CSTAM 2012-B03-0019

# 方腔热对流大规模数值计算及其湍流特性

包芸，邹鸿岳，徐炜，佘振苏

中山大学力学系

北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室

第七届全国流体力学学术会议

2012 年 11 月 12—14 日 广西·桂林

Copyright © 2012 版权所有 中国力学学会

地址: 北京市北四环西路 15 号 邮政编码:100190 Address: No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190

# 方腔热对流大规模数值计算及其湍流特性

包芸*, 1)，邹鸿岳*，徐炜*，佘振苏+
*（中山大学力学系，广州 510275）
+（北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室，北京 100871）

**摘要** 本文采用投影法及二阶精度的非等距差分格式，设计了跳点线迭代的求解压力泊松方程方法，利用 MPI 并行技术，对 Pr=0.7，Ra 数在的 $5\times10^7$--$8\times10^{11}$ 的范围内的二维 Rayleigh-Bénard 热对流进行了一系列大规模数值模拟计算。计算中最大 Ra 数采用了上海超算中心的 1024 个节点，4096×2500 个网格点，获得了计算数据和结果。根据计算结果，发现在二维热对流中存在多种不同的流态，并进一步根据 Heslot 的定义，将 Ra 小于 $6\times10^8$ 的流动状态划分为软湍流，当 Ra 大于 $6\times10^8$ 定义为硬湍流状态。结果表明：在软湍流状态大尺度环流(LSC)和角区漩涡保持相对稳定，LSC 内涡量很小，环流近似为刚体运动；在硬湍流状态，角区漩涡从边界层内脱落，进入到大尺度环流(LSC)中随着 LSC 一起运动，在 LSC 内存在大量的小涡旋。

**关键词** 热对流，湍流，角涡，大尺度中心环流（小 5 宋体，关键词后空一格，段前 6 磅，段后 12 磅）

## 引 言

Rayleigh-Bénard 热对流在一个封闭的容器内，加热其下底表面、冷却上底表面从而形成温差，在浮力和重力的作用下导致容器内的流体产生运动。由于 Rayleigh-Bénard 热对流系统的封闭性，它有利于实验的控制和操作，为耗散系统的精细模拟和研究提供了理想的模型[1]。

在 Rayleigh-Bénard 热对流研究中，主要有三个无量纲的控制参，分别是：Rayleigh 数定义为 $Ra=\chi g\Delta TH^3/(\nu\kappa)$，其中 $\chi$ 为流体的热膨胀系数，$g$ 为地球的重力加速度，$\Delta T$ 是热对流系统中的上下底板的温度差，$H$ 是热对流系统上下底板的之间的高度，$\nu$ 和 $\kappa$ 分别为流体的粘性系数和热扩散系数。Prandtl 数定义为 $\Pr=\nu/\kappa$，它反映的是流体本身的性质。本文主要考虑 $Ra$ 数对传热的影响，故只考虑了 $\Pr=0.7$ 的情况。以及描述系统的几何形状的宽高比 $\Gamma=D/H$。其中 $D$ 表示对流系统的宽度，对于圆形装置，$D$ 是其直径；$H$ 是对流系统上下底板之间的高度。

本文利用 DNS 对二维 Rayleigh-Bénard 热对流的形成和运动过程进行数值模拟。对人们普遍关注的羽流结构、大尺度环流[2,3]进行了研究，从定性上描述了羽流和大尺度环流的形成和演化过程，并对软湍流和硬湍流的流动进行的定性的刻画，探讨总结了二维热对流的运动规律。

## 1 控制方程及数值计算方法

考虑采用 Boussinesq 假设的流体力学连续性方程、运动方程组以及温度对流扩散方程为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 & (j=1,2,3)\\[2mm]
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}\right)+\chi g\theta\cdot\hat{z} & (j=1,2,3)\quad(i=1,2,3)\\[2mm]
\dfrac{\partial \theta}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}=\kappa\left(\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x_j\partial x_j}\right) & (j=1,2,3)
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $u_j\ (j=1,2,3)$ 为 $x,y,z$ 方向的速度分量；$\theta$ 为温度；$\chi$ 为热传导系数，$g$ 为重力加速度，$\hat{z}$ 表示只在 $z$ 方向上存在着一项。$\nu$ 为粘性系数，$\kappa$ 为热扩散系数。

