

文章编号: 1000-4750(2011)12-0226-05

考虑气动力非线性时二维受热壁板的颤振分析

*陈大林, 吴连军, 钟卫洲

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川, 绵阳 621900)

摘 要: 考虑了气动力非线性, 采用三阶活塞理论计算气动力, 基于 Von Karman 薄板理论建立了超音速气流中二维受热薄板的气动弹性方程。采用 Galerkin 方法在模态空间对方程进行了离散, 分析了气动力非线性对壁板热屈曲和颤振幅值的影响, 采用 Lyapunov 间接法分析了受热壁板的稳定性, 并确定了壁板颤振边界。采用数值积分方法在时域内求解了壁板的非线性颤振响应, 发现了壁板的各种动力学现象, 如衰减运动、极限环运动以及混沌运动等。

关键词: 气动力非线性; 活塞理论; 热屈曲; 颤振; 混沌运动

中图分类号: O322; V215.3 **文献标志码:** A

FLUTTER ANALYSIS OF TWO DIMENSIONAL HEATED PANELS CONSIDERING NONLINEAR AERODYNAMIC

*CHEN Da-lin, WU Lian-jun, ZHONG Wei-zhou

(Institute of Systems Engineering, CAEP, Mianyang, Sichuan 621900, China)

Abstract: Considering nonlinear aerodynamic, the aero-elastic equation in supersonic flow is constructed by applying the third piston theory based on Von Karman's nonlinear panel theory. Then the equation is scattered in modal space by Galerkin method. The influence of thermal buckling amplitude and flutter amplitude by nonlinear aerodynamic is analyzed. The stability of heated panels and the boundary of flutter is determined using Lyapunov indirect method. The nonlinear flutter responses of the heated panel are numerically simulated in time domain. The results show that there are complex dynamic phenomenons such as convergent motion, limit cycle oscillation and chaotic motion.

Key words: nonlinear aerodynamic; piston theory; thermal buckling; flutter; chaotic motion

壁板非线性颤振属于结构与气流相互作用的多场耦合动力学的研究范畴, 涉及到多门学科的交叉和融合, 已成为航天器研究中一项重要内容, 并直接影响着现代飞行器的研制和关键技术。当前该领域正朝着考虑各种影响因素以提高其计算准确性的方向发展^[1], 如能正确估算壁板颤振的幅值和应力, 就完全有可能实现基于疲劳寿命的壁板设计^[2]。壁板颤振理论包括线性的和非线性的颤振分析。线性颤振分析技术已经非常成熟, 颤振临界流速的计算已能在一些商业软件平台上进行, 而非线性颤振

分析则不然。非线性颤振分析除了大变形几何非线性外, 还有气动力的非线性。有关几何非线性方面的研究已有大量文献: 如文献[3]研究了二维受热壁板的基本型颤振和二次失稳型颤振。文献[4]研究了受热壁板的稳定性。文献[5-6]研究了二维壁板发生动态 Hopf 分岔的条件和各种复杂的动力学现象。文献[7-8]采用有限元方法研究了几何非线性引起的壁板的分岔与混沌响应。这些研究的共同点是都没有考虑气动力的非线性。当来流速度进入到高超声速($Ma > 5$)的范围时, 线性的气动力理论不能真实

收稿日期: 2010-03-24; 修改日期: 2010-05-06

基金项目: 国家自然科学基金(青年基金)项目(10902103)

作者简介: *陈大林(1974—), 男, 四川绵阳人, 副研究员, 博士, 从事流固耦合问题研究(E-mail: dalinchen2003@yahoo.com.cn);

吴连军(1975—), 男, 四川绵阳人, 工程师, 硕士, 从事流固耦合问题研究(E-mail: ljwscmy@sina.com.cn);

钟卫洲(1978—), 男, 四川绵阳人, 工程师, 博士, 从事结构动力学问题研究(E-mail: wz_zhong@sina.com).

