



CSTAM 2012-B03-0031

**高速气流中液滴表面 Kelvin-Helmholtz 不
稳定性的计算流体力学研究**

邓小龙

北京计算科学研究中心

第七届全国流体力学学术会议

2012 年 11 月 12—14 日 广西·桂林

高速气流中液滴表面 Kelvin-Helmholtz 不稳定性的计算流体力学研究

邓小龙*

* (北京计算科学研究中心, 北京海淀区 100084)

摘要 Kelvin-Helmholtz 不稳定性是液滴变形和破碎的重要机制。本文采用基于 Cut Cell 方法和 Level Set 函数的满足守恒率和相容性的尖锐界面可压缩多相流计算流体力学方法模拟研究液滴在高速气流中表面的不稳定性问题。在贴体结构化网格的帮助下, 我们比较好的解析出液滴附近气体的边界层。模拟结果和实验结果符合的很好。在计算流体力学模拟的帮助下, 我们研究液滴和气体界面附近的空气动力学现象, 以及液滴界面的运动机制, 加深对 Kelvin-Helmholtz 不稳定性主导的液滴破碎机制的理解。

关键词 计算流体力学, 可压缩流, 多相流, Kelvin-Helmholtz 不稳定性

引言

Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz, Richtmyer-Meshkov[1]等不稳定性现象广泛存在于自然界中。从科学上超新星 1987A 的辐射的解释, 到工程中惯性局限融合的实现, 都有赖于对不稳定性问题的研究和理解。本文研究的高速气流中液滴的变形和破碎过程, 则是由 Rayleigh-Taylor 不稳定性 和 Kelvin-Helmholtz 不稳定性竞争主导的。在不同的参数条件下, 惯性力、粘滞力和表面张力相互竞争, 以致液滴表现出不同的行为方式 [2][3]。

在计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 的发展过程中, 对多相流的数值计算方法的研究由来已久, 现在已是热门研究方向之一, 应用于多个学科。其中大致可以分为有清晰界面的和混合的两种基本情况。对有清晰界面的多相流来说, 以 VOF (Volume of Fluids), Phase-Field, 和 Level-Set 为代表的扩散界面方法 (Diffuse Interface Method, DIM), 实现较为容易, 计算速度快, 方便处理分离、融合等问题, 从而得到了人们的喜爱, 发展相对成熟, 应用较为广阔。尤其是 VOF 方法, 已经成为多个商业 CFD 软件中的标准方法。但是这类方法在界面附近的精

度不高, 不容易很好的处理表面张力等界面上的力的问题, 在极端条件以及自由界面不稳定性问题的处理上难以获得高精度的结果。相对而言, 以 Glimm 等人创立的 Front-Tracking[4][5][6] 为代表的尖锐界面方法 (Sharp Interface Method, SIM), 实现比较困难, 几何比较复杂, 以此换来的是界面的清晰表达。Nourgaliev 等人用 Cut Cell 方法配合 Level Set 方法, 实现了不可压缩流的另一种 SIM 方法 [7], 但是他的做法丧失了界面附近的守恒率, 效率很低, 也不能处理高速可压的问题。总的来说, 以自由表面不稳定性问题来说, 当我们碰到的问题条件越来越高的时候, 既有的方法大都有这样那样的问题。模拟得好的问题一般密度比较低, 表面张力、粘滞力等比较弱, 几何条件比较简单。

近年来, 在美国加州大学圣芭芭拉分校 (University of California, Santa Barbara) 的危机研究和安全中心 (Center for Risk Studies and Safety, CRSS), 研究人员对高速气流中液滴的变形和破碎问题这样一个牵扯到自由表面不稳定性的实际问题从实验和计算两个方面进行了深入研究。作为其中曾经的一员, 作者和同事一起, 发展了一套基于 Cut Cell 方法和 Level Set 方法的尖锐界面方法 MuSiC (Multi-scale Simulation

1) 基金资助项目:无

2) Email: xiaolong.deng@csrc.ac.cn

Code) -CCASSIM (Consistent, Conservative, All-Speed, Sharp-Interface Method), 实现了对这类问题的高精度的计算流体力学模拟。计算结果和实验符合的较好, 能够帮助我们更深入的研究其中的物理机制。

1 基本方程

MuSiC-CCASSIM 采用有限体积法, 因而取 Navier-Stokes 方程的积分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \oint_S \mathbf{F} dS = 0 \quad (1)$$

