

纯弯曲下薄壁圆柱壳屈曲的非线性分析

欧晓林^{*,†,1)} 顾建祖^{*} 李龙元^{**} 骆英^{*} 李康^{*} 虞波^{*}

^{*}(广东技术师范学院天河学院, 广州 510540)

[†](江苏大学土木工程与力学学院, 江苏镇江 212013)

^{**}(普利茅斯大学海洋科学与工程学院, 英国普利茅斯 PL4 8AA)

摘要 为解决薄壁圆柱壳在纯弯曲下由于横截面的椭圆化而引起的屈曲几何非线性问题. 基本假设是改良的 Brazier 简单理论, 把圆柱壳的纯弯曲变形简化成一个两阶段的过程, 分别求得纵向弯曲变形应变能和横截面变形应变能, 然后利用最小势能原理求出作用力矩与杆端旋转角度的关系, 最后分析可知: 壳体长度参数越小, 对应的圆柱壳壁越薄, 非线性的影响越大; 剪力大小参数越小, 边界条件对椭圆化变形影响越小, 非线性的影响越大.

关键词 薄壁圆柱壳, 纯弯曲, 非线性, 最小势能原理

中图分类号: O316 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-14-089

NONLINEAR BENDING RESPONSE OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS UNDER PURE BENDING

OU Xiaolin^{*,†,1)} GU Jianzu^{*} LI Longyuan^{**} LUO Ying^{*} LI Kang^{*} YU Bo^{*}

^{*}(Tianhe College of Guangdong Polytechnic Normal University, Guangdong 510540, China)

[†](Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China)

^{**}(Ocean Science and Engineering, University of Plymouth, Plymouth PL4 8AA, UK)

Abstract This paper focuses on solving the problem of geometrically nonlinear buckling of thin-walled cylindrical shells under pure bending with the cross-section tending to be oval-shaped. The basic hypothesis is based on the modified Brazier simple theory that the deformation of a shell under pure bending can be simplified as a two-stage process. By the two-stage process, the longitudinal bending strain energy and the cross-sectional deformation strain energy are obtained. The relationship between the end-rotation and the applied moment is obtained through the principle of the minimum potential energy. It is shown that: the smaller the shell length parameters and the thinner the corresponding cylindrical shell wall, the greater the impact of nonlinearity will be; the smaller the shear length parameters and the smaller the effect of the boundary conditions on the deformation leading to oval section shape, the greater the impact of nonlinearity will be.

Key words thin-walled cylindrical shells, pure bending, nonlinearity, the principle of minimum potential energy

壳体受力时, 主要承受以压力为主的薄膜内力, 且薄膜内力沿壳体厚度方向均匀分布, 其应力特征使得壳体可以比平板更充分地利用材料的强度, 大大地增加材料的承载能力. 因此, 不管是太空飞行

2014-04-03 收到第 1 稿, 2014-05-16 收到修改稿.

1) E-mail: 876309002@qq.com

引用格式: 欧晓林, 顾建祖, 李龙元等. 纯弯曲下薄壁圆柱壳屈曲的非线性分析. 力学与实践, 2015, 37(1): 86-90

Ou Xiaolin, Gu Jianzu, Li Longyuan, et al. Nonlinear bending response of thin-walled cylindrical shells under pure bending. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(1): 86-90

器, 还是家用电器, 圆柱壳已经广泛应用于日常生活中的各个领域.

