第 20 卷 第 2 期 宁 波 大 学 学 报（理 工 版） Vol.20 No.2
2007 年 6 月 JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY (NSEE) June 2007

文章编号:1001-5132（2007）02-0197-05

完备格上的广义 Rough 集模型

姚 刚，张小红

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：基于 way-below 关系和弱 way-below 关系，在具有逆合对应的完备格上建立了广义 Rough 上下近似算子，研究了它们的基本性质，并说明本文提出的广义 Rough 集模型是 Pawlak 标准粗糙集的推广. 同时，在 De Morgan 代数上建立了广义 Rough 上下近似算子，给出了相应的基本性质.

关键词：Rough 集；way-below 关系；弱 way-below 关系；完备格；覆盖；约简

中图分类号：O159；TP18 文献标识码：A

Pawlak 提出的 Rough 集理论为不完全和不充分信息的处理提供了有效的数学方法，已在数据挖掘、机器学习、模式识别、决策支持等诸多领域有广泛应用. 近年来，Rough 集理论研究的一个重要方向是推广经典 Rough 集模型，以便应用于更一般的情形. 目前，已在各种不同框架下建立起多种广义 Rough 集模型，比如文献[1,2]利用分子格对 Rough 集理论进行了推广，文献[3]在 Boole 代数上建立了广义 Rough 集模型等等.

另一方面，由于连续格和Domain理论在理论计算机科学中的重要作用，近年来成为一个活跃的研究方向[4,5]. way-below关系是连续格和Domain理论中的基本概念，它表达的是元素间的一种近似关系(way-below关系也被称为近似序关系(order of approximation))，这与Rough集理论中的“上下近似”有某些相近之处.

本文在文献[4]中“辅助序”概念的基础上，将上述两个方面结合起来，基于 way-below 关系及文献[7]中提出的弱 way-below 关系，在具有逆合对应的完备格上建立了 2 种广义 Rough 集模型，并研究了它们的基本性质以及与 Pawlak 标准 Rough 集模型之间的关系. 同时，在 De Morgan 代数上建立了广义 Rough 集模型，研究了相应的基本性质.

1 基于 way-below 关系 Rough 集模型

设$(L,\le)$是偏序集，$S\subseteq L$. 如果$S\ne\varnothing$，且对于 S 的任意 2 个元在 S 中均有上界(即$\forall a$，$b\in S$，有$c\in S$ 使得 $a\le c$ 且 $b\le c$)，则称 S 是 L 中的上定向集(也称为定向集，directed subset). 如果$S\ne\varnothing$，且对于 S 中的任意 2 个元在 S 中均有下界(即$\forall a$，$b\in S$，有$c\in S$，使得 $c\le a$ 且 $c\le b$)，则称 S 是 L 中的下定向集(也称为余定向集，co-directed subset).

设$(L,\le)$是偏序集，如果 L 的任意定向集 S，其上确界$\vee S(\in L)$均存在，则称偏序集$(L,\le)$有定向并. 对偶地，可定义定向交的概念.

收稿日期：2006-10-06. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：浙江省自然科学基金（Y605389）；宁波市青年基金（2005A620032）.
作者简介：姚 刚（1981－），男，浙江湖州人，在读硕士研究生，主要研究方向：代数学及 Rough 集理论. E-mail: yaog1981@163.com

定义 1[4,5] 设(L，≤)是有定向并的偏序集，则 L 上的way-below关系<<定义：$\forall a, b \in L, a << b \Leftrightarrow$ 对满足$b \le \vee S$ 的任意定向集S，存在 $s \in S$ 使$a \le s$.

定义 2 设(L，≤)是完备格，0，1 是其最小元和最大元.如果满足：$\vee\{c \mid c \in C\}=1$，L 的非空子集 C 称为是一个覆盖.

对于(L，≤)是偏序集，一元运算$'$：$L \to L$ 称为 L 上的逆合对应，则(1) $\forall x, y \in L, x \le y \Rightarrow y' \le x'$；(2) $\forall x \in L, x'' = x$.