其中 \mathbf{W} 是守恒变量, \mathbf{F} 是流量:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho(U - U_b) \\ \rho \mathbf{v}(U - U_b) + p \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho E(U - U_b) + (p \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

这里 ρ 是密度, \mathbf{v} 是速度矢量, E 是能量, p 是压力, \mathbf{n} 是界面上向外的单位矢量, 下标 b 代表界面上的量, $U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, $U_b = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}$. $\boldsymbol{\tau}$ 是粘滞张量:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}.$$

\mathbf{q} 是传热:

$$\mathbf{q} = k \nabla T$$

μ 和 k 分别是粘滞系数和传热系数。

考虑界面上的阶越条件, 在界面上, 垂直方向两侧力平衡, 切向两侧力相等, 两侧传热相等, 速度一致, 温度一致, 界面两侧物质的材料属性则由实际问题给定:

$$\begin{aligned} JC1: & [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} - p] + \sigma \kappa = 0 \\ JC2: & [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{s}] = 0 \\ JC3: & [k(\mathbf{n} \cdot \nabla T)] = 0 \\ JC4: & [\mathbf{v}] = 0 \\ JC5: & [T] = 0 \\ JC6: & [\rho] = \text{given} \\ JC7: & [\mu] = \text{given} \\ JC8: & [k] = \text{given} \end{aligned} \quad (2)$$

这里 σ 是表面张力系数, κ 是曲率, \mathbf{s} 是切向单位矢量。

当前, 大部分的自由界面多相流计算方法不能完全满足上述全部阶越条件, 甚至很多方

法不能保证守恒率。通过一系列的处理, MuSiC-CCASSIM 能够在保证守恒率的基础上, 完全满足上述条件。

2 计算方法

MuSiC-CCASSIM 采用 Level Set 函数描述界面并用切割网格 (Cut Cell) 方法在背景网格上实际切割出界面。采用这种方式, 该方法完成了尖锐界面的数值实现, 并通过一系列处理, 严格的保证守恒率, 保证相容性, 满足界面上的各个阶越条件的要求。

这套方法同时包含有结构化网格, 非结构化网格和切割网格三种方法。在大流场的背景网格, 我们采用结构化网格, 并实现了自适应网格 (Adaptive Mesh Refinement, AMR) 方法, 针对激波、界面、漩涡等需要加密的地方进行动态加密。在此基础上, 在最细的一层结构化网格上对 Level Set 函数值为 0 所描述的界面进行切割, 实现切割网格方法。在切割网格附近, 以非结构化网格方法实现到结构化网格的过渡。因为实际切割出了网格界面, 我们能够对阶越条件进行精确处理。

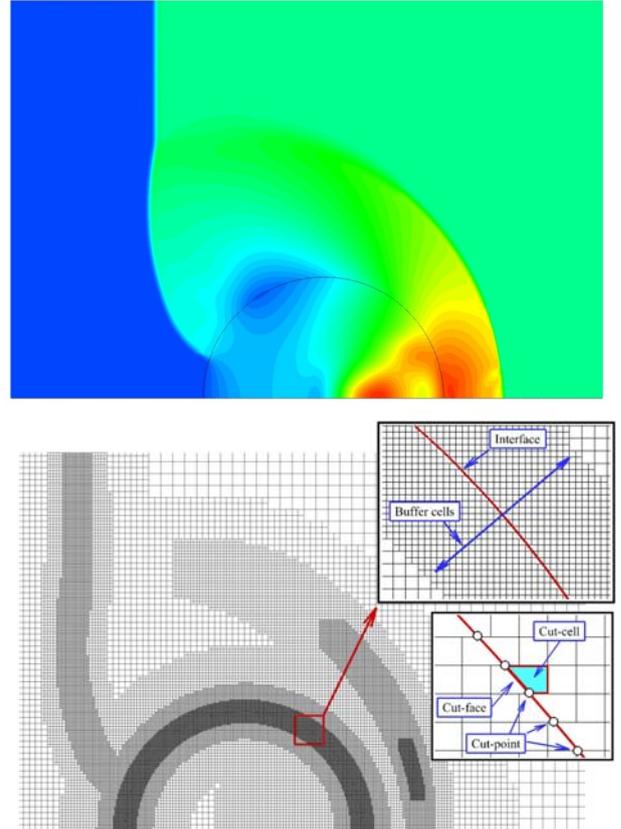


图 1 MuSiC-CCASSIM 的 AMR 和 Cut Cell 示例

图 1 显示了一个 MuSiC-CCASSIM 处理的 AMR 的例子。该例子中，压力梯度和界面附近（Level Set 函数的绝对值小于一个给定值）作为 AMR 的启动条件打开。我们看到激波附近和界面附近的格点都得到了加密。激波扫过之后的区域，随着压力梯度的降低，加密过的格点又得到了释放。