薄壁圆柱壳的相关概念首次出现于 1874 年 Aron 的弹性力学方程中, 随后又出现在 1888 年 Love^[1] 提出“第一近似理论”的薄壳数学模型理论中. 然而直到 1927 年, Brazier^[2] 才首次提出薄壁圆柱壳弯曲的理论. Reissner 和 Fabian 已经利用非线性壳体方程对弯曲理论的正确性进行了验证, 并指出基于 Brazier 简单理论, 可以获得薄壁圆柱壳屈曲的非线性分析. 1965 年, Aksel'rad 通过 Valasov 半膜结构理论确定了壳的横截面变形对屈曲行为的影响, 才将原本适用于无限长壳体的 Brazier 简单理论应用到有限长壳体中, 即改良的 Brazier 简单理论. 1997 年, Lakis 等^[3] 将薄壳理论和有限元方法结合起来, 研究了正交各向异性层合圆柱壳的非线性自由振动, 并指出有限元-经典薄壳理论的结合方法不仅比现有理论更精确, 还可以获得高精度的高频值和低频值. 2004 年, 王珂晟等^[4] 综合考虑几何非线性、材料非线性、横向剪切效应以及初始几何缺陷等因素, 对带有加强筋和加强环的复合材料圆柱壳的屈曲非线性问题进行了深入的研究, 并指出改善结构整体屈曲性能的关键是控制制造加工质量、减少初始缺陷. 2008 年陈浩然等^[5] 采用基于复合材料一阶剪切理论的有限元法, 研究了含多分层损伤的先进复合材料格栅加筋板壳结构的热-机耦合屈曲性能, 研究结果表明复合材料格栅圆柱壳结构具有较强的抗热屈曲的能力和好的损伤容限性. 2009 年郭胜鹏等^[6] 对受轴向冲击圆柱壳非对称屈曲耗能进行了研究, 结果表明圆柱壳受轴向冲击屈曲过程中外力做功主要转变为轴向变形成能, 环向屈曲变形消耗外力功很少. 2011 年付朝江^[7] 采取 16 节点曲线边等参元对圆柱壳的几何非线性进行有限元分析. 研究结果表明在集群环境下, 所提并行算法具有良好的加速比和效率. 2012 年龙连春等^[8] 依据圆柱壳结构线性屈曲和非线性屈曲的相关理论, 基于有限元分析方法, 对加筋圆柱壳结构稳定性进行了分析.

1 纯弯曲下薄壁圆柱壳的总势能

由于薄壁圆柱壳在弯矩作用下发生横向变形时, 其横截面的变形将会对系统的总应变能产生较大的影响. 由于结构几何形状的改变而引入了非线性的应变能项, 因此, 在对薄壁圆柱壳进行屈曲分析时必然不能近似为线性分析, 必须考虑由几何非线性

引起的应变能.

Calladine^[9] 在 Brazier 对无限长壳体的研究基础上, 将 Brazier 简单理论推广到了有限长的壳体中. 根据改良的 Brazier 简单理论, 薄壁圆柱壳在纯弯曲作用下的变形可以简化为两个阶段: 第 1 阶段壳体并没有发生横向弯曲, 只是横截面由圆形变成椭圆形; 第 2 阶段壳体可以视为一变截面梁, 并受到弯矩发生横向弯曲.

如图 1 所示的薄壁圆柱壳长为 L , 平均半径为 R , 厚度为 h . 为了把 Brazier 方法一般化, 假设壳体在受到静态纯弯矩时, 有以下位移

$$u(x, \theta) = u_1(x) \cos \theta + u_2(x) \cos(2\theta) \quad (1a)$$

$$v(x, \theta) = v_1(x) \sin \theta + v_2(x) \sin(2\theta) \quad (1b)$$

$$w(x, \theta) = w_1(x) \cos \theta + w_2(x) \cos(2\theta) \quad (1c)$$

其中, $u(x, \theta)$, $v(x, \theta)$ 和 $w(x, \theta)$ 表示位于壳体表面的点 (x, θ) 轴向的、圆周的、径向的总的位移, θ 为 z 轴到点 (x, θ) 所包含的角度. $u_1(x)$, $v_1(x)$ 和 $w_1(x)$ 表示薄壁圆柱壳横向弯曲的位移分量; $u_2(x)$, $v_2(x)$ 和 $w_2(x)$ 表示横截面椭圆化的位移分量.

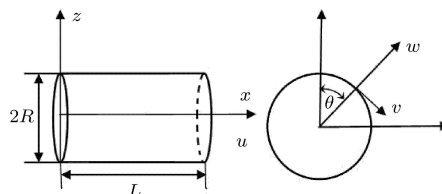


图 1 圆柱壳的几何形状及坐标

在圆柱坐标系中, 由位移与应变的几何关系可知

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2a)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2b)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (2c)$$

其中, ε_x , $\gamma_{x\theta}$ 分别表示薄壁圆柱壳的薄膜应变, ε_θ 表示薄壁圆柱壳的曲率.

