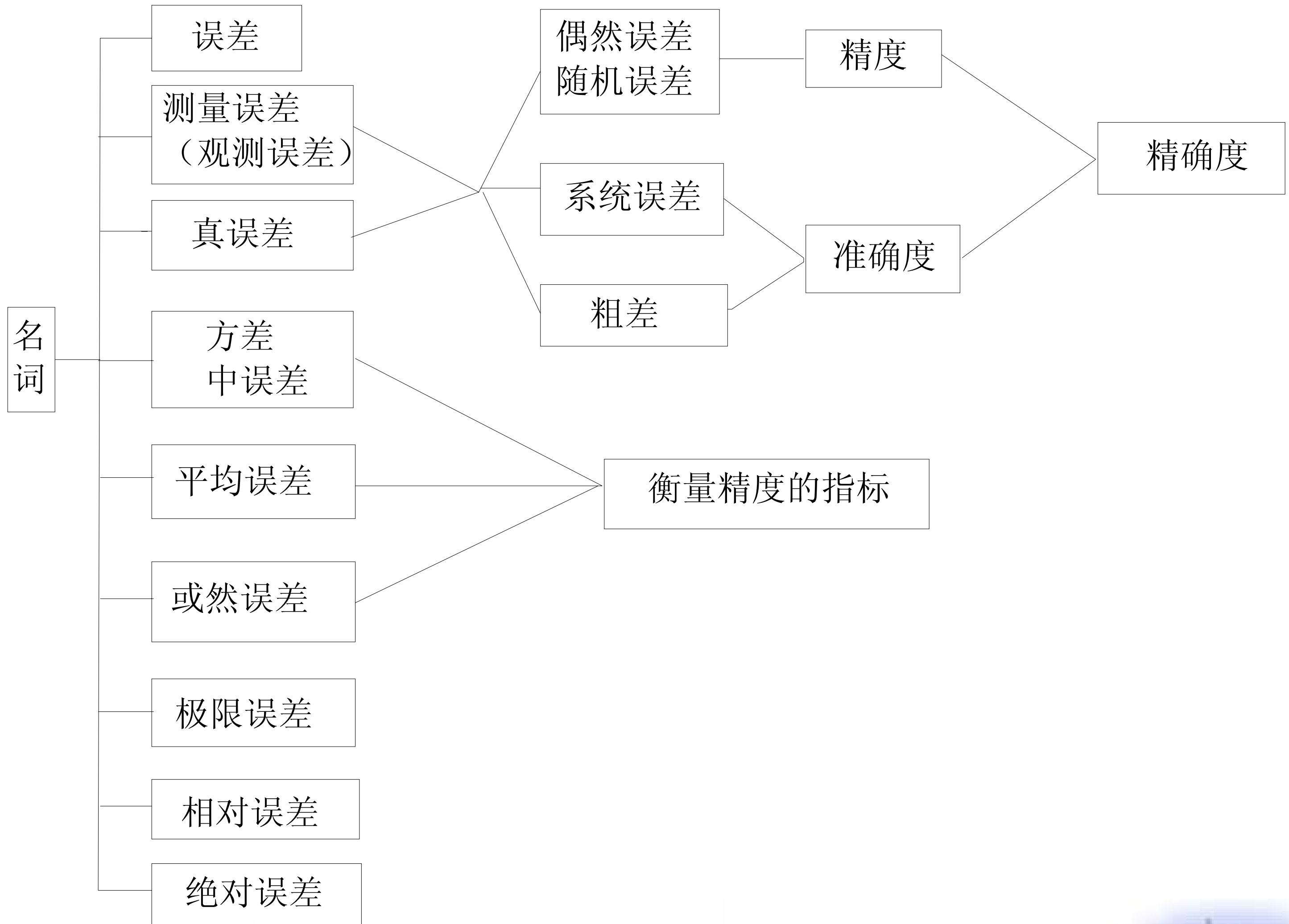
## 3、精确度：

描述偶然误差、系统误差和粗差的集成，精确度可用观测值的均方误差来描述，即：

$$MSE(L) = E(L-\tilde{L})^2 = \sigma_L^2 + (E(L)-\tilde{L})^2$$

当 $E(L)=\tilde{L}$ ，即观测值中不存在系统误差和粗差时，亦即观测值中只存在偶然误差时，均方误差就等于方差，此时精确度就是精度。

# 七、小结


名词
误差
测量误差（观测误差）
真误差
方差
中误差
平均误差
或然误差
极限误差
相对误差
绝对误差
偶然误差
随机误差
系统误差
粗差
精度
准确度
精确度
衡量精度的指标

