文章编号:1001-5132（2008）04-0514-06

渐近半压缩映象的收敛性定理

胡良根

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：在任意的赋范线性空间中，通过使用新的分析技巧研究了渐近伪压缩映象和渐近半压缩映象带误差的三步迭代序列的几个强收敛性定理. 文中不仅包括了修正的带误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列的收敛性结果作为 2 种特殊情况，同时证明了序列收敛的充分必要条件，且证明方法更为简单.

关键词：渐近伪压缩和半压缩映象；带误差的三步迭代；带误差的修正的 Mann 和 Ishikawa 迭代；充分必要条件；赋范线性空间

中图分类号：O177.91 文献标识码：A

近年来，在 Hilbert 空间和 Banach 空间中，不少学者使用 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代求解非线性算子方程和变分不等式解等方面作了许多尝试. 1989 年，Glowinski 等人[1]引入了 $\theta-$原则通过使用拉格朗日乘法寻找 2 个(或更多个)极大单调算子之和的零点. 三步迭代类似于 $\theta-$原则，他们使用三步迭代序列解决弹塑性问题，液晶体理论和工程价值计算，并证明了三步迭代序列逼近比一步和两步迭代序列更有效. 1998 年，Haubruge 等人[2]应用文献[1]的三步迭代获得了新的分裂算法求解变分不等式、可分离凸规则和凸泛函的最小值问题，他们也证明了三步迭代序列在适当的条件下更有效. 2000 年，Noor[3,4]在 Hilbert 空间中引入和分析了三步迭代序列，并研究了变分包含(变分不等式)的逼近值. 2002 年，Xu 等[5]在一致凸的 Banach 空间中提出和分析了渐进非膨胀映象三步迭代的不动点逼近问题.

本文提出带误差的三步迭代，通过新的分析技巧，在任意的实赋范线性空间中分析和研究了渐近伪压缩映象和渐近半压缩映象带误差的三步迭代序列的收敛性问题；同时证明了在任意赋范线性空间中严格渐近伪压缩映象是一致 $L-$lipschitzian 的映象. 文中的结果不仅包括了把修正的带误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列的收敛性问题作为特殊情况，而且给出了收敛问题的一个充分必要条件. 本文的结果改进、推广和统一了相关的结果.

在 Noor 及 Xu 等所定义的基础上，引入如下带误差的三步迭代：

(P) 设 $K\subset X$ 中的非空闭凸子集，映象 $T:K\to K$，任取 $x_1\in K, K$ 中的序列 $\{x_n\}$ 定义为：

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} z_n = a_n'' x_n + b_n'' T^n x_n + c_n'' w_n, \\ y_n = a_n' x_n + b_n' T^n z_n + c_n' v_n, \quad \forall n\ge 1, \\ x_{n+1} = a_n x_n + b_n T^n y_n + c_n u_n, \end{cases}$$

其中 $\{u_n\},\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 是 K 中的有界序列，$\{a_n\},\{b_n\}$,

收稿日期：2007-10-03. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金（60872095）；浙江省教育厅科研项目（20051778）；宁波市自然科学基金（2008A610018）.
作者简介：胡良根（1977－），男，江西临川人，在读博士研究生/讲师，主要研究方向：应用泛函分析与微分方程. E-mail: huliànggen@nbu.edu.cn

$\{c_n\},\{a_n'\},\{b_n'\},\{c_n'\},\{a_n''\},\{b_n''\}$ 和 $\{c_n''\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列，满足条件：$a_n+b_n+c_n=a_n'+b_n'+c_n'=a_n''+b_n''+c_n''=1$，则称(I)为带误差的三步迭代.

(Q) 在(I)中，如对任意的 $n\ge 1$，有 $a_n''\equiv 1, b_n''\equiv 0$ 和 $c_n''\equiv 0$，则(I)成为修正的带误差的 Ishikawa 迭代序列，即任取 $x_1\in K$，序列 $\{x_n\}$ 定义为：

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} y_n=a_n'x_n+b_n'T^nx_n+c_n'v_n, \\ x_{n+1}=a_nx_n+b_nT^ny_n+c_nu_n, \end{cases} \quad \forall n\ge 1,$$

其中 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 K 中的 2 个有界序列，$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{a_n'\},\{b_n'\}$ 和 $\{c_n'\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列，满足条件：$a_n+b_n+c_n=a_n'+b_n'+c_n'=1$.