一般的切割网格方法采用直线段来描述两个切割点之间的连线。对于我们要研究的问题，由于液体的可压缩性比较差，很小的体积误差就会造成很大的压力变化，因此，MuSiC-CCASSIM 在切割网格上采用弯曲格线代替传统的直线进行处理，在几何计算上提高了精度。

图 2 显示了 MuSiC-CCASSIM 的弯曲切割网格线的处理方法，以及对直线网格和曲线网格进行的圆柱和球的体积计算精度分析。这里可以看出，在取直线方法时，误差是二阶精度；在取曲线方法时，误差提高到三阶精度。

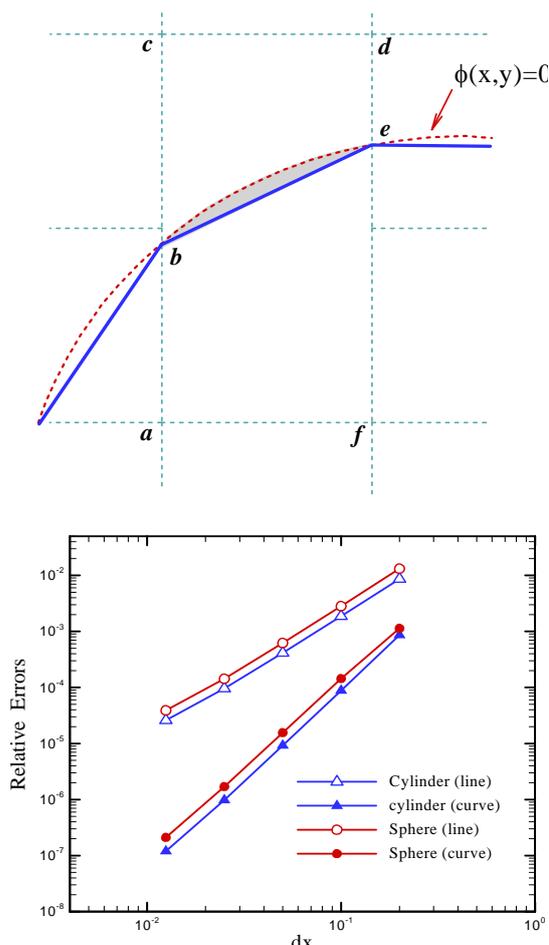


图 2 弯曲网格线示例（上）和在圆柱与球上做的体积计算精度分析（下）

作为一般介绍，MuSiC-CCASSIM 采用 MUSCL 格式，三阶迎风插值。在规则网格面上，采用 AUSM⁺-up 方法 [8] 来计算非粘性的流的部分；在切割网格面上，采用精确尼曼解来计算界面移动速度和非粘性流。通过在界面上保持二阶格式的耦合，同时维持守恒率，我们很好的保持了相容性（Consistency）。

时间格式上，我们采用四阶 Runge-Kutta 方法，保证了时间上的精度。

在之前的 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的研究中，由于气流速度相对比较小，界面附近气流的边界层比较厚，在单位液滴直径 800 点的格点密度下，我们得到了比较好的结果。但是对于这里研究的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题，由于气流速度比较快，边界层比较薄，单位液滴直径 800 点已经不能满足要求，单机的计算机内存和计算速度已不易支持更高网格密度的计算。在这种情况下，我们发展了一套薄层模型，通过在自由界面附近做一个结构化的贴体网格（见图 3），以此得到更准确的边界层，将其计算出的剪切力反馈给切割网格，很好的解决了这个问题。