考虑时间离散的流体运动方程：

1）Email：stsby@mail.sysu.edu.cn

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j})+\theta\cdot\hat{z}\quad (j=1,2,3)\quad (i=1,2,3)$$

(2)

其中上标 $n+1$ 和 $n$ 表示第 $n+1$ 和第 $n$ 时间层。我们引入预估速度 $u_i^*$，将(2)方程拆分成如下两部分：

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^*}{\Delta t}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}\ (i=1,2,3)\quad (3)$$

$$\frac{u_i^*-u_i^n}{\Delta t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\nu(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j})+\theta\cdot\hat{z}\quad (j=1,2,3)\quad (i=1,2,3)$$

(4)

对(3)方程组中 $(i=1,2,3)$ 方向的方程再沿对应的 $(i=1,2,3)$ 方向求偏导数并考虑到在 $n+1$ 的时间层上的速度满足连续性方程，(3)式简化为求解压力的泊松方程：

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}\quad (5)$$

求解步骤为：在已知第 $n$ 时间层的速度 $u_i^n\ (i=1,2,3)$ 的条件下，求解(4)方程组得到预估速度 $u_i^*\ (i=1,2,3)$。利用预估速度 $u_i^*\ (i=1,2,3)$，求解压力泊松方程(5)，得到压力值 $p$。将压力代入方程(2), 得到第 $n+1$ 个时间层的速度场 $u_i^{n+1}$。

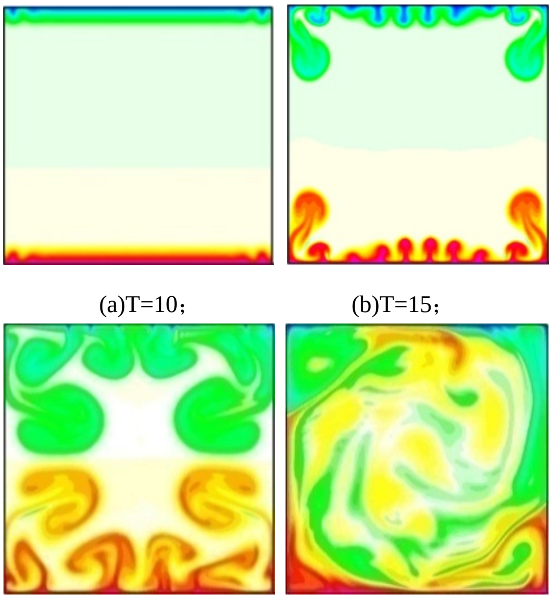
在空间离散上对速度和温度的对流扩散项采用二阶非等距的差分格式。考虑到 MPI 并行的效率问题，本文对压力泊松方程的求解采用了跳点的线迭代方法，其具体思想是：在垂直方向上压力受温度影响变化大，故压力泊松方程在垂直方向上采用追赶法直接进行联立求解，而在水平方向采用迭代的方式求解。

## 2 数值算例及分析

根据以上的数值方法，并采用上海超级计算机中心的曙光 5000A 大型计算机的硬件设备，对不同 Ra 数的二维 RB 热对流进行了一系列的数值模拟计算。利用无量纲化之后的粘性系数 $\nu=\mathrm{Pr}/\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot Ra}$ 和热扩散系数 $\kappa=1/\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot Ra}$。速度在边界上采用无滑移条件，温度在左右边壁为绝热条件，上下底板为恒温条件，上底板温度为-0.5，下底板为 0.5。宽高比为 1，Prandtl 数 $\mathrm{Pr}=0.7$，Rayleigh 数从 $Ra=5\times10^7$ 到 $Ra=8\times10^{11}$。最大网格数为 4096×2500。