# 几个概念

1、直接观测量(**direct observation)**

2、非直接观测量---观测值的函数

　　水准测量　　导线测量　　三角形内角平差值

3、独立观测值( **independent observation**

4、非独立观测值----相关观测值(**correlation observation)**

　　独立观测值各个函数之间不一定独立

5、误差转播律

6、协方差转播律

# 一、观测值线性函数的方差

设观测向量L及其期望和方差为：

$$L_1 \ \dots \ L_n \qquad E(L_1)\dots E(L_n)$$

$$D_L = E\{[L-E(L)][L-E(L)]^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{i,n} \\ \dots & & \\ \sigma_{n,1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

# Chapter 3. spread of covariance

函数： $x = KL + K^0$

函数的期望： $E(x) = KE(L) + K^0$

函数的方差： $D(x) = E\{[x - E(x)][x - E(x)]^T\} = KD_L K^T$

例：已知 $L_1 \ldots L_3$ $\underset{3,3}{D_L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}$

求函数 $x = 2L_1 - L_2 + 5$ 的方差。

## 二、多个观测值线性函数的方差-协方差阵

若观测向量的多个线性函数为

$$Z_1 = k_{11}X_1 + k_{12}X_2 + \cdots\cdots + k_{1n}X_n + k_{10}$$

$$Z_2 = k_{21}X_1 + k_{22}X_2 + \cdots\cdots + k_{2n}X_n + k_{20}$$

$$\cdots \ \cdots\cdots \ \cdots \ \cdots$$

$$Z_t = k_{t1}X_1 + k_{t2}X_2 + \cdots\cdots + k_{tn}X_n + k_{t0}$$

令

$$\underset{t\times 1}{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \end{pmatrix}, \quad \underset{t\times n}{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{tn} \end{pmatrix}, \quad \underset{t\times 1}{K_0} = \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ \vdots \\ k_{t0} \end{pmatrix}$$

于是，观测向量的多个线性函数可写为 $Z = KX + K_0$

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^T$$

若还有观测向量的另外**r**个线性函数

$$Y_1 = f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \cdots\cdots + f_{1n}X_n + f_{10}$$

$$Y_2 = f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \cdots\cdots + f_{2n}X_n + f_{20}$$

$$\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$Y_r = f_{r1}X_1 + f_{r2}X_2 + \cdots\cdots + f_{rn}X_n + f_{r0}$$

其矩阵形式为：

$$Y = FX + F_0$$

则有：

$$\underset{r\times r}{D_{YY}} = FD_{XX}F^{T} = D_{YY}^{T}$$

## 三、两个函数的互协方差阵

$$\underset{r\times t}{D_{YZ}} = E[(Y - E(Y))(Z - E(Z))^{T}]$$

$$= E[(FX + F_0 - FE(X) - F_0)(KX + k_0 - KE(X) - k_0)^{T}]$$

$$= FE[(X - E(X))(X - E(EX))^{T}]K^{T}$$

$$= FD_{XX}K^{T}$$

# 四、非线性函数的情况

例：

设有观测向量L，已知其协方差阵为 $\underset{3,3}{D}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，

求下列函数的协方差。

$$F_1=L_1+2L_2-3L_3$$

$$F_2=L_1+3L_3$$

## 五、多个观测向量非线性函数的方差—协方差矩阵

设观测向量的$t$个非线性函数为：

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= f_1(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \\
Z_2 &= f_2(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots \\
Z_t &= f_t(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)
\end{aligned}
$$

对上式求全微分，得

对上式求全微分，得

$$dZ_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}\right)dX_n$$

$$dZ_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_n}\right)dX_n$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$dZ_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_n}\right)dX_n$$