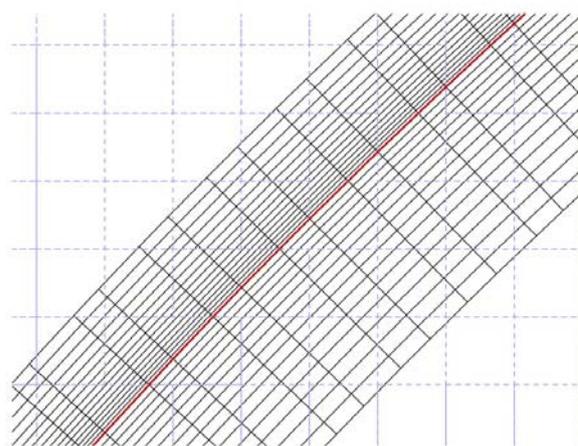


图 3 自由界面（红线）附近的结构化贴体网格示例

3 Kelvin-Helmholtz 不稳定性模拟测试

我们采用类似于 Nourgaliev 2007 中所用的 Poiseuille Flow [7]，用我们的方法实际进行了计算流体力学模拟。通过测试没有表面张力 (S=0) 和有表面张力 (S=1) 两种情况，得到了和 Chandrasekhar 的解析解 [1] 相符合的结果，从而验证了我们方法的正确性和准确

性。其中，AROS 是在 CRSS 开发的用于计算 Chandrasekhar 书中 Kelvin-Helmholtz 不稳定性的线性部分增长的程序。

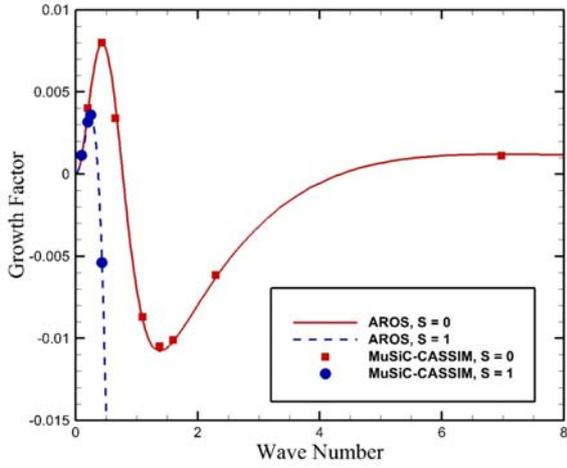


图 4 Poiseuille Flow 中无表面张力 ($S=0$) 和有表面张力 ($S=1$) 的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性线性增长部分的理论 (线) 和模拟计算 (点) 结果比较

4 实际在液滴问题上的一个算例

下面是一个实际的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性主导的例子。该例子将一个直径为 1.92 毫米的甘油滴置于激波管中，用一个激波 (对应的激波后空气速度为 Mach 数 1.26) 打过去。该问题中 Weber 数为 54000，Ohnesorge 数为 1.9。该实验是在 CRSS 完成，所得图像随时间的变化见图 5。

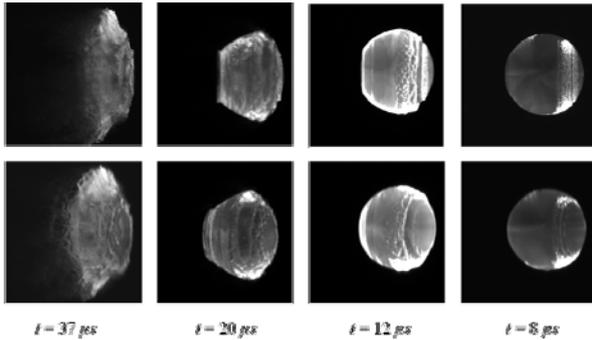


图 5 一个甘油液滴破碎实验结果，气流 Mach 1.26，液滴直径 1.92 mm， $We=54000$ ， $Oh=1.9$ 。时间从右向左为 8 us，12 us，20 us 和 37 us。上面一排是正侧面图，下面一排是侧 20 度图。

图 6 是通过一系列实验得出的一个液滴破碎机制在 Weber 数和 Ohnesorge 数图谱中的分布。液滴在高速气流中的破碎机制主要是由 Rayleigh-Taylor 不稳定性主导。在蓝线下方，Weber

数较低，表面张力相对较大，液滴不破碎。在蓝线到红线之间，表面张力已不足以维持液滴的稳定，而切向的剪切力还不足以主导过程，液滴破碎由 Rayleigh-Taylor 不稳定性主导。在红线上方，剪切力足够大，Kelvin-Helmholtz 不稳定性成为主导机制。这个图和相关的讨论可以在文献[2]和文献[3]中找到。本文中模拟的算例所处位置即为红五角星所在位置。