地反映随着马赫数增大而显著增长的气动力的非线性效应,应采用非定常的高阶活塞理论来计算气动力。文献[9-10]考虑气动力非线性效应分析二维和三维壁板的非线性颤振问题,指出了气动力非线性也可能导致结构振动发散。本文在前人研究成果的基础上,同时考虑几何非线性和气动力非线性的影响对二维受热壁板的气动弹性问题进行研究。

1 运动方程

考虑两端简支的二维壁板,上表面有气流流过,气流密度、速度和马赫数分别标记为 ρ_∞ 、 U 和 Ma 。假设壁板受热并达到稳态后均匀分布,由温度变化 $\Delta T = T - T_0$ 引起的面内内力为 N_T ,其中 T_0 为初始温度。根据 Von Karman 薄板理论,在气动力 ΔP 作用下壁板的运动微分方程为:

$$\rho h \dot{w} + c \dot{w} - (N_x - N_T) w_{,xx} + D w_{,xxxx} + \Delta P = 0 \quad (1)$$

式中: $N_x = Eh \int_0^a (w_{,x})^2 dx$ 为几何非线性效应引起的附加面内内力; c 为结构阻尼系数; E 为材料弹性模量; $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$; ν 为泊松比; ΔP 为气动力; ρ 、 a 、 h 分别代表壁板密度、长度和厚度。

考虑气动力的非线性,采用三阶活塞理论的超音速气动力为:

$$\Delta P = \frac{2q}{Ma} \left[\frac{1}{U_\infty} \dot{w} + w_{,x} + c_2 \frac{(1+\gamma)Ma}{4} \left(\frac{1}{U_\infty} \dot{w} + w_{,x} \right)^2 + c_3 \frac{(1+\gamma)Ma^2}{12} \left(\frac{1}{U_\infty} \dot{w} + w_{,x} \right)^3 \right] \quad (2)$$

式中: $q = \rho_\infty U_\infty^2 / 2$ 为动压; γ 为热交换系数,通常取值 1.4; c_2 和 c_3 为 0 或 1,当 $c_2 = c_3 = 0$,式(2)表示一阶活塞理论;当 $c_2 = 1, c_3 = 0$,式(2)为二阶活塞理论;当 $c_2 = c_3 = 1$,式(2)表示三阶活塞理论。

引入无量纲参数 $\xi = x/a$, $W = w/h$, $\tau = t\sqrt{D/\rho ha^4}$, $\lambda = 2qa^3/(DMA)$, $s = h/a$, $\mu = \rho_\infty a / (\rho h)$, $R_T = N_T a^2 / D$,代入到式(1)中,得到无量纲壁板运动微分方程为:

$$\begin{aligned} & \ddot{W} + R_T W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi\xi\xi} - 6(1-\nu^2) \left[\int_0^1 W_{,\xi}^2 d\xi \right] W_{,\xi\xi} + \\ & \lambda \left[\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} + \frac{(1+\gamma)c_2 s Ma}{4} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} \right) + \right. \\ & \left. \frac{(1+\gamma)c_3 s^2 Ma^2}{12} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} \right)^3 \right] = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

采用假设模态方法,设满足简支边界条件的壁板位移函数为:

$$W(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) \sin(n\pi\xi) \quad (4)$$

将式(4)代入到式(3),应用 Galerkin 方法,可得到二维壁板的运动常微分方程:

$$\begin{aligned} & \ddot{g}_k + \left[(k\pi)^4 - R_T (k\pi)^2 \right] g_k + \sqrt{\lambda\mu/Ma} \dot{g}_k + \\ & 3(1-\nu^2) \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^2 g_i^2 \right] g_k + \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{2kj}{k^2-j^2} [1 - (-1)^{k+j}] g_j + \\ & \frac{(1+\gamma)c_2 s Ma \lambda}{2} \left[\frac{\mu}{\lambda Ma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_1 \dot{g}_n \dot{g}_m + \right. \\ & \left. 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m\pi \delta_2 \dot{g}_n g_m + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm\pi^2 \delta_3 g_n g_m \right] + \\ & \frac{(1+\gamma)c_3 s^2 Ma^2 \lambda}{6} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda Ma} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_4 \dot{g}_n \dot{g}_m \dot{g}_l + \right. \\ & \left. \frac{3\mu}{\lambda Ma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l\pi \delta_5 \dot{g}_n \dot{g}_m g_l + \right. \\ & \left. 3\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ml\pi^2 \delta_6 \dot{g}_n g_m g_l + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} nml\pi^3 \delta_7 g_n g_m g_l \right] = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_2 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_3 &= \int_0^1 \cos(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_4 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \sin(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_5 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_6 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi, \\ \delta_7 &= \int_0^1 \cos(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi. \end{aligned}$$