### 2.1 热羽流的形成

图 1 给出了 $Ra=2\times10^8$ 在不同时刻的温度场，从图(a)中我们可以看到在上下底板的温度边界层内，左右边壁附近产生一个沿水平方向凹凸不平的等温面。随着时间的推移，在垂直方向上等温面凸起的部分继续向上(热温度)或向下(冷温度)运动，当这一局部的热结构离开温度边界层，由于热结构内部温度梯度效应，逐渐向左右两边扩散，从而形成蘑菇状的羽流结构。在水平方向上等温面弯曲的效应随着时间往中心区域传递，这一过程使整个温度边界层内都产生往外凸起的局部热结构，如图 1(b)。所有这些蘑菇状的羽流在浮力(热羽流)或重力(冷羽流)的驱动下向上(热羽流)向下(冷羽流)运动。当两股冷热羽流相遇之后，由于它们之间的不稳定性，冷热羽流在碰撞、翻转过程中各自分别从某一侧进入到对方区域，最后形成一个相对稳定的热对流的环流状态图 1(d)。



(a)T=10； (b)T=15；
(c)T=20； (d)T=120；

图 1： $Ra=2\times10^8$ 在不同时刻的瞬时温度场

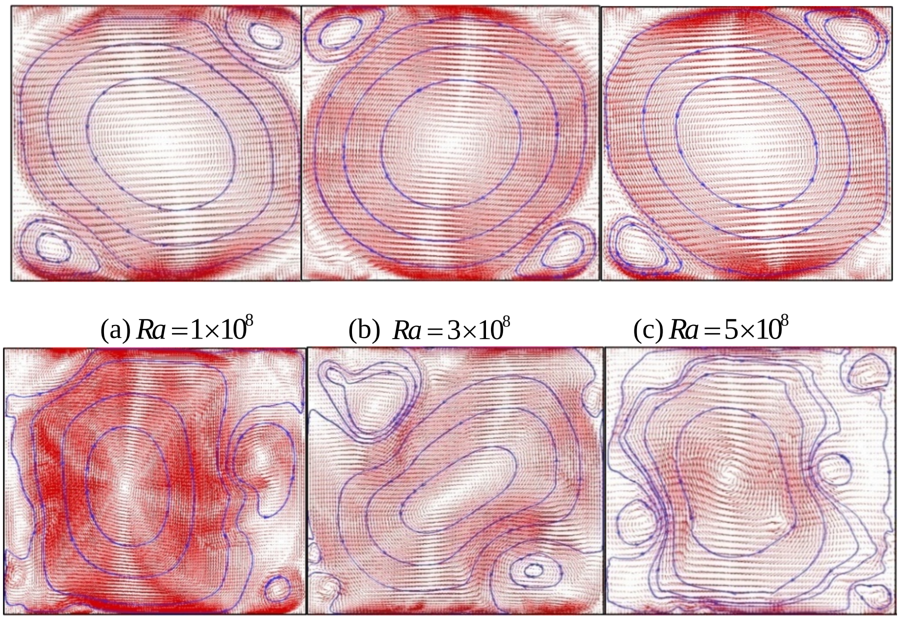
### 2.2 两种不同的流动状态

图 2 给出了不同 Ra 数的瞬时速度场，从图 (a)、(b)、(c)中可以看到当 $Ra$ 数分别为 $Ra=1\times10^8$，$Ra=3\times10^8$，$Ra=5\times10^8$ 的三种

1）Email：stsby@mail.sysu.edu.cn

情况下，流场具有明显的规则性和规律性。从图中的流线上可以看到在流场内存在一个明显的近似椭圆的大尺度环流。整个椭圆沿着方腔的对角线对称，在 $Ra=3\times10^8$ 的情况下椭圆形的长轴方向与其它两组算例的结果是相反的，这说明大尺度环流的旋转方向具有一定的随机性。在大尺度环流的短轴方向对应的角区内，存在着两个明显的与大尺度环流方向相反的涡旋。这两个涡旋的运动的方向与大尺度环流的运动方向相反。且在这两个涡旋与角区边壁交界的区域内还存在更小一级的漩涡结构。