(R) 在(I)中，如果对任意的 $n\ge 1$，有 $a_n''\equiv a_n'\equiv 1, b_n''\equiv b_n'\equiv 0$ 和 $c_n''\equiv c_n'\equiv 0$，则(I)成为修正的带误差的 Mann 迭代序列，即任取 $x_1\in K$，序列 $\{x_n\}$ 定义为：

$$\text{(III)}\quad x_{n+1}=a_nx_n+b_nT^nx_n+c_nu_n, \forall n\ge 1,$$

其中 $\{u_n\}$ 是 K 中的有界序列；$\{a_n\},\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列，满足条件：$a_n+b_n+c_n=1$.

1　预备知识

设 X 是任意的实赋范线性空间，$K\subset X$ 中的非空子集，X^* 为其对偶空间. 设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 和 X^* 的对偶对. 映射 $J:X\to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映射，如果对任意的 $x\in X$，有 $J(x)=\{f\in X^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|, \|f\|=\|x\|\}$.

设映象 $T:K\to K$ 为严格渐近伪压缩映象[6,7]，如果存在序列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，对任意的 $x,y\in K$ 和 $n\ge 1$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和常数 $k\in[0,1)$，使得：

$$\langle (I-T^n)x-(I-T^n)y, j(x-y)\rangle \ge (1-k)\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|^2/2-(k_n^2-1)\|x-y\|^2/2. \tag{1}$$

T 称为渐近半压缩映象，如果序列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，不动点集 $F(T)=\{x\in K:Tx=x\}\ne\Phi$，对任意 $x\in K, x^*\in F(T)$ 和 $n\ge 1$，存在 $j(x-x^*)\in J(x-x^*)$ 和常数 $k\in[0,1)$，使得：

$$\langle x-T^nx, j(x-x^*)\rangle \ge (1-k)\|x-T^nx\|^2/2-(k_n^2-1)\|x-x^*\|^2/2. \tag{2}$$

T 称为 $L-$lipschitzian 的，如果对任意的 $x,y\in K$ 及 $n\ge 1$，有 $\|T^nx-T^ny\|\le L\|x-y\|$，其中 $L>1$ 是常数. 显然具有非空不动点集的严格渐近伪压缩映象是渐近半压缩映象. 映象 $T:K\to K$ 称为半紧的，如果对 K 中的任意有界序列 $\{x_n\}$ 及 $\|x_n-Tx_n\|\to 0(n\to\infty)$，则存在一子序列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$，使得 $x_{n_i}\to x^*\in K(n_i\to\infty)$ [8].

引理 **1**[9] 设 3 个非负实数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$ 满足：$\alpha_{n+1}\le(1+\beta_n)\alpha_n+\gamma_n, \forall n\ge 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n<+\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在.

引理 **2** 设 X 是实赋范线性空间，$T:K\to K$ 是严格渐近伪压缩映象，序列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$. 则对任意的 $x,y\in K$ 和 $n\ge 1$，有：

$$\|T^nx-T^ny\|\le(k_n^2+2+2k/(1-k))\|x-y\|.$$

证明　因为 T 是严格渐近伪压缩映象，由(1)式可得：

$$2\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|\cdot\|x-y\|\ge(1-k)\cdot\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|^2-(k_n^2-1)\|x-y\|^2,$$

即

$$(1-k)\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|^2-2\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|\cdot\|x-y\|-(k_n^2-1)\|x-y\|^2\le 0.$$

因为满足不等式的 T 存在，由不等式的解：

$$\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|\le\frac{1+1+(1-k)(k_n^2-1)}{1-k}\cdot\|x-y\|=(k_n^2+1+2k/(1-k))\|x-y\|,$$

从而

$$\|T^nx-T^ny\|\le\|(I-T^n)x-(I-T^n)y\|+\|x-y\|\le(k_n^2+2+2k/(1-k))\|x-y\|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，则可知 T 是一致 $L-$lipschitzian 的. 证毕.