2 壁板后屈曲响应和稳定性

壁板在热载荷作用下的临界热载荷根据文献[3]的方法,式(5)的临界热屈曲载荷为 $R_T^{cr} = \pi^2$,定义临界热载荷 R_T^{cr} 对应的壁板温升为屈曲临界温升 ΔT_{cr} ,则温升比 $\Delta T / \Delta T_{cr}$ 可作为衡量热效应强弱

的无量纲指标。温升比与无量纲热载荷的关系为 $\Delta T / \Delta T_{cr} = R_T / \pi^2$ ，当 $\Delta T / \Delta T_{cr} > 1$ 时，面内热载荷大于临界热载荷，壁板发生屈曲失稳，壁板在挠度方向会产生变形，但由于结构几何非线性效应，壁板在挠度方向的变形不会无限增长，将稳定在某个固定位置达到静力平衡，称为后屈曲平衡态。

为分析超音速气流作用下壁板的后屈曲响应，略去式(5)中关于时间的导数项，即可得到超音速气流中受热壁板的静态方程，如下：

$$[(k\pi)^4 - R_T(k\pi)^2]g_k + 3(1-\nu^2) \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^2 g_i^2 \right] g_k + \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{2kj}{k^2 - j^2} [1 - (-1)^{k+j}] g_j + \frac{(1+\gamma)c_2 s Ma \lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n m \pi^2 \delta_3 g_n g_m + \frac{(1+\gamma)c_3 s^2 Ma^2 \lambda}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} n m l \pi^3 \delta_7 g_n g_m g_l = 0 \quad (6)$$

采用文献[4]中的牛顿下山迭代法，取 6 阶模态，不同阶气动力活塞理论计算壁板后屈曲响应如图1。由图 1 可见：当来流动压较低时，热应力是导致壁板变形的主要因素，且 $\lambda = 0$ 时壁板变形以中点最大，沿两边对称；当 $\lambda \neq 0$ 时，壁板屈曲变形不对称，最大值出现在 65%壁板长度。二阶活塞理论与三阶活塞理论计算结果相当，小于一阶活塞理论计算结果，最大值处相差 12%，由此，在壁板热屈曲分析时，气动力非线性效应对屈曲响应的影响不容忽视。

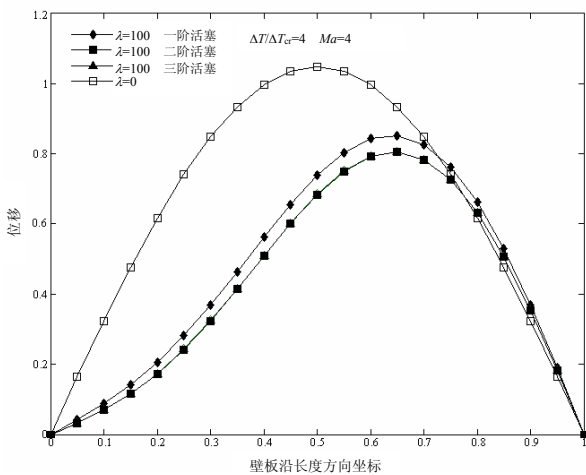


图 1 壁板屈曲变形形态

Fig.1 The buckling shape of the panel

取状态变量：

$$(g_1, \dot{g}_1, g_2, \dot{g}_2, \dots, g_N, \dot{g}_N) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2N}) \quad (7)$$