在图(d)、(e)、(f)中可以看到当 $Ra$ 数分别为 $Ra=8\times10^8$、$Ra=1\times10^9$、$Ra=1\times10^{10}$ 时，在中心区域内仍然存在大尺度环流结构。但是相比于图中(a)、(b)、(c)的情况，它们的结构不再具有明显的规则形状。中心大尺度环流不再保持相对稳定的椭圆形，其次在方腔的四个角区内产生的小旋涡从角区内脱离，进入到中心的大尺度环流内并参与中心大尺度的环流运动，并影响着大尺度环流的运动。此外，从计算的结果中我们也发现随着 Ra 数的增大，角区脱离的涡旋几何尺度也越来越小，并且越来越密集。



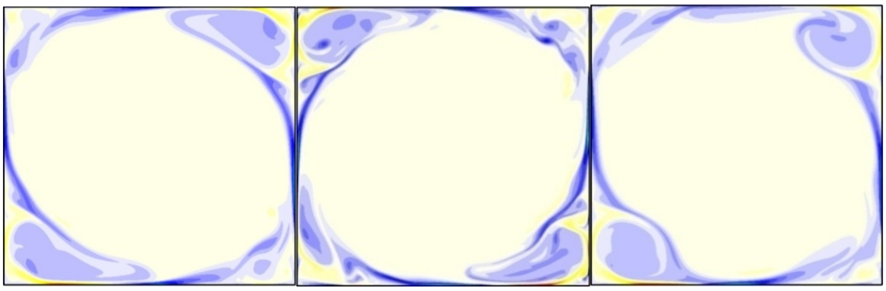
(a) $Ra=1\times10^8$ (b) $Ra=3\times10^8$ (c) $Ra=5\times10^8$

(d) $Ra=8\times10^8$ (e) $Ra=1\times10^9$ (f) $Ra=1\times10^{10}$

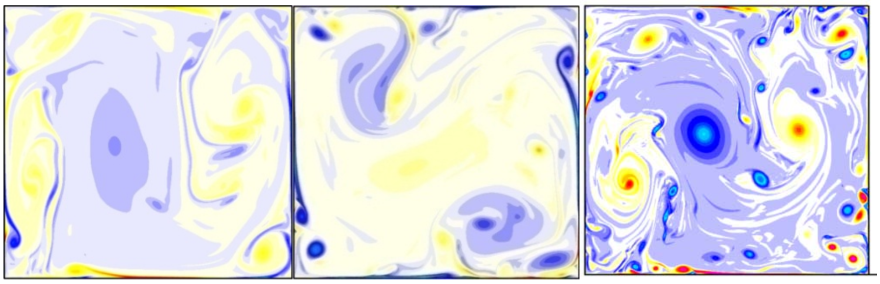
图 2 在不同 $Ra$ 数下某一时刻的瞬时流场和局部流线图

考虑不同 Ra 数的涡旋运动，我们定义涡量为 $\omega=\partial_x u_y-\partial_y u_x$。图 3 显示的是不同时刻的瞬时涡量场，从图(a)、(b)、(c)中可以看出当 $Ra$ 数分别为 $Ra=1\times10^8$，$Ra=3\times10^8$，$Ra=5\times10^8$ 的情况下，涡旋主要分布在左右壁面附近。以及上下底板内。在中心大尺度环流区域内，涡量非常小，从图上看着一区域是不带杂质的白色、是非常“干净的”的一块区域。对相同 Ra 数下不同时刻的涡量场进行分析后发现：在中心大尺度内的“白色区域”形状和大小随时间变化非常小，在其内部的涡量值的变化更是几乎可以忽略不计。同时，在大尺度环流的边界上，存在有一层条带状的围绕着大尺度环流的正向涡层。另外根据图中发现，在 $Ra=1\times10^8$，$Ra=3\times10^8$，$Ra=5\times10^8$ 的情况，只是在角涡与壁面交界的极狭小的区域内存在反向涡量(图中的红黄色部分)。