为了简化问题, 利用 Brazier 简单理论, 假设薄壁圆柱壳的 $\varepsilon_\theta = 0$, 并将方程 (1a) 和 (1c) 代入方程 (2c) 中有

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} [(v_1 + w_1) \cos \theta + (2v_2 + w_2) \cos 2\theta] = 0 \quad (3)$$

由此可以得到

$$v_1 = -w_1, \quad v_2 = -\frac{w}{2} \quad (4)$$

利用 Vlasov 的半膜结构理论, 可以假设薄壁圆柱壳在轴向弯曲和扭转时没有刚性, 即

$$M_x = 0, \quad M_{x\theta} = 0 \quad (5)$$

其中, M_x 和 $M_{x\theta}$ 分别表示轴向弯矩和扭转弯矩. 式 (5) 在 Tattling 研究有限长壳体的纯弯曲问题时也有用到 [8].

由于纯弯曲的作用不会使薄壁圆柱壳产生剪切应变, 所以有

$$\frac{u_1}{R} = -\frac{dw_1}{dx} \quad (6)$$

由 Brazier 简单理论可知, 薄壁圆柱壳处在第 1 阶段的应变能与 ε_x , $\gamma_{x\theta}$ 和 ε_θ 有关, 可以表示为

$$U_1 = \frac{h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (E_x \varepsilon_x^2 + G_{x\theta} \gamma_{x\theta}^2) dx R d\theta + \frac{D_\theta}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon_\theta^2 dx R d\theta \quad (7)$$

其中, E_x 表示轴向的弹性模量, $G_{x\theta}$ 表示剪切模量, D_θ 表示单位圆周上的抗弯刚度. 将式 (2) 代入式 (7) 可得

$$U_1 = \frac{\pi h R}{2} \int_0^L \left[E_x \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + G_{x\theta} \left(\frac{2u_2}{R} + \frac{1}{2} \frac{dw_2}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{\pi R D_\theta}{2} \int_0^L \left(\frac{3w_2}{R^2} \right)^2 dx \quad (8)$$

处在第 2 阶段的薄壁圆柱壳与受到纯弯曲的梁类似, 其应变能可以表示为

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^L E_x I_{\text{壳体}} C_c^2 dx \quad (9)$$

其中, $E_x I_{\text{壳体}}$ 表示抗弯刚度, C_c 表示轴向弯曲曲率, 可以利用 $v_{1(x)}$ 或 $w_{1(x)}$ 求出

$$C_c = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2} \quad (10)$$

由于横截面为椭圆形, $I_{\text{壳体}}$ 可以进一步表示为

$$I_{\text{壳体}} = Rh \int_0^{2\pi} \left\{ \left[R + w_2 \cos 2\theta \right] \cos \theta - [v_2 \sin 2\theta] \sin \theta \right\}^2 d\theta = \pi R^3 h \left(1 + \frac{3}{2} \frac{w_2}{R} + \frac{5}{8} \frac{w_2^2}{R^2} \right) \approx \pi R^3 h \left(1 + \frac{3}{2} \frac{w_2}{R} \right) \quad (11)$$

联立式 (9), (10) 和 (11) 可得

$$U_2 = \frac{\pi R^3 h E_x}{2} \int_0^L \left(1 + \frac{3}{2} \frac{w_2}{R} \right) \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 dx \quad (12)$$

外力矩所做的功可以表示为

$$W = 2M\Omega = M \int_0^L \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) dx \quad (13)$$

其中, M 表示外力矩, Ω 表示杆端旋转角度.

综上所述, 系统的总势能可表示为

$$\Pi = U_1 + U_2 - W \quad (14)$$

2 薄壁圆柱壳屈曲的临界弯矩

利用薄壁圆柱壳的简支边界条件, 位移可按傅里叶级数展开如下

$$\frac{u_1(x)}{R} = -\frac{d}{dx} w_1(x) = \left(\frac{R}{L} \right) \left[\alpha_0 \left(1 - \frac{2x}{L} \right) - \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\alpha_p}{p\pi} \sin \frac{p\pi x}{L} \right] \quad (15a)$$

$$\frac{u_2(x)}{R} = \sum \left(\frac{R}{L} \right) \beta_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (15b)$$

$$\frac{w_2(x)}{R} = -\sum_{n=1,3}^{\infty} \delta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (15c)$$

其中, α_0 , α_p , β_m 和 δ_n 表示待定常数.