则式(5)状态方程可表示为如下形式：

$$\dot{X} = F(X) \quad (8)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_{2N})^T$ ， $F = (f_1, f_2, \dots, f_{2N})^T$ 。设 $X = X_0$ 为式(8)的平衡点，则平衡点上的雅可比矩阵可表示为 $J = \partial F / \partial X |_{X=X_0}$ ，其特征方程有复特征值 $\Omega = \beta \pm i\omega$ ，根据李亚普诺夫间接方法，当 $\beta < 0$ ，系统渐近稳定； $\beta > 0$ 系统不稳定； $\omega = 0$ ，系统发生静态屈曲失稳。根据雅可比矩阵特征值实部随温升比和动压变化得到了图 2 所示壁板的稳定区域图。在 ABF 以下区域，壁板仅在面内热应力的作用下即可发生屈曲失稳，称为壁板静态屈曲失稳边界。在 $ABCG$ 左边区域，壁板为渐近稳定的平板，而区域 BCD 中还有其它渐近稳定的不动点(本文不做另外研究)。 GCF 以上区域，壁板动态失稳发生颤振(包括极限环颤振，准周期颤振以及混沌运动)，且边界 GC 为平板失稳发生颤振的边界，随温升比的升高，颤振临界动压减小， CF 边界为壁板屈曲失稳后在新的平衡位置又发生的二次动态失稳型颤振。

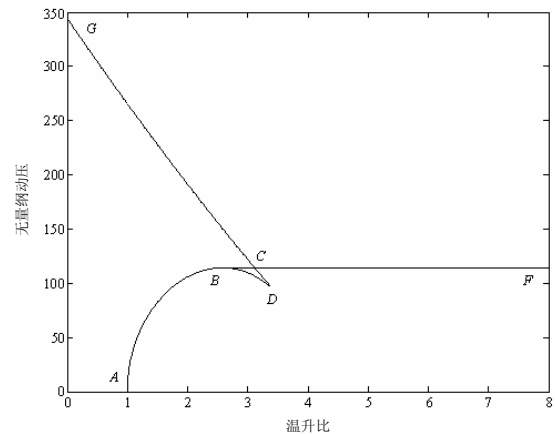


图 2 壁板的稳定性区域图

Fig.2 The stability boundary of the panel

3 壁板颤振响应分析

根据上述分析，受热壁板在 GCF 以上区域中都会发生颤振。采用固定时间步长的 4 阶 Runge-Kutta 方法对颤振方程式(5)进行数值求解，取无量纲时间步长 $\Delta \tau = 0.001$ ，初值 $W_0(\xi) = 0.5$ ，壁板上顺气流方向 75%长度处 ($\xi = 0.75$) 计算的颤振幅值随临界温升比变化见图 3。可见，颤振幅值随温升比的增大而增大；考虑气动力非线性后，二阶活塞理论与三阶活塞理论计算结果相当，要小于线性的一阶活塞理论计算结果，且这种差异随温升比的增大而逐渐增大。

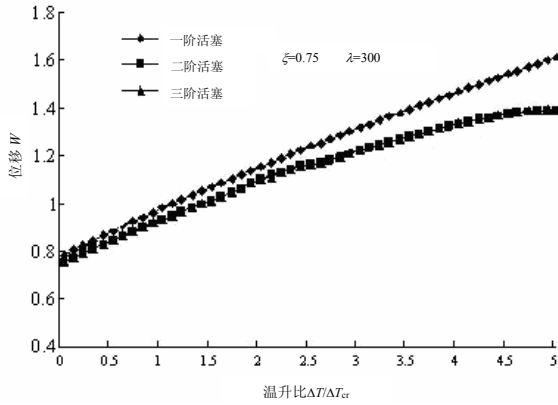


图3 颤振幅值随温升比的变化

Fig.3 Amplitude of flutter vs $\Delta T / \Delta T_{cr}$

采用三阶气动力活塞理论, 将顺气流方向 75% 长度处($\xi = 0.75$) 的响应峰值提取出来作为反映系统动态特性变化的参量, 得到位移响应峰值 W 随温升变化的分叉关系见图 4 所示, 可见随壁板温度升高, 超音速气流中的壁板存在 4 种动态响应情况:

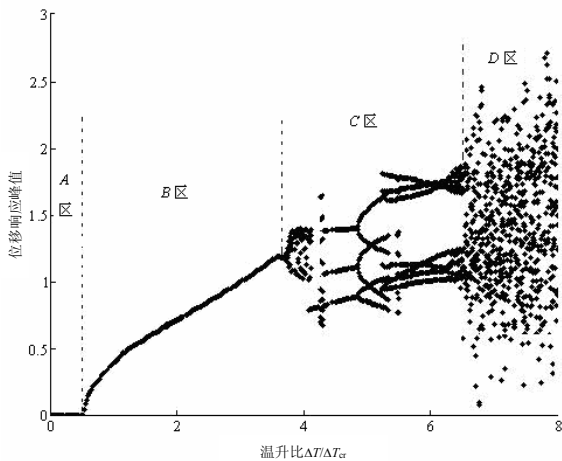


图4 位移峰值随温升变化分叉图

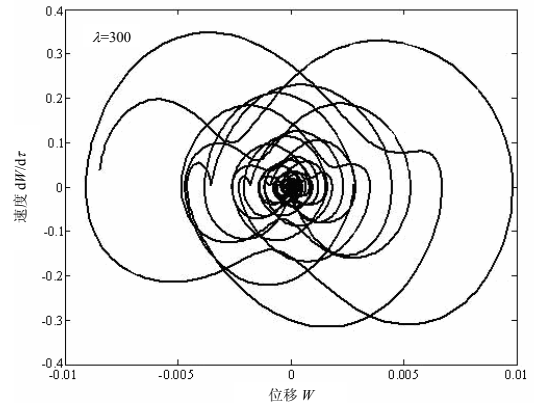
Fig.4 Bifurcation map of amplitude vs $\Delta T / \Delta T_{cr}$

1) 衰减运动, 对应图 4 中区域 A。此时, 壁板平衡点位置的任何扰动随时间衰减, 最后收敛到平衡位置上, 其对应的相轨迹图见图 5(a)。

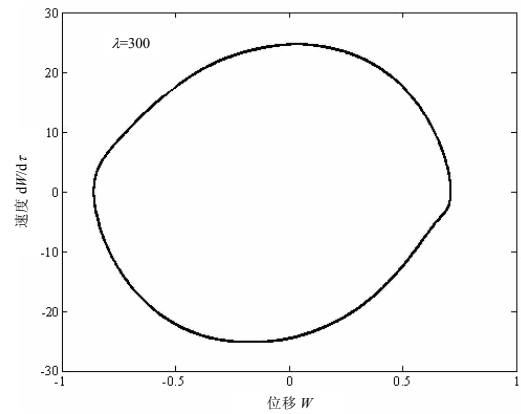
2) 单周期极限环颤振, 对应图 4 中区域 B。此时, 壁板稳态响应表现为等幅的极限环振荡, 壁板上任一点处的相轨迹为封闭曲线, 其典型相图如图 5(b), 对响应进行谱分析, 仅有一个峰值频率。

3) 多周期的极限环颤振, 对应图 4 中区域 C。此时, 壁板稳态响应不再是单一封闭的一个曲线, 其典型相图如图 5(c), 对响应进行谱分析, 会出现多个可数的峰值频率。

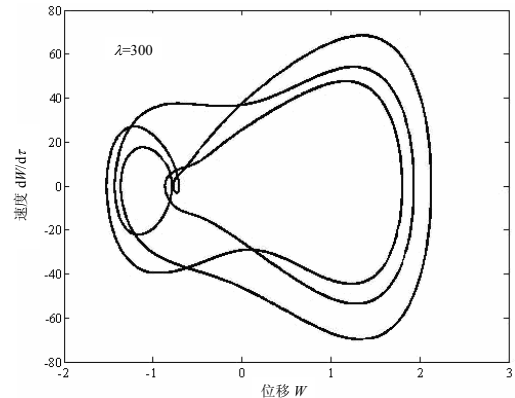
4) 混沌型颤振, 对应图 4 中区域 D。表现为类似于随机振动的限幅的非线性振动, 其典型相图如图 5(d)。