注 1 Osilike[7]在 Hibert 空间中证明了严格渐进伪压缩映象为 $L-$lipschitzian 的，引理 2 在任意的赋范线性空间中证明了同样的结果.

2 主要结果

引理 **3** 设 X 是任意的实赋范线性空间，$K\subset X$ 中的非空闭凸子集. 设 $T:K\to K$ 是一致 $L-$lipschitzian 的渐近半压缩映象，序列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$. 对任意的 $x_1\in K$，由(I)定义的序列 $\{x_n\}$ 满足下列条件：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2<+\infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nb_n^{'}<+\infty,$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty$，

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n^{'})^2<+\infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^{'}c_n^{''}<+\infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^{'}b_n^{''}<+\infty,$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^{'}<+\infty$，

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(k_n^2-1)<+\infty,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^{'}(k_n^2-1)<+\infty$；

则有：(A)对任意的 $q\in F(T)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ 存在；(B) $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,F(T))$ 存在，其中 $d(x_n,F(T))=\inf_{q\in F(T)}\|x_n-q\|$；(C) $\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$.

证明 (A)迭代序列(I)的等价形式为：

$$(\mathrm{I}')\begin{cases}z_n=(1-b_n^{''})x_n+b_n^{''}T^nx_n+c_n^{''}(w_n-x_n),\\ y_n=(1-b_n^{'})x_n+b_n^{'}T^nz_n+c_n^{'}(v_n-x_n),\ \forall n\geq 1,\\ x_{n+1}=(1-b_n)x_n+b_nT^ny_n+c_n(u_n-x_n).\end{cases}$$

对任意的 $q\in F(T)$，取 $M>0$，使得：

$$M=\max\{\sup_{n\to\infty}\{\|u_n-q\|\},\sup_{n\to\infty}\{\|v_n-q\|\},\sup_{n\to\infty}\{\|w_n-q\|\}\}.$$

由(I')，可得：

$$\|z_n-q\|\leq\|x_n-q\|+b_n^{''}\|T^nx_n-q\|+c_n^{''}\|w_n-q\|\leq(1+L)\|x_n-q\|+c_n^{''}M, \tag{3}$$

$$\|T^nz_n-x_n\|\leq L\|z_n-q\|+\|x_n-q\|\leq L_1\|x_n-q\|+c_n^{''}ML, \tag{4}$$

其中 $L_1=1+L(1+L)$. 又

$$\|y_n-z_n\|\leq\|z_n-x_n\|+b_n^{'}\|T^nz_n-z_n\|+c_n^{'}[\|v_n-q\|+\|z_n-q\|]\leq[b_n^{''}(1+L)+c_n^{''}+b_n^{'}(1+L)^2+c_n^{'}(1+L)]\|x_n-q\|+b_n^{'}c_n^{''}M(1+L)+(c_n^{'}+c_n^{''}+c_n^{'}c_n^{''})M. \tag{5}$$

$$\|y_n-x_n\|\leq(b_n^{'}L_1+c_n^{'})\|x_n-q\|+c_n^{'}M+b_n^{'}c_n^{''}ML. \tag{6}$$

因为对任意的实数 a,b，不等式 $a\leq 1+a^2$ 和 $2ab\leq a^2+b^2$ 恒成立，从而由(I')可得：

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^2\leq&\|x_n-q\|\cdot\|y_n-q\|+b_n^{'}\langle T^nz_n-x_n,j(y_n-q)\rangle+c_n^{'}\langle v_n-x_n,j(y_n-q)\rangle\leq\\&\|x_n-q\|^2/2+\|y_n-q\|^2/2-b_n^{'}(1-k)\cdot\|y_n-T^ny_n\|^2/2+b_n^{'}(k_n^2-1)\|y_n-q\|^2/2+\\&b_n^{'}(\|y_n-x_n\|+L\|y_n-z_n\|)\|y_n-q\|+c_n^{'}M+c_n^{'}M\|y_n-q\|^2+c_n^{'}\|x_n-q\|^2/2+\\&c_n^{'}\|y_n-q\|^2/2.\end{aligned} \tag{7}$$