定义 3 设(L，≤)是具有逆合对应“$'$”的完备格，C 是 L 的 1 个覆盖，<<是 L 上的 way-below 关系. 对于任意 $x \in L$，定义如下算子：

$$C_{\_}(x) = \vee\{c \in C \mid c << x\}, C^{-}(x) = (C_{\_}(x'))',$$

分别称为 L 上的广义 Rough 下、上近似.

引理 1[8] 设(L，≤)是完备格，0，1 是其最小元和最大元. 则

(1) $\forall a$，$b \in L$，$a << b \Rightarrow a \le b$；

(2) $\forall a \in L \Rightarrow 0 << a$；

(3) $\forall a$，b，c，$d \in L$，$a \le b << c \le d \Rightarrow a << d$；

(4) $\forall a$，b，$c \in L$，$a << b$，$b << c \Rightarrow a << c$；

(5) $\forall a$，$b \in L$，$a << b$，$b << a \Rightarrow a = b$；

(6) $\forall a$，b，$c \in L$，$a << c$，$b << c \Rightarrow a \vee b << c$.

定理 1 设(L，≤)是具有逆合对应“$'$”的完备格，0,1是其最小元、最大元，C 是 L 的 1 个覆盖，<<是 L 上 way-below 关系. 则($\forall x$，$y \in L$). (1)$x \le y \Leftrightarrow C_{\_}(x) \le C_{\_}(y), C^{-}(x) \le C^{-}(y)$；(2)$C^{-}(x) \vee C^{-}(y) \le C^{-}(x \vee y)$；(3) $C_{\_}(x \wedge y) \le C_{\_}(x) \wedge C_{\_}(y)$；(4)$C_{\_}(x) = (C^{-}(x'))'$.

证明 (1) $\forall x$，$y \in L$，若$x \le y$，$c \in C$，则$c << x \Rightarrow c \le c << x \le y \Rightarrow c << y$(应用定理 1(3))，于是$\{c \mid c << x\} \subseteq \{c \mid c << y\}$，进而有$C_{_}(x) = \vee\{c \mid c << x\} \le \vee\{c \mid c << y\} = C_{_}(y)$. 即$C_{_}(x) \le C_{_}(y)$.

若$x \le y$，则$y' \le x'$，从而由刚刚证明的结论得$C_{_}(y') \le C_{_}(x')$，进而$(C_{_}(x'))' \le (C_{_}(y'))$，即$x \le y \Rightarrow C^{-}(x) \le C^{-}(y)$.

(2) $\forall x$，$y \in L$，由 $x \le x \vee y$，$y \le x \vee y$，应用(1)得 $C^{-}(x) \le C^{-}(x \vee y), C^{-}(y) \le C^{-}(x \vee y)$. 故$C^{-}(x) \vee C^{-}(y) \le C^{-}(x \vee y)$.

(3) $\forall x$，$y \in L$，$x \wedge y \le x$，$x \wedge y \le y$，应用(1)得$C_{_}(x \wedge y) \le C_{_}(x), C_{_}(x \wedge y) \le C_{_}(y)$. 故$C_{_}(x \wedge y) \le C_{_}(x) \wedge C_{_}(y)$.

(4) 对任意 $x, y \in L$，$(C^{-}(x'))' = ((C_{\_}(x''))')' = C_{\_}(x)$.

2 弱 way-below 关系

引理 2[4] 设(L，≤)是完备格，$S \subseteq L, S \ne \varnothing$. 如果$S$对$L$中任意交(任意并)封闭，则按$L$中的偏序关系$S$是完备格.

注：上述引理的成立是有相应的前提条件的，文献[4]中的“任意交”或“任意并”中的“任意”是包括空集在内的. 由于$\vee\varnothing = 0, \wedge\varnothing = 1$，因此文献[4]中的“格”实际上是通常的“有界格”. 需要特别说明的是，本文所指的“任意”交(并)中的“任意”不包括空集！同时，依据通常的习惯，约定$\vee\varnothing = 0, \wedge\varnothing = 1$.