令

$$dZ=\begin{pmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ \vdots \\ dZ_t \end{pmatrix},\ dX=\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial X_1} & \frac{\partial f_t}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

则　　$dZ=kdX$

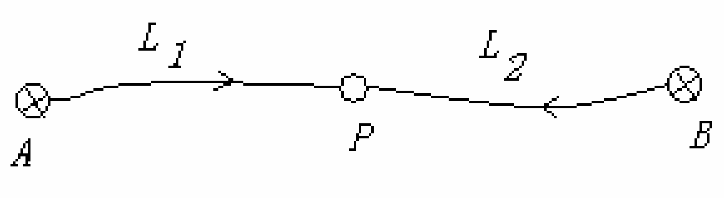
由误差传播定律得：

$$D_{ZZ}=KD_{XX}K^T$$

# 六、协方差传播律的应用

## 1、水准测量的精度

例1：在单一水准路线AB上，为求待定点 P的高程，观测了高差 $L_1$及 $L_2$，其相应的路线长度 $S_1 = 4km, S_2 = 2km$ 已知每公里观测高差中误差为 $\sigma_{km} = 1cm$，求高差平差值的协方差阵。



**2、距离丈量的精度**

**3、同精度独立观测值算术平均值的精度**

例2：已知距离AB=100m，丈量4次平均值的中误差为2cm，若以同样精度丈量距离CD=900m，求

(1) 丈量CD1次的精度

(2) 如丈量CD16次，则求丈量AB4次和CD16次的相对中误差

## 七、应用协方差传播律时应注意的问题

（1）根据测量实际，正确地列出函数式；

（2）全微分所列函数式，并用观测值计算　偏导数值；

（3）计算时注意各项的单位要统一；

（4）将微分关系写成矩阵形式；

（5）直接应用协方差传播律，得出所求问题的方差-协方差矩阵。

# 八、权及定权的常用方法

## ➢权的概念

一定的观测条件对应着一定的误差分布，而一定的误差分布就对应着一个确定的方差，方差是表征精度的一个绝对的数字指标，为了比较各观测值之间的精度，除了可以应用方差之外，还可以通过方差之间的比例关系来衡量观测值之间的精度的高低，这种表示各观测值方差之间的比例关系的数字特征称为权，所以权是表征精度的相对的数字指标。

## ➢权的概念

权是权衡轻重的意思，其应用比较广泛，应用到测量上可作为衡量精度的标准。如有一组观测值时等精度的，那么，在平差时，应该将它们同等对待，因此说这组观测值是等权的，而对于一组不等精度的观测值，在平差时，就不能等同处理，容易理解，精度高的观测值在平差结果中应占较大的比重，或者说，应占较大的权，所以平差时，对于一组不等精度的观测值应给予不同的权。



## 1、权的定义

权的意义，不在于其数值的大小，重要的是它们之间的比例关系。

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

例1：量AB间距离，得两组观测值 $L_1$、 $L_2$ 已知它们的中误差 $\sigma_1 = 3mm$ ， $\sigma_2 = 2mm$ ，求L的权。

例2：测D点高程，有观测值 $h_1$、$h_2$ 、$h_3$ ，

已知 $\sigma_1 = 3mm$ ，$\sigma_2 = 4mm$ ，$\sigma_3 = 5mm$

求各观测值的权。

由此看出，随着选定的 $\sigma_0$ 不同，$P$ 的绝对值也不同，但他们之间的比例关系不变，所以权的数值不是绝对的，只有相对的意义，也就是说，我们不在乎权本身数值的大小，而在乎且定它们之间的比例关系。