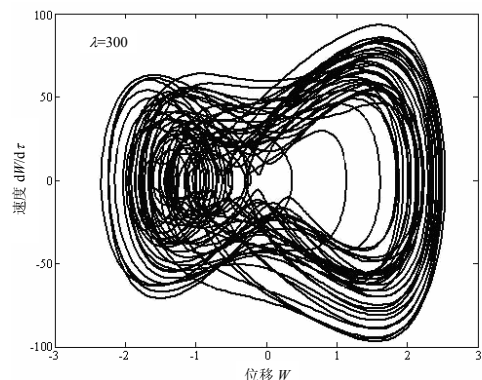
(a) $\Delta T / \Delta T_{cr} = 0.2$



(b) $\Delta T / \Delta T_{cr} = 2.5$



(c) $\Delta T / \Delta T_{cr} = 5.5$



(d) $\Delta T / \Delta T_{cr} = 7.5$

图5 颤振响应相轨迹图

Fig.5 Phase space maps of flutter

4 结论

本文采用高阶气动力活塞理论,建立了考虑气动力非线性后的二维壁板的非线性气动弹性方程,应用 Galerkin 方法在模态空间对方程进行了离散,对壁板热屈曲响应、稳定性以及非线性颤振进行了研究,得到如下结论:

(1) 壁板在热应力和超音速气流共同作用下会表现出热屈曲、颤振等复杂动力学现象。壁板存在热屈曲临界温升,当超过临界温升后,壁板在来流动压较低时就会发生热屈曲失稳。

(2) 气动力非线性效应对壁板热屈曲幅值影响不容忽视,二阶活塞理论和三阶活塞理论计算结果相当,但小于线性一阶活塞理论计算结果。

(3) 气动力非线性对壁板颤振幅值的影响也比较明显,二阶活塞理论和三阶活塞理论计算结果相当,小于一阶活塞理论的计算结果,且随温升的增高,趋势更为明显。

(4) 随温升的变化壁板表现出了各种复杂的动力学现象,如收敛运动、单周期的极限环振动、多周期颤振响应以及混沌运动等。

参考文献:

- [1] Prakash T, Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects [J]. *Composite Structures*, 2006, 72(1): 10–18.
- [2] Xue D Y, Mei C. Finite element nonlinear flutter and fatigue life of two-dimensional panels with temperature effects [J]. *Journal of Aircraft*, 1993, 30(6): 993–1000.
- [3] 杨智春, 夏巍. 超音速气流中二维壁板的非线性热颤振分析[J]. *振动工程学报*, 2009, 22(3): 221–226.
Yang Zhichun, Xia Wei. Nonlinear thermal flutter

- response of two dimensional panels in supersonic flow [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, 22(3): 221–226. (in Chinese)
- [4] 夏巍, 杨智春. 超音速气流中受热壁板的稳定性分析[J]. *力学学报*, 2007, 39(5): 602–609.
Xia Wei, Yang Zhichun. Stability analysis of heated panels in supersonic air flow [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2007, 39(5): 602–609. (in Chinese)
- [5] 陈大林, 杨翊仁, 肖世富, 胡绍全. 超音速流中二维板的 Hopf 分叉[J]. *工程力学*, 2008, 25(4): 214–217.
Chen Dalin, Yang Yiren, Xiao Shifu, Hu Shaoquan. Hopf bifurcation of a two-dimensional thin plate in supersonic airflow [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(4): 214–217. (in Chinese)
- [6] 陈大林, 杨翊仁, 胡绍全, 范晨光. 二维薄板在超音速气流作用下的热弹性颤振[J]. *西南交通大学学报*, 2007, 42(6): 691–694.
Chen Dalin, Yang Yiren, Hu Shaoquan, Fan Chenguang. Thermoelastic flutter of a two-dimensional thin plate in supersonic airflow [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2007, 42(6): 691–694. (in Chinese)
- [7] 夏巍, 杨智春. 复合材料壁板热颤振的有限元分析[J]. *西北工业大学学报*, 2005, 23(2): 180–183.
Xia Wei, Yang Zhichun. Flutter analysis of composite panels with thermal effects [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2005, 23(2): 180–183. (in Chinese)
- [8] Mei C. A finite element approach for nonlinear panel flutter [J]. *AIAA Journal*, 1977, 15(8): 1107–1110.
- [9] McIntosh J S. Effect of hypersonic nonlinear aerodynamic loading on panel flutter [J]. *AIAA Journal*, 1977, 11(3): 29–32.
- [10] Eastep F E, McIntosh S C. Analysis of nonlinear panel flutter and response under random excitation or nonlinear aerodynamic loading [J]. *AIAA Journal*, 1971, 9(3): 411–418.