将式 (15a), (15b) 和 (15c) 代入式 (8), (12) 和 (13) 中有

$$U_1 = \frac{\pi^3 h R^5 E_x}{4L^3} \sum_{m=2,4}^{\infty} m^2 \beta_m^2 + \frac{\pi h R^3 G_{x\theta}}{L} \sum_{m=2,4}^{\infty} \beta_m^2 - \frac{\pi h R^3 G_{x\theta}}{L} \sum_{m=2,4}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \beta_m \delta_n \frac{2mn}{m^2 - n^2} + \frac{\pi^3 h R^3 G_{x\theta}}{16L} \sum_{n=1,3}^{\infty} \delta_n^2 n^2 + \frac{4L^2 G_{x\theta}}{R^2 E_x} \sum_{n=1,3}^{\infty} \delta_n^2 \quad (16a)$$

$$U_2 = \frac{2\pi R^5 h E_x \alpha_0^2}{L^3} + \frac{\pi R^5 h E_x}{4L^3} \sum_{p=2,4}^{\infty} \alpha_p^2 - \frac{6R^5 h E_x \alpha_0^2}{L^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} - \frac{6R^5 h E_x \alpha_0}{L^3} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\delta_n \alpha_p n}{n^2 - k^2} - \frac{3R^5 h E_x}{L^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{k=2,4}^{\infty} \left[\frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p+k)^2} + \frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p-k)^2} \right] \quad (16b)$$

$$W = \frac{2R\alpha_0 M}{L} \quad (16c)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\pi R^5 h E_x}{4L^3}, & B &= \sqrt{\frac{L^2 G_{x\theta}}{R^2 E_x}} \\ C &= \sqrt[4]{\frac{9L^4 D_\theta}{4hR^6 E_x}}, & D &= \frac{ML^2}{2\pi R^4 h E_x} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上式可以简化为

$$\frac{U_1}{A} = \sum_{m=2,4}^{\infty} (m\pi\beta_m)^2 + B^2 \left[\sum_{m=2,4}^{\infty} (2\beta_m)^2 + \sum_{n=1,3}^{\infty} \left(\frac{n\pi\delta_n}{2} \right)^2 \right] + 8B^2 \sum_{m=2,4}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{mn\beta_m\delta_n}{m^2 - n^2} + 4C^2 \sum_{n=1,3}^{\infty} \delta_n^2 \quad (18a)$$

$$\frac{U_2}{A} = 8\alpha_0^2 - \frac{24}{\pi} \alpha_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{n\alpha_p \delta_n}{n^2 - k^2} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{k=2,4}^{\infty} \left[\frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p+k)^2} + \frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p-k)^2} \right] - \frac{24}{\pi} \alpha_0^2 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} \quad (18b)$$

$$\frac{W}{A} = 16D\alpha_0 \quad (18c)$$

利用最小势能原理, 由式 (14) 可得

$$\alpha_0 - \frac{3}{\pi} \alpha_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} - \frac{3}{2\pi} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\alpha_p \delta_n}{n^2 - p^2} = D \quad (19a)$$

$$\alpha_p - \frac{12}{\pi} \alpha_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\delta_n}{n^2 - p^2} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=2,4}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p+k)^2} + \frac{n\alpha_p \alpha_k \delta_n}{n^2 - (p-k)^2} \right] = 0, \quad p = 2, 4, \dots \quad (19b)$$

$$\left[1 + \left(\frac{m\pi}{2B} \right)^2 \right] \beta_m - \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{mn\delta_n}{m^2 - n^2} = 0, \quad m = 2, 4, \dots \quad (19c)$$

$$\left[\left(\frac{n\pi}{4} \right)^2 + \left(\frac{C^2}{B} \right)^2 \right] \delta_n - \sum_{m=2,4}^{\infty} \frac{mn\beta_m}{m^2 - n^2} - \frac{3}{8\pi B^2} \sum_{k=2,4}^{\infty} \sum_{p=2,4}^{\infty} \left[\frac{n\alpha_p \alpha_k}{n^2 - (p+k)^2} + \frac{n\alpha_p \alpha_k}{n^2 - (p-k)^2} \right] - \frac{3}{\pi B^2} \frac{\alpha_0^2}{n} - \frac{3\alpha_0}{\pi B^2} \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{n\alpha_p}{n^2 - p^2} = 0, \quad n = 1, 3, \dots \quad (19d)$$