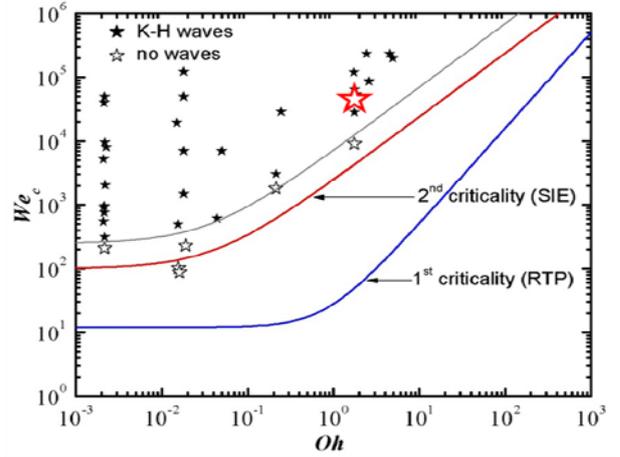


图 6 Rayleigh-Taylor 不稳定性主导的穿透 (RTP) 和 Kelvin-Helmholtz 不稳定性主导的破碎 (SIE) 在 We - Oh 图谱中的分布，以及本算例对应的参数在图谱中的位置

我们用 MuSiC-CCASSIM 进行轴对称模拟，用了七层 AMR，最密一层网格密度为单位直径 800 个格点，初始给定的扰动为：

$$r = r_0 + \varepsilon \times \sin(\theta) \times \sum_i \sin(\omega_i \theta), \quad (3)$$

$$\varepsilon = 5 \times 10^{-5}.$$

这里， r 为半径， θ 为角度， ω_i 为 2 到 211 的一系列质数。长度单位已经被归一化为液滴直径为 1，所以 $r_0 = 0.5$ 。

在该例子中，我们试图抓住液滴表面的变形和波纹。图 7 所示即为 12 us 时实验结果和模拟结果的对比。可以看出，模拟结果和实验结果符合的较好。这给我们分析提供了方便。这里液滴正面 (右) 前部是光滑的，这是由于气流在这里被阻挡，速度较低，不足以对液滴造成波纹。随后，随着气流围绕液滴流动，速度越来越大，对液滴表面的剪切力也增大，造成一系列的小波纹。在小波纹之后，出现一个大的凹入。对照模拟结果，我们可以看出，这

里对应的是马赫数为 1 的区域附近，即是气流从亚音速向超音速转变的区域。在这样的区域，由于空气的高可压缩性，在亚音速区域压力对波有增强作用[10]。在这个大的凹入之后到液滴顶部，气流仍旧维持高速，在液滴上产生一系列的波纹。再往后，气流出现分离，速度降低，液滴表面出现一段的光滑区。在液滴背面（左），由于漩涡很强，产生一个激波，将液滴尾部推进去。在尾部的凹入和侧上的光滑区之间，由于若干个漩涡的卷起，产生了几条波纹。

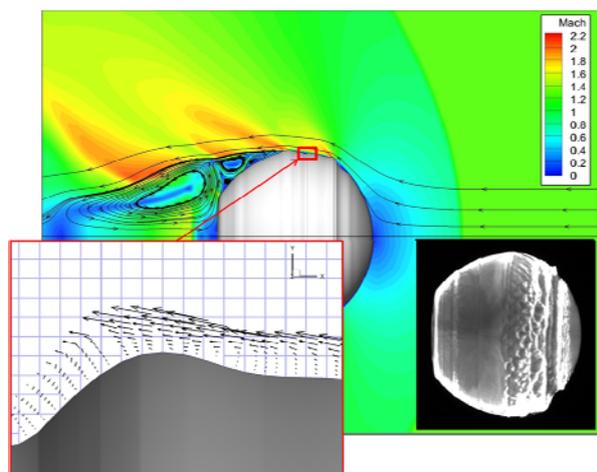


图 7 甘油液滴变形的计算流体力学模拟在 12us 时刻的结果的 Mach 图。这一时刻实验结果（右下角）也显示出来作为对照。在前上部的一个波附近的边界层的气流速度场（左下角）也被显示出来。参数同图 5