将(5)式，(6)式代入(7)式，整理可得：

$$(1-A_n)\|y_n-q\|^2\leq(1+B_n)\|x_n-q\|^2+E_n^{'}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}A_n=&b_n^{'}(k_n^2-1)+c_n^{'}(2M+1)+(b_n^{'})^2L_1+b_n^{'}c_n^{'}+2b_n^{'}c_n^{'}M+2(b_n^{'})^2c_n^{''}ML+b_n^{'}b_n^{''}L(1+L)+b_n^{'}\cdot\\&c_n^{''}L+(b_n^{'})^2L(1+L)+b_n^{'}c_n^{'}L(1+L)+2(b_n^{'})^2\cdot c_n^{''}ML(1+L)+2b_n^{'}(c_n^{'}c_n^{''}+c_n^{'}+c_n^{''})ML,\end{aligned}$$

$$B_n=c_n^{'}+(b_n^{'})^2L_1+b_n^{'}c_n^{'}+b_n^{'}b_n^{''}L(1+L)+b_n^{'}c_n^{''}L+(b_n^{'})^2L(1+L)^2+b_n^{'}c_n^{'}L(1+L),$$

$$E_n^{'}=2[c_n^{'}M+b_n^{'}c_n^{'}M+(b_n^{'})^2c_n^{''}ML+(b_n^{'})^2c_n^{''}M\cdot L(1+L)+b_n^{'}ML+b_n^{'}(c_n^{'}+c_n^{''})ML].$$

由条件(ii)和(iii)得 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n<+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}B_n<+\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}E_n^{'}<+\infty$，显然可知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$. 则存在 $N_1\in\aleph$，使得对任意的 $n\geq N_1$，有 $A_n<1/2$，从而 $1\leq 1/(1-A_n)<2$. 由(8)式，对任意的 $n\geq N_1$，有：

$$\|y_n-q\|^2\leq\frac{1+B_n}{1-A_n}\|x_n-q\|^2+\frac{E_n^{'}}{1-A_n}\leq(1+\frac{A_n+B_n}{1-A_n})\|x_n-q\|^2+2E_n^{'},$$

则

$$\|y_n-q\|\leq(1+D_n)\|x_n-q\|+E_n, \tag{9}$$

其中 $D_n=\sqrt{(A_n+B_n)/(1-A_n)},E_n=\sqrt{2E_n^{'}}$. 由迭代($\mathrm{I}'$)，(6)式和(9)式，可得：

$$\|x_{n+1}-y_n\|\leq\|y_n-x_n\|+b_n(\|T^ny_n-q\|+\|y_n-q\|)+c_n[\|u_n-q\|+\|y_n-q\|]=$$

$$\{b_n' L_1 + c_n' + [b_n(1+L)+c_n](1+D_n)\}\cdot \|x_n-q\| + b_n' c_n'' ML + c_n' M + [b_n(1+L)+c_n]E_n + c_n M, \tag{10}$$

$$\|x_{n+1}-x_n\| \le [b_n L(1+D_n)+b_n+c_n]\|x_n-q\| + c_n M + b_n L E_n. \tag{11}$$

由迭代(I′)，可得：

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 \le{}& \|x_n-q\|\cdot\|x_{n+1}-q\| - b_n\langle x_n - T^n y_n, j(x_{n+1}-q)\rangle + c_n\langle u_n - x_n, j(x_{n+1}-q)\rangle \le \\ & \|x_n-q\|^2/2 + \|x_{n+1}-q\|^2/2 - b_n(1-k)\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2/2 + b_n(k_n^2-1)\|x_{n+1}-q\|^2/2 + \\ & b_n(\|x_{n+1}-x_n\| + L\|x_{n+1}-y_n\|)\|x_{n+1}-q\| + c_n M + c_n M\|x_{n+1}-q\|^2 + \\ & c_n\|x_n-q\|^2/2 + c_n\|x_{n+1}-q\|^2/2.\end{aligned} \tag{12}$$