定义 4[7] 设(L，≤)是完备格，则L上的弱way-below关系<<<定义为：$\forall a$，$b \in L$，$a <<< b \Leftrightarrow$ 对满足$b \le \vee S$的任意可数多个元都有上界的非空子集S，存在$s \in S$，使得$a \le s$.

注：(1) 对于偏序集(L，≤)来说，任意可数多个元都有上界的非空子集必定是定向集. 所以，$\forall a$，$b \in L$，$a << b \Rightarrow a <<< b$. (2) 为叙述方便，简称“任意可数多个元都有上界”为“任意可数并封闭”，即定义 4 可改为：

$\forall a$，$b \in L$，$a <<< b \Leftrightarrow$ 对满足 $b \le \vee S$ 的任意可数并封闭的非空子集 S，存在 $s \in S$，使得 $a \le s$.

定理 2 设(L，≤)是完备格，0,1是其最小元和最大元. 则

(1) $\forall a, b \in L$，$a <<< b \Rightarrow a \le b$；

(2) $\forall a \in L \Rightarrow 0 <<< a$；

(3) $\forall a, b, c, d \in L$，$a \le b <<< c \le d \Rightarrow a <<< d$；

(4) $\forall a, b, c, \in L$，$a <<< b, b <<< c \Rightarrow a <<< c$；

(5) $\forall a,b\in L$，$a<<<b, b<<<a \Rightarrow a=b$；

(6) $\forall a_i$，$b\in L(i\in N)$，$a_i<<<b \Rightarrow \vee\{a_i|i\in N\}<<<b$；

(7) $\forall a,b,c,\in L$，$a\vee b<<<c \Rightarrow a<<<c$，$b<<<c$；

(8) $\forall a,b,c,\in L$，$a<<<b\wedge c \Rightarrow a<<<b$，$a<<<c$.

证明　(1) 设 $a<<<b$，则 $b\leq\vee S$，这里 $S=\{b\}$. 显然，S 关于任意可数并封闭，则由定义 4，存在 $s\in S$，使得 $a\leq s$. 由于 S 为单点集，所以 $a\leq b$.

(2) 由于对任意 $s\in S$，$0\leq s$. 故，$0<<<a\ (\forall a\in L)$.

(3) 设 $a\leq b<<<c\leq d$，S 是 L 满足 $d\leq\vee S$ 的关于任意可数并封闭的非空子集. 则由 $c\leq d$ 及 $d\leq\vee S$，得 $c\leq\vee S$，据此以及 $b<<<c$ 知，存在 $s\in S$ 使得 $b\leq s$. 又 $a\leq b$. 故 $a\leq s$，于是由定义 3.2 得 $a<<<d$.

(4) 设 $a<<<b$，$b<<<c$，S 是 L 的满足 $c\leq\vee S$ 的关于任意可数并封闭的非空子集. 则由 $b<<<c$ 知，存在 $s\in S$，使得 $b\leq s$. 而由 $a<<<b$，应用(1)得 $a\leq b$. 所以 $a\leq s$，于是由定义 4 得 $a<<<c$.

(5) 设 $a<<<b$，$b<<<a$. 则由(1)得 $a\leq b$，$b\leq a$. 所以 $a=b$.

(6) 对任意 $i\in I$，$a_i<<<b$. 对于满足 $b\leq\vee S$ 的关于任意可数并封闭的非空子集 S，由 $a_i<<<b\ (\forall i\in N)$ 知：存在 $s_i\in S$，使得 $a_i\leq s_i(i\in N)$. 则 $\vee\{a_i\mid i\in N\}\leq\vee\{s_i\mid i\in N\}$. 由于 S 关于任意可数并封闭，故 $\vee\{s_i\mid i\in N\}\in S$. 记 $s=\vee\{s_i\mid i\in N\}$，则 $\vee\{a_i\mid i\in N\}\leq s$，$s\in S$. 这说明 $\vee\{a_i\mid i\in N\}<<<b$.

(7) $\forall a,b,c\in L$，若 $a\vee b<<<c$，则 $a\leq a\vee b<<<c\leq c$，$b\leq a\vee b<<<c\leq c$. 应用(3)得 $a<<<c$，$b<<<c$.