根据图 3 中的(d)、(e)、(f)，我们发现在 $Ra$ 数分别为 $Ra=8\times10^8$，$Ra=1\times10^9$，$Ra=1\times10^{10}$ 的情况下，涡量的分布与(a)、(b)、(c)的情况存在明显不同。首先在大尺度环流区域内同样存在明显的正向和反向涡量。随着时间的推移，涡量的分布不断演化。随着 $Ra$ 数的增大，中心处的涡量绝对值也越来越大，并且由条带或面状逐渐变成涡旋状或粒子状，而这些形状内的涡量绝对值也越来越大。



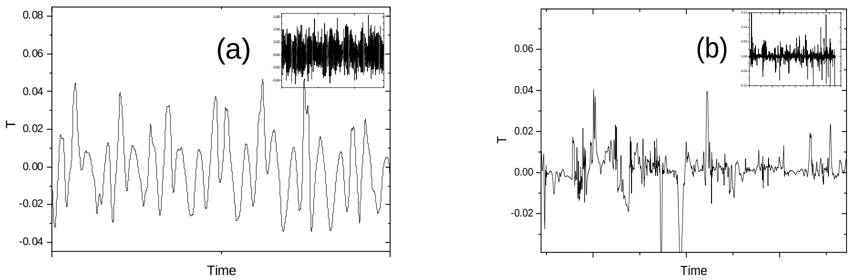
(a) $Ra=1\times10^{8}$ (b) $Ra=3\times10^{8}$ (c) $Ra=5\times10^{8}$



(d) $Ra=8\times10^{8}$ (e) $Ra=1\times10^{9}$ (f) $Ra=1\times10^{10}$

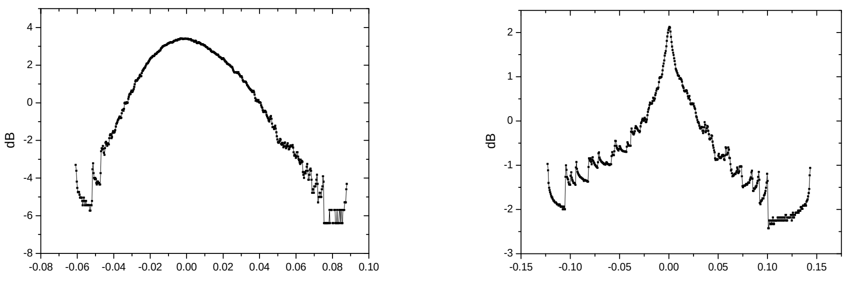
图 3 不同 $Ra$ 数的瞬时涡量场。图中蓝色表示正向涡，红黄色代表负方向涡（不同 $Ra$ 数下的颜色比例相同，颜色越深表示涡量值越大）。

图 4 是不同 Ra 数的温度随时间的脉动信号，测点位置为水平 x=0.5，垂直方向 z=0.25。在低 Ra 数 $Ra=5\times10^{7}$ 的情况，测点处的温度脉动具有明显的准周期性，如图(a)。温度脉动中有微小的湍流多尺度效应，但其效应并不明显。在高 Ra 数 $Ra=8\times10^{11}$，靠近中心处的温度脉动具有明显的多尺度效应，如图 4(b)。对 $Ra=5\times10^{7}$ 和 $Ra=8\times10^{11}$ 的温度概率密度函数(PDF)进行分析，在低 Ra 数的情况中心点附近温度 PDF 是满足高斯分布的，在高 Ra 数的情况，温度 PDF 满足指数分布。这一结果与 1987 年 Heslot 的实验[4、5]结果是相一致的，本文引入了 Heslot 定义的软湍流和硬湍流的定义，将以上两种流态划分为软湍流和硬湍流。