将(10)式和(11)式代入(12)式，整理可得：

$$(1-F_n)\|x_{n+1}-q\|^2 \le (1+G_n)\|x_n-q\|^2 + H_n - b_n(1-k)\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}F_n ={}& \{b_n(k_n^2-1) + c_n(2M+1) + b_n^2 + b_n c_n + b_n b_n' \cdot LL_1 + b_n c_n' L + [b_n^2 L(2+L) + b_n c_n L](1+D_n) + \\ & 2b_n c_n M + 2b_n b_n' c_n'' ML^2 + 2b_n c_n' ML + 2[b_n^2 L\cdot(2+L) + b_n c_n L]E_n + 2b_n c_n ML\},\end{aligned}$$

$$G_n = c_n + b_n^2 + b_n c_n + b_n b_n' LL_1 + b_n c_n' L + [b_n^2 L\cdot(2+L) + b_n c_n L](1+D_n),$$

$$H_n = 2[c_n M + b_n c_n(1+L)M + b_n b_n' c_n'' ML + b_n c_n' ML + (b_n^2 L(2+L) + b_n c_n L)E_n].$$

由条件(i),(ii)和(iii)得 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} G_n < +\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} H_n < +\infty$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = 0$，从而存在 $N_2 \in \aleph$，且 $N_2 \ge N_1$，使得对任意的 $n \ge N_2$，有 $F_n < 1/2$，则 $1 \le 1/(1-F_n) < 2$．对任意的 $n \ge N_2$，可得：

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 \le{}& \frac{1+G_n}{1-F_n}\|x_n-q\|^2 + \frac{H_n}{1-F_n} - \frac{b_n(1-k)}{1-F_n}\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2 \le (1+I_n)\|x_n - \\ & q\|^2 + 2H_n - b_n(1-k_n)\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $I_n = (F_n+G_n)/(1-F_n)$．由引理 1 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ 存在且 $\{\|x_n-q\|\}$ 有界.

(B) 由(14)式，引理 1 和结论(A)可得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, F)$ 存在.

(C) 因为序列 $\{\|x_n-q\|\}$ 有界，可取 $M_1>0$，对任意的 $n\ge1$，使得 $\|x_n-q\|\le M_1$．由(14)式可得：

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \le \|x_n-q\|^2 + (F_n+G_n)M_1^2 + 2H_n - b_n(1-k)\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2, \forall n\ge1,$$

从而

$$b_n(1-k)\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2 \le \|x_n-q\|^2 - \|x_{n+1}-q\|^2 + (F_n+G_n)M_1^2 + 2H_n,$$

则有：

$$(1-k)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|^2 \le \|x_1-q\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(F_n+G_n)M_1^2 + 2H_n)] < +\infty.$$

由已知条件可知 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\| = 0$．由(11)式，可得：

$$\begin{aligned}\|x_n - T^n x_n\| ={}& \|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - T^n x_{n+1} + T^n x_{n+1} - T^n x_n\| \le (1+L)\|x_n - x_{n+1}\| + \\ & \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\| \le (1+L)[b_n L(1+D_n) + b_n + c_n]\|x_n-q\| + c_n M(1+L) + b_n L(1+ \\ & L)E_n + \|x_{n+1}-T^n x_{n+1}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| ={}& \|x_n - T^n x_n + T^n x_n - T^n x_{n-1} + T^n x_{n-1} - Tx_{n-1} + Tx_{n-1} - Tx_n\| \le \\ & \|x_n - T^n x_n\| + L(1+L)\|x_n - x_{n-1}\| + L\|x_{n-1} - T^{n-1}x_{n-1}\|,\end{aligned}$$

从而 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$．证毕.

定理 1　设 X 是实赋范线性空间，$K\subset X$ 中的非空闭凸子集．$T: K\to K$ 是半紧的、一致 $L-$lipschitzian 渐近半压缩映象，且 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$．对任意的 $x_1\in K$，由迭代(I)定义的序列 $\{x_n\}$ 满足引理 3 的条件(i)，(ii)和(iii). 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的某一不动点 q.

证明　由引理 3(C)知，$\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$．则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\| = 0$；因为序列 $\{x_{n_j}\}$ 有界和映象 T 是半紧的，则存在一子序列 $\{x_{n_{j_s}}\}\subset\{x_{n_j}\}$，使得 $x_{n_{j_s}} \to q\in K(s\to\infty)$.