(8) $\forall a,b,c\in L$，，若 $a<<<b\wedge c$，则 $a\leq a<<<b\wedge c\leq b$，$a\leq a<<<b\wedge c\leq c$. 应用(3)得 $a<<<b$，$a<<<c$.

注：上述定理中的(L，$\leq$)是有限完备格，则 $\forall a\in L\Rightarrow a<<<1$. 事实上，$\forall a\in L$，对满足 $1\leq\vee S$ 的关于任意可数并封闭的非空子集 S，显然有 $\vee S=1$. 因 $S\neq\varnothing$ 且有限，故存在 $1\in S$，从而 $a\leq 1$，故 $a<<<1$.

3　完备格上的广义 Rough 算子

定义 5　设(L，$\leq$)是完备格，$0,1$ 是其最小元和最大元. L 的非空子集 C 称为是一个可数覆盖，如果满足：(1) $\vee\{c\mid c\in C\}=1$；(2) C 是可数集，即 $C=\{c_j\mid c_j\in C, i\in N\}$.

定义 6　设(L，$\leq$)是具有逆合对应“ ′ ”的完备格，C 是 L 的一个可数覆盖，$<<<$是 L 上的弱 way-below 关系. 对任意 $x\in L$，定义算子如下：

$$C_-(x)=\vee\{c_i\in C|\ c_i<<<x, i\in N\},\ C^-(x)=(C_-(x'))'.$$

分别称为 x 的关于覆盖 C 的下近似和上近似.

定理 3　设(L，$\leq$)是完备格，$0,1$ 是其最小元和最大元，C 是 L 的一个可数覆盖，$<<<$是 L 上的弱 way-below 关系. 则

(1) $\forall x\in L$，$C_-(x)\leq x\leq C^-(x)$；

(2) $\forall x,y\in L, x\leq y\Rightarrow C_-(x)\leq C_-(y), C_-(x)\leq C^-(y)$；

(3) $\forall x\in L$，$C^-(C_-(x))\leq C^-(x)$，$C_-(x)\leq C_-(C^-(x))$；

(4) $\forall x\in L$，$x<<<y\Rightarrow C_-(x)<<<y$，$x<<<C^-(y)$；

(5) $\forall x$，$y\in L$，$C^-(x)\vee C^-(y)\leq C^-(x\vee y)$；

(6) $\forall x$，$y\in L$，$C_-(x\wedge y)\leq C_-(x)\wedge C_-(y)$；

(7) $\forall x\in L$，$C_-(x)=(C^-(x'))'$.

证明　(1) $\forall x\in L$，根据定义 6，并应用定理 2(6)得 $C_-(x)=\vee\{c_i\in C|c_i<<<x,\ i\in N\}<<<x$. 再应用定理 2(1)得 $C_-(x)=\vee\{c_i\in C\mid c_i<<<x,\ i\in N\}\leq x$. 进而有 $C_-(x')\leq x'$，$x''\leq(C_-(x'))'=C^-(x)$. 即 $x\leq C^-(x)$.

(2) $\forall x,y\in L$，若 $x\leq y$，则 $c<<<x\Rightarrow c\leq c<<<x\leq y\Rightarrow c<<<y$，则 $\{c_i\in C\mid c_i<<<x, i\in N\}\subseteq\{c_i\in C|c_i<<<y, i\in N\}$，进而有 $C_-(x)=\vee\{c_i\in C|c_i<<<x,\ i\in N\}\leq\vee\{c_i\in C|c_i<<<y,\ i\in N\}=C_-(y)$. 即 $x\leq y\Rightarrow C_-(x)\leq C_-(y)$.

若 $x\leq y$，则 $y'\leq x'$. 从而由刚刚证明的结论得 $C_-(y')\leq C_-(x')$，进而 $(C_-(x'))'\leq(C_-(y'))'$，即 $x\leq y\Rightarrow C^-(x)\leq C^-(y)$.

(3) 由(1)，(2)即得 $C^-(C_-(x))\leq C^-(x)$，$C_-(x)\leq C_-(C^-(x))$.