由于气流速度比较高，边界层厚度比较薄，单位直径八百个点不足以解析边界层。因此，薄层模型在这里得到了应用，薄层中最细的格点是外部格点的 0.05 倍，即相当于单位液滴直径上有 16000 个格点的密度。从图 7 中左下角的图可以看出，薄层网格大大提高了边界层的解析，从而节省了背景网格，提高了计算速度。

5 讨论

我们用发展出的一套基于切割网格和 Level Set 函数的可压缩多相流计算流体力学方法 MuSiC-CCASSIM，模拟了 Poiseuille Flow 的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题作为测试，更进一步模拟了一个实际的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性主导的液滴变形的过程。模拟结果和理论与实验结果符合的比较好。

经过从单位直径 200 点，400 点直到 800 点的逐步加密网格，我们得到了很好的收敛性。800 点网格配合薄层模型的模拟给出的结果能够抓住基本的轴对称的波。实验中，在前半部的液滴表面，可以看到很多的非轴对称的波，在现有的轴对称框架下无法模拟，因此我们将来需要发展三维的方法。

另外，虽然通过引入薄层模型，我们能够抓住基本的边界层的情况，得到比较准确的剪切力，但是这种做法毕竟是一种权益之计，最好还是能够不需要薄层模型这样的辅助工具，直接在一个背景流场里面全部解出。而这需要更密许多倍的格点，是当前的单机无法承受的。因此我们需要发展并程序，以进一步提高计算精度和能够计算的问题的尺度和复杂度。同时需要研究高精度的计算方法，尤其是在曲率很大的界面位置附近。然后用该方法研究更多的具体问题下的不稳定性。

实验中观测到，随着各种参数的变化，Kelvin-Helmholtz 不稳定性主导的液滴破碎还有多种形式，有许多不同的现象[3]，还需要在进一步完善我们算法的基础上对各种问题进行深入的模拟研究。

参考文献

- 1 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press, 1961
- 2 Theofanous TG. Aerobreakup of Newtonian and viscoelastic liquids. Annual Review of Fluid Mechanics, 2011, 43: 661~690
- 3 Theofanous TG, Mitkin VV, Ng CL, Chang CH, Deng X, Sushchikh S. The physics of aerobreakup part II: viscous liquids. Physics of Fluids, 2011, 24, 022104
- 4 Glimm J, Issacson E, Marchesin D, McBryan O. Front Tracking for Hyperbolic Systems. Advances in Applied Mathematics, 1981, 2, 91~119
- 5 Liu J, Lim HK, Glimm J, Li X. A Conservative Front Tracking Method in N Dimensions. Journal of Scientific Computing, 2007, 31, 1/2: 213~236
- 6 Terashima H, Tryggvason G. A front-tracking / ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows. Journal of Computational Physics, 2009, 228, 4012~4037
- 7 Nourgaliev RR, Liou MS, Theofanous TG. Numerical prediction of interfacial

- instabilities: sharp interface method (SIM). Journal of Computational Physics, 2008, 227, 3940~3970
- 8 Chang CH, Liou MS. A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow: stratified flow model and AUSM+-up scheme. Journal of Computational Physics, 2007, 225, 840~873
- 9 邓小龙, 张智豪. 高速气流中液滴表面 Rayleigh-Taylor 不稳定性的计算流体力学模拟, 第十五届全国计算流体力学会议, 烟台, 2012-08-04~07
- 10 Liepmann HW, Roshko A. Elements of Gas-Dynamics. John Wiley & Sons, 1957

NUMERICAL SIMULATION OF THE KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITY ON A DROPLET IN HIGH-SPEED GAS FLOW

DENG Xiaolong¹

(1 Beijing Computational Science Research Center, No.3 Heqing Road, Beijing 100084, China)

Abstract Kelvin-Helmholtz instability is an important mechanism of deformation and breakup of liquid droplets. With Cut Cell method and Level Set function, we developed a sharp interface numerical method for compressible multiphase flows, which strictly satisfies conservation laws and consistency. By applying this method, we can simulate instability problems on a droplet exposed in high-speed gas flow. With the help of structured conformal mesh, we could catch the boundary layer of air near a droplet. The simulation result matches experimental result very well. With this computational fluid dynamics method, we can study the gas dynamics near the free interface of a droplet, we can study the movement mechanism of the droplet-air interface, and get better understanding on the mechanism of droplet breakup dominated by Kelvin-Helmholtz instability.

Key words Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Multiphase Flow, Kelvin-Helmholtz Instability