(a) $Ra=5\times10^{7}$， (b) $Ra=8\times10^{11}$

图 4 温度脉动




(a) $Ra=5\times10^{7}$ (b) $Ra=8\times10^{11}$

图 5 温度 PDF 函数，

2.3 流态对热流的影响

图 6 是二维 DNS 数值模拟的热流 Nu 数随 Ra 数的变化。结果发现，在 $5\times10^7 \le Ra \le 8\times10^{11}$ 的范围内，$Nu$ 数与 $Ra$ 数之间也存在两种明显不同的标度关系。分别为：$Nu \approx 0.057\times Ra^{0.33}$ 和 $Nu \approx 0.138\times Ra^{0.284}$。这与实验[5，6]的结果 $\gamma = 1/3$ 和 $\gamma = 0.282\pm0.006$ 是相一致的。2009 年在 PRL[6]发表了二维 RB 热对流的 DNS 结果：在 $Ra \le 10^9$ 条件下的 Nu 和 Ra 的关系为 $Nu \approx 0.138\times Ra^{0.285}$。这一结果与我们的 DNS 获得的在硬湍流状态下的结果是非常吻合的。

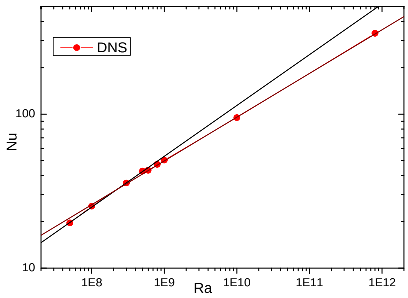



图 6：二维 DNS 测得的 $Nu$ 数和 $Ra$ 数的标度关系

## 结　论

在 Ra=5e7—8e11 的范围内，二维 RB 热对流有两种明显不同的流态，分别对应了实验中发现的软湍流和硬湍流两种状态。在软湍流状态，中心大尺度环流呈椭圆形状，方腔的角区内存在两个明显的角涡。这三个空间上的涡旋结构在时间上保持相对稳定的状态，从温度脉动信号的准周期性中我们也可以证明这一点：在方腔内的流动具有大尺度的周期性，而其中的湍流多尺度效应并不明显。二维软湍流状态涡量主要分布在方腔四周的边壁附近。在中心大尺度环流内涡量非常小，并且仅在角涡与边壁交界的区域存在反方向的涡旋。

在硬湍流状态，中心的大尺度环流的空间结构在时间上不断演化，角区和温度边界层内产生的小结构涡旋不断从温度边界层内脱离，并进入到中心大尺度环流内参与环流的运动。由于小结构的涡旋从角区脱离，在中心环流区域内同样存在大量的涡量，同时也影响了中心区域温度脉动信号的多尺度效应。

同时，不同的流动的状态对应了不同的传热标度(分别是 0.33 和 0.274)这一结果是与实验相一致的。这也说明 RB 热对流中的流动形态，湍流的多尺度效应对方腔内的传热是有影响的，这一具体的内在影响机制还有待我们作进一步的分析和研究。

## 参考文献


[1] 宁利中，原田义文，八幡英雄. 二成分混合流体 Rayleigh-Benard 对流[J]. 西安理工大学学报. 2004(04).
[2] Krishnamurti R, Howard L N. Large-scale flow generation in turbulent convection[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences.1981, 78(4).
[3] Sun C, Xi H D, Xia K Q. Azimuthal symmetry, flow dynamics, and heat transport in turbulent thermal convection in a cylinder with an aspect ratio of 0.5[J]. Physical Review Letters. 2005, 95(7): 74502.
[4] Heslot F, Castaing B, Libchaber A. Transitions to turbulence in helium gas[J]. Physical Review A. 1987, 36(12): 5870.
[5] Castaing B, Gunaratne G, Kadanoff L, et al. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénardconvection[J]. Journal of Fluid Mechanics. 1989, 204(1): 1-30.
[6] Johnston H, Doering C R. Comparison of turbulent thermal convection between conditions of constant temperature and constant flux[J]. Physical Review Letters. 2009, 102(6): 64501.



1）Email：stsby@mail.sysu.edu.cn