## 2、单位权中误差

## 3、测量中常用的方法

（1）水准测量的权

（2）同精度观测值的算术平均值的权

（3）距离丈量的权

（4）三角高程测量的权

## 2、单位权中误差

## 3、测量中常用的方法

（1）水准测量的权

（2）同精度观测值的算术平均值的权

（3）距离丈量的权

（4）三角高程测量的权

# 九、协因数和协因数传播律

**1**、协因素

**2**、协因素 阵

**3**、协因数阵的特点

**4**、互协因数阵

**5**、权阵



协因数与权互为倒数，协因数阵与权阵互为逆矩阵，协因数对角线上的元素为各变量的权倒数，是否可由此说权阵对角线上的元素即为观测向量的权？

当观测值互不相关时，权阵为对角阵，主对角线上的元素为观测值的权。

$$L=[L_1 \ldots\ldots L_n]^T$$

$$Q_{LL}=\frac{1}{\sigma_0^2}D_L=\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{L_1}^2}{\sigma_0^2} & \ldots\ldots & 0 \\ \cdots & \ldots\ldots & \cdots \\ 0 & \ldots\ldots & \frac{\sigma_{L_r}^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & \\ & & \\ & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & Q_{nn_r} \end{bmatrix}$$

当观测值相关时，协因数阵主对角线上的元素仍为观测值的权倒数。而权阵主对角线上的元素不是观测值的权。

例1：已知L的协因数阵为 $Q=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，求L的权阵。

。

例2：设有观测值$L_1$的权$P_1=2$，方差=4；又知$L_2$的方差=1，求$P_2$、$Q_{11}, Q_{22}$。

6、协因数传播律

（1）、线性函数

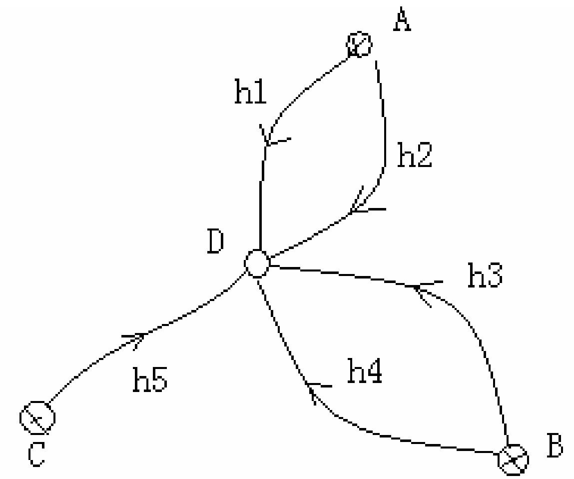
（2）、非线性函数

（3）、权倒数传播律

例1：求算术平均值的权.

例2：求加权平均值的权.

**例3.** A、B、C为已知水准点P1=P2=P5=2,P2=P4=5,
单位权中误差=2mm,




求(1)D点高程最或是值的中误差;
(2)CD高差的最或是值中误差。

**例4:** 在三角高程测量中 $h = stg\alpha + \imath - v$

$s, \alpha$ 为观测值, 权逆阵为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{p_s} & \\ & \frac{1}{p_\alpha} \end{bmatrix}$

求三角点间观测高差的权。

例5：已知观测向量$X_1$和$X_2$的协因数阵，设有函数

$Y=FX_1$、$Z=KX_2$

求Y对于Z的互协因数。

例6：已知丈量AB=100米长的距离一次，其权为1.5。

问（1）丈量CD=300米长的距离一次的权；

（2）300米距离需丈量几次，其平均值的权等于4。

# 十、由真误差计算中误差及其实际应用

1、用不同精度的真误差计算单位权方差

2、由真误差估求方差的实际应用

（1）由三角形闭合差求测角中误差

（2）由双观测值之差求中误差

例：设分5段测定两水准电间的高差，每段各测两次，

| 段号 | 高差 $L'$ | 高差 $L''$ | $d'(mm)$ | $S(km)$ | $pdd=\frac{dd}{S}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.248 | 3.240 | 8 | 4.0 | 16.0 |
| 2 | 0.348 | 0.356 | -8 | 3.2 | 20.0 |
| 3 | 1.444 | 1.437 | 7 | 2.0 | 24.5 |
| 4 | -3.360 | -3.352 | -8 | 2.6 | 24.6 |
| 5 | -3.699 | -3.704 | 5 | 3.4 | 7.4 |

求（1）每公里观测高差中误差
（2）第二段观测高差中误差
（3）第二段高差平均值的中误差
（4）全长一次（往或返）观测高差中误差及全长高差平均值的中误差。

# 十一、系统误差和偶然误差的联合影响