由于薄壁圆柱壳处于纯弯曲时, 横向弯曲变形为主要变形, 忽略非线性项的低阶小量, 式 (19) 进一步简化为

$$\alpha_0 - \frac{3}{\pi} \alpha_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} = D \quad (20a)$$

$$\alpha_p = \frac{12}{\pi} \alpha_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\delta_n}{n^2 - p^2}, \quad p = 2, 4, \dots \quad (20b)$$

$$\frac{\beta_m}{m} = \frac{(2B)^2}{(2B)^2 + (m\pi)^2} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n^2}{m^2 - n^2} \frac{\delta_n}{n}, \quad m = 2, 4, \dots \quad (20c)$$

$$\left[\left(\frac{n\pi}{4} \right)^2 + \left(\frac{C^2}{B} \right)^2 \right] \frac{\delta_n}{n} - \sum_{m=2,4}^{\infty} \frac{m^2}{m^2 - n^2} \frac{\beta_m}{m} - \frac{3}{\pi B^2} \left(\frac{\alpha_0}{n} \right)^2 - \frac{3\alpha_0}{\pi B^2} \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\alpha_p}{n^2 - p^2} = 0, \quad n = 1, 3, \dots \quad (20d)$$

将式 (19b) 和 (19c) 代入式 (19d) 中, 且由 $\alpha_0 = \Omega L/R$, 式 (19a) 和 (19d) 可简化为

$$\frac{D}{B} = \left(\frac{L\Omega}{RB} \right) \left[1 - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left(\frac{\delta_n}{n} \right) \right] \quad (21a)$$

$$\left[\left(\frac{n\pi}{4} \right)^2 + \left(\frac{C^2}{B} \right)^2 \right] \frac{\delta_n}{n} + \sum_{i=1,3} \sum_{m=2,4} \frac{m^2}{m^2 - n^2} \cdot \frac{i^2}{i^2 - m^2} \frac{(2B)^2}{(2B)^2 + (m\pi)^2} \frac{\delta_i}{i} - \frac{3}{\pi n^2} \left(\frac{L\Omega}{RB} \right)^2 - \left(\frac{6}{\pi} \right)^2 \left(\frac{L\Omega}{RB} \right)^2 \cdot \sum_{j=1,3} \sum_{p=2,4} \frac{1}{n^2 - p^2} \frac{j^2}{j^2 - p^2} \frac{\delta_j}{j} = 0, \quad n = 1, 3, \dots \quad (21b)$$

如果杆端旋转角 Ω 已知, 关于变量 δ_n 的方程 (21b) 是线性的. 因此, 给定一个杆端旋转角, 对于不同的变量 n , 方程 (21b) 可以解出不同的变量 δ_n , 然后可由方程 (21a) 直接计算出 D . 综上所述, 利用这种方法便能解决非线性问题.

对于无限长 ($C \rightarrow \infty$) 的光滑圆柱壳, 方程 (21b) 可以简化为

$$C^4 \left(\frac{\delta_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \frac{3}{\pi} \left(\frac{L\Omega}{R} \right)^2 \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (21a) 中可得

$$D_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} C^2 \quad \text{或} \quad \frac{M_{\max}}{M_0} = 0.544 \sqrt{\frac{D_\theta E_x}{D_{11} E_\theta}} \quad (23)$$

其中, $M_0 = 2\pi R(D_{11} E_\theta h)^{0.5}$ 是经典屈曲临界弯矩, D_{11} 是轴向抗弯刚度, E_θ 是圆周方向上的弹性模量. 由此可知, 正交各向异性圆柱壳的屈曲临界弯矩是经典屈曲临界弯矩的 0.544 倍.