(4) $\forall x$，$y\in L$，若 $x<<<y$，则由(1)得 $C_-(x)\leq x$. 于是 $C_-(x)\leq x<<<y\leq y$. 应用定理 2(3)可得 $C_-(x)<<<y$. 类似地，若 $x<<<y$，则由(1)得 $y\leq C^-(y)$. 于是 $x\leq x<<<y\leq C^-(y)$. 应用定理 2(3)即得 $x<<<C^-(y)$.

(5)，(6)和(7)的证明略去.

注 上述定理中$(L, \le)$是有限完备格，则$C_{-}(1)=1$，$C^{-}(0)=0$. 事实上根据定义 5 及定义 6，并应用定理 2(2)以及其注可得：

$C_{-}(1)=\vee\{c\in C \mid c<<<1\}=\vee\{c \mid c\in C\}=1$. $C^{-}(0)=(C_{-}(0'))'=(C_{-}(1))'=1'=0$

例 1 设U为有限论域，令L是U的幂集，L上的序关系即为通常的集合包含关系，$'$为 2^U上的求补集运算. 则$(2^U, \subseteq, ', U, \varnothing)$是一个具有逆合对应的完备格，易于验证$L$上的弱way-below关系与序关系一致，即

$\forall A, B\in L$，$A<<<B$ 当且仅当 $A\subseteq B$.

事实上，由定理 2(1)知 $A<<<B \Rightarrow A\subseteq B$. 同时，设 $A\subseteq B$ 且 S 是 L 的满足 $B\subseteq\vee S$ 的任意可数并封闭的非空子集(族)，注意到 U 为有限论域且 S 对可数并封闭，故$\vee S=\cup\{S \mid S\in S\}\in S$，从而$A\subseteq B\subseteq\vee S\in S$，由定义 4 知 $A<<<B$.

这样，定义 5 中的可数覆盖正是通常等价“ 划分 ”的推广，定义 6 中的上下近似算子正是 Pawlak 标准粗糙集的推广(覆盖型).

4 De Morgan 代数上的广义 Rough 集

定义 7[10] 一个$(2,2,1,0,0)$型代数$(L,\wedge,\vee,',0,1)$满足：

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$是 1 个有界分配格，而$0,1$分别是最小元和最大元；

(2) $':L\to L$ 是 1 个一元运算且满足下列等式：

$(x\wedge y)'=x'\vee y', (x\vee y)'=x'\wedge y', x''=x$,

则$(L,\wedge,\vee,',0,1)$称为 De Morgan 代数.

容易验证，在 De Morgan 代数中成立：$0'=1$, $1'=0$.

定义 8 设$(L,\wedge,\vee,',0,1)$是 De Morgan 代数，$0,1$是其最小元、最大元. L 的非空子集 C 称为是一个覆盖，如果满足$\vee\{c \mid c\in C\}=1$.

定义 9 设$(L,\wedge,\vee,',0,1)$是 De Morgan 代数，C 是 L 的一个有限覆盖(有限元构成的)，对于任意$x\in L$，定义如下算子：

$C_{-}(x)=\vee\{c\le x \mid c\in C, C^{-}(x)=(C_{-}(x'))'$，

分别称为 De Morgan 代数 L 上的广义 Rough 下、上近似.

定理 4 设$(L,\wedge,\vee,',0,1)$是 De Morgan 代数，$0,1$是其最小元和最大元，C 是 L 的一个有限覆盖. 则

(1) $C_{-}(1)=1, C^{-}(0)=0$；；

(2) $\forall x\in L, C_{-}(x)\le x\le C^{-}(x)$；

(3) $\forall x\in C, C_{-}(x)=x$；

(4) $\forall x,y\in L, x\le y\Rightarrow C_{-}(x)\le C_{-}(y), C_{-}(x)\le C^{-}(y)$；

(5) $\forall x\in L, C^{-}(C_{-}(x))\le C^{-}(x), C_{-}(x)\le C_{-}(C^{-}(x))$；

(6) $\forall x,y\in L, C^{-}(x)\vee C^{-}(y)\le C^{-}(x\vee y)$；

(7) $\forall x,y\in L, C_{-}(x\wedge y)\le C_{-}(x)\wedge C_{-}(y)$；

(8) $\forall x\in L, C_{-}(x)=(C^{-}(x'))'$.