3 薄壁圆柱壳实例分析

由于铝合金具有强度高, 塑性好, 耐蚀性等优点, 广泛应用于船舶、建材、航空等民用及军工领域, 所以本文选轧制铝合金作为研究材料. 壳体弹性模量 $E_x = 67.0 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G_{x\theta} = 26.5 \text{ GPa}$, $B = [L^2 G_{x\theta} / (R^2 E_x)]^{0.5}$ 为剪力大小参数, $C = [9L^4 D_\theta / (4hR^6 E_x)]^{0.25}$ 为壳体长度参数, $D = ML^2 / (2\pi R^4 h E_x)$ 为作用力矩参数.

为了便于比较, 无限长圆柱壳中有 (假设断裂参数等于 1)

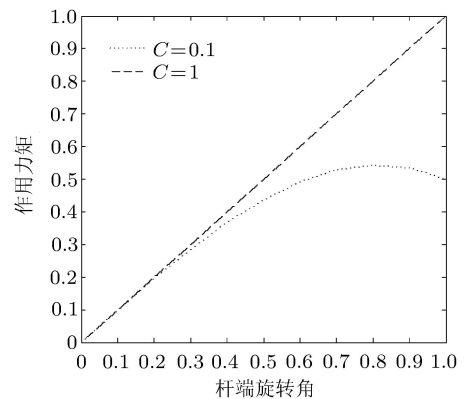
$$m = \frac{M}{2\pi R \sqrt{D_{11} E_\theta h}} = D \left(\frac{R^3}{hL^2} \right) \sqrt{\frac{h^3 E_x^2}{D_{11} E_\theta}} \quad (24a)$$

$$\phi = \left(\frac{\Omega L}{R} \right) \left(\frac{R^3}{hL^2} \right) \sqrt{\frac{h^3 E_x^2}{D_{11} E_\theta}} \quad (24b)$$

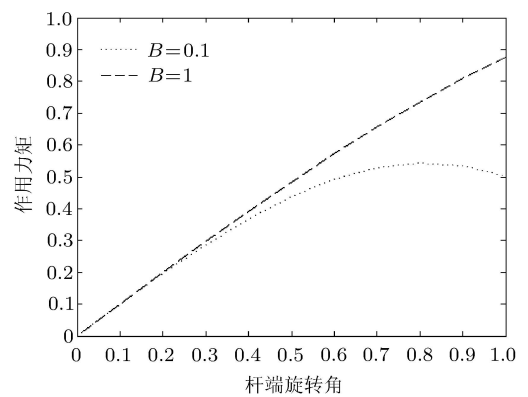
图 2(a) 是 $B = 1$ 时, 外力矩 (m) 与杆端旋转角 (ϕ) 的关系图. 由图可知, C 越小, 对应的薄壁圆柱壳越薄, 非线性效应的影响越大; 随着 C 的不断增大, 对应的薄壁圆柱壳越来越厚, 屈曲前横截面椭圆化的程度越来越小, 所以曲线近似为线性的.

图 2(b) 是 $C = 1$ 时, 外力矩 (m) 和杆端旋转角 (ϕ) 的关系图. 由图可知, 当 B 很小时, 对应的薄壁圆柱壳很短, 横截面的椭圆化十分明显, 非线性效应不可忽略; 随着 B 的不断增大, 屈曲前横截面椭圆化的程度越来越小, 曲线越来越趋近于直线.

如图 2 所示的外力矩 (m) 和杆端旋转角 (ϕ) 的关系图与 Tatting 等 [10] 的研究成果相一致.



(a)



(b)

图 2 作用力矩 (m) 和杆端旋转角 (ϕ) 关系图

4 结论

通过 Brazier 理论和 Valasov 半膜构理论可以用线性的方法来解决薄壁圆柱壳的非线性弯曲响应. 如果壳体长度参数 C 越小, 对应的圆柱壳壁越薄,

(下转第 78 页)

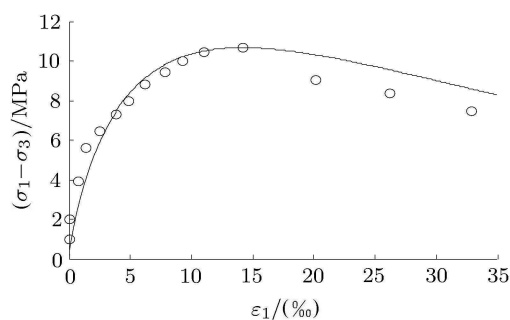
(b) $\sigma_3 = 0.78 \text{ MPa}$, $\sigma_2/\sigma_3 = 2.9$

图1 不同围压下真三轴理论模型验证曲线(续)

由图1可以看出,本文所建立的岩石损伤本构模型理论曲线与试验得到的应力应变关系比较接近,进一步验证了本构模型的合理性。

4 结论

(1) 假定岩石微元破坏服从韦布尔统计分布规律,建立了岩石损伤统计本构模型,从而在理论上考虑了中间主应力对岩石破坏强度的影响;

(2) 建立了真三轴应力状态下本构模型参数与岩石软化变形过程中应力应变曲线特征参量的理论关系,只需利用试验曲线峰值点应力应变的信息及岩石弹性模量即可确定模型参数;

(3) 通过模型验证表明,本文所建立的岩石损伤统计本构模型在真三轴受力状态下,其理论曲线与试验数据的吻合度均较好。

参考文献

- 1 苏醒春,陶连金,曹文贵. 岩石力学. 北京: 高等教育出版社, 2005
- 2 谢和平. 岩石混凝土损伤力学. 北京: 中国矿业大学出版社, 1990
- 3 徐卫亚,韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787-791
- 4 曹文贵,方祖烈,唐学军. 岩石损伤软化本构模型之研究. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 628-633
- 5 曹文贵,赵明华,刘学成. 基于 Weibull 分布的岩石损伤软化模型及其修正方法研究. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3226-3231
- 6 吴政,张承娟. 单向荷载作用下岩石损伤模型及其力学特性研究. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(1): 55-61
- 7 杨明辉,赵明华,曹文贵. 岩石损伤软化统计本构模型参数的确定方法. 水利学报, 2005, 36(3): 345-349
- 8 杨继华,刘汉东. 岩石强度和变形真三轴试验研究. 华北水利水电学院学报, 2007, 28(3): 66-68
- 9 Rajendra P, Tiwari K, Rao S. Post failure behavior of a rock mass under the influence of triaxial and true triaxial confinement. *Engineering Geology*, 2006, 84(3-4): 112-119
- 10 Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Engineering and Design*, 1984, 80(2): 233-245

(责任编辑: 刘希国)

(上接第90页)

非线性的影响越大,越大则反之. 如果壳体剪力大小参数值 B 很小,意味着边界条件对椭圆化变形没有影响. 所以 Brazier 非线性的影响很重要。

参考文献

- 1 Love AEH. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th edn). New York: Dover, 1944
- 2 Brazier LG. On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections. *Proc R Soc Ser*, 1927, 116(773): 104-114
- 3 Lakis AA, Selman A, Toledano A. Non-linear free vibration analysis of laminated orthotropic cylindrical shell. *Elsevier Science Ltd*, 1997, 40(1): 27-49
- 4 王珂晟,刘国强,朱晓莹. 含初始缺陷的加强复合材料圆柱壳的

非线性屈曲分析. 机械设计与制造社, 2004, 25(2): 63-65

- 5 陈浩然,周柏华,白瑞祥. 含多分层损伤的先进复合材料格栅加筋圆柱壳 (AGS) 的热-机耦合非线性屈曲分析. *工程力学*, 2008, 25(8): 58-63
- 6 郭胜鹏,顾红军. 轴向冲击下圆柱壳非轴对称屈曲耗能分析. *力学与实践*, 2009, 31(3): 44-47
- 7 付朝江. 圆柱壳的非线性有限元分析及其并行求解. *力学与实践*, 2011, 33(4): 8-12
- 8 龙连春,李洋,赵斌. 加筋圆柱壳屈曲与后屈曲分析. *力学与工程应用*, 2012, 31(3): 145-148
- 9 Calladine CR. *Theory of Shell Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983
- 10 Tatting BF, Gurdal Z, Vasiliev VV. The Brazier effect for finite length composite cylinders under bending. *Int J Solids Struct*, 1997, 34(12): 1419-1440

(责任编辑: 刘希国)