证明 略.

以下给出 De Morgan 代数上有限覆盖的约简的相关结论，但省略其证明，相关概念沿用文献[11]，并将覆盖 C 的约简记为 *reduct*(C).

定理 5 设 C 是 De Morgan 代数 L 的有限覆盖，则 C 和 reduct(C)生成相同的上下近似运算.

定理 6 如果 De Morgan 代数 L 的两个约简的有限覆盖生成相同的下近似运算，则这两个约简的有限覆盖是相同的.

定理 7 设C_1, C_2是De Morgan代数L的两个覆盖，C_1, C_2生成相同的有限覆盖下近似当且仅当 reduct(C_1) = reduct(C_2).

5 结语

利用way-below和弱way-below关系，本文在有逆合对应的完备格上定义了广义Rough算子$C_{-}(x)$，$C^{-}(x)$；同时，借鉴文献[2]中的方法，在De Morgan

代数上定义了广义Rough算子$C_{-}(x)$，$C^{-}(x)$，它们具有标准Rough近似算子的大部分性质. 此外，需要说明以下几点：

(1) 已在各种不同框架下建立起多种广义 Rough 集模型，比如文献[1-3]. 这些模型要么基于覆盖，要么基于一般关系；要么使用公理化方法，要么使用构造性方法. 本文提出的广义 Rough 集模型是基于对偶覆盖的.

(2) 文献[6] 3.3 节中通过辅助序来拓展粗糙集理论，这对本文第一及第三节的形成有直接的促进作用. 但文献[6]中 3.3 节的相关内容与本文第一及第三节有诸多不同之处：前者建立在分子格之上且辅助序是抽象的，而本文第一及第三节是建立在完备格上的(不要求分配律成立)，且用具体的 way-below 关系和弱 way-below 关系代替辅助序. 同时，文献[6]中并未涉及到覆盖，而本文要求完备格上带有逆合对应.

(3) 本文第四节在 De Morgan 代数上定义的广义 Rough 集模型较文献[3]中的定义更广泛，且具有较好的性质，关于其进一步的讨论将另文发表.

参考文献：

[1] 代建华. 利用分子格对粗糙集理论进行推广[J]. 计算机学报, 2004, 27(10):1 436-1 440.

[2] 裴道武，傅丽. 两类广义粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 17(3):281-285.

[3] Guilin Qi, Weiru Liu. Rough operations on Boolean algebras[J]. Information Sciences, 2005, 173:49-63.

[4] 郑崇友，樊磊，崔宏斌. FRAME 与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 1994.

[5] Gierz G. Continuous lattices and domains[M]. London: Cambridge University Press, 2003.

[6] 代建华. 粗糙集理论及其在知识发现中的应用研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2003.

[7] 周武能. 弱连续格及其性质[J]. 荆州师范学院学报: 自然科学版, 2000, 23(2):1-3.

[8] Grzegorz Bancerek. The “Way-Below” Relation[J]. Journal of formalized mathematics, 2000, 8:1-7.

[9] 张文修，姚一豫，梁怡. 粗糙集与概念格[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.

[10] 罗从文. De Morgan 代数[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2005.

[11] 祝峰，王飞跃. 关于覆盖广义粗集的一些结果[J]. 模式识别与人工智能, 2002, 15(1):6-13.

Generalized Rough Set Model on Complete Lattices

YAO Gang, ZHANG Xiao-hong

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Based on way-below relation and weak way-below relation, two kinds of generalized rough set models are established over complete lattice with order-reversing involution mapping. Some properties of new rough operators are given, and the relationship between the generalized rough set model and Pawlak’s standard rough set model is discussed. Furthermore, a kind of dual generalized rough set model is established over De Morgan algebraic, their properties are also presented in this paper.

Key words: Rough set; way-below relation; weak way-below relation; complete lattice; covering; reduction

CLC number: O159; TP18　　**Document code:** A

（责任编辑　章践立）