由T的连续性可得$\lim_{n_{j_s}\to\infty}\|x_{n_{j_s}}-Tx_{n_{j_s}}\|=\lim_{n_{j_s}\to\infty}\|q-Tq\|=0$，即$q$是$T$的不动点，则有$\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|=0$. 证毕.

定理 2 设X是 Banach 空间，K是X的非空闭凸子集. 设映象$T:K\to K$是一致$L-$lipschitzian 的渐近半压缩映象，且$\{k_n\}\subset[1,+\infty)$及$\lim_{n\to\infty}k_n=1$. 对任意的$x_1\in K$，由(I)定义的序列$\{x_n\}$满足条件：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}b_nb_n^{'}<+\infty$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n^{'})^2<+\infty,\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^{'}c_n^{''}<+\infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{'}b_n^{''}<+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{'}<+\infty$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(k_n^2-1)<+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{'}(k_n^2-1)<+\infty$；

则$\{x_n\}$强收敛于T的某不动点q，当且仅当

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0.$$

证明 必要性显然成立. 下证充分性：设T满足$\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0$. 由引理 3(B)，当$n\to\infty$时，有$d(x_n,F(T))\to 0$. 取$\{x_n\}$中的子序列$\{x_{n_j}\}$和序列$\{q_j\}\subset F(T)$，使得$\|x_{n_j}-q_j\|\le 2^{-j}$. 设$m\ge 1$，记$n_{j+1}=n_j+m$. 由(14)式，可得：

$$\|x_{n_{j+1}}-q_j\|^2\le(1+I_{n_j+m-1})\|x_{n_j+m-1}-q_j\|^2+2H_n\le\exp\{\sum_{i=0}^{m-1}I_{n_j+i}\}\|x_{n_j}-q_j\|^2+\exp(\sum_{i=0}^{m-1}I_{n_j+i})\sum_{i=0}^{m-1}2H_{n_j+i}\le\frac{M_2}{2^{2j}}, \tag{15}$$

则由(15)式，可得$\|q_{j+1}-q_j\|\le(2M_2+1)/2^{j+1}$. 因此$\{q_j\}$是一柯西序列，由完备性可设$q_j\to q$(当$j\to+\infty$)及$F(T)$是闭的，则$q\in F(T)$且$x_n\to q$(当$n\to\infty$). 证毕.

推论 1 设X是实赋范线性空间，$K\subset X$中的非空闭凸子集. 映象$T:K\to K$是严格渐近伪压缩映象，序列$\{k_n\}\subset[1,+\infty)$及$\lim_{n\to\infty}k_n=1$，且不动点集$F(T)\ne\Phi$. 由(I)定义的序列$\{x_n\}$满足引理 3 的条件(i)，(ii)和(iii). 则

(a) 对任意的$q\in F(T)$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$存在；

(b) $\lim_{n\to\infty}d(x_n,F(T))$存在，其中$d(x_n,F(T))=\inf_{q\in F(T)}\|x_n-q\|$；

(c) $\liminf_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$.

推论 2 设X,K与推论 1 相同. 映象$T:K\to K$是半紧的、严格渐近伪压缩映象，序列$\{k_n\}\subset[1,+\infty)$及$\lim_{n\to\infty}k_n=1$，且不动点集$F(T)\ne\Phi$，由(I)定义的序列$\{x_n\}$满足引理 3 的条件(i)，(ii)和(iii). 则$\{x_n\}$强收敛于T的某不动点q.

推论 3 设X,K与推论 1 相同. 设$T:K\to K$是严格渐近伪压缩映象，序列$\{k_n\}\subset[1,+\infty)$及$\lim_{n\to\infty}k_n=1$，且不动点集$F(T)\ne\Phi$. 由(I)定义的序列$\{x_n\}$满足定理 2 中的条件(i)，(ii)和(iii). 则$\{x_n\}$强收敛于T的某不动点q，当且仅当

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n,F(T))=0.$$

注 2 文中的结果可以推出修正的带误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代序列的相应的收敛性结果.

注 3 如果$T:K\to K$是全连续的，则一定是半紧的；如果T是连续的且为半紧的，则一定满足文献[10]中的条件(A). 本文的结果作了如下几方面的改进和推广.

(i) 空间X推广至任意的实赋范线性空间；

(ii) 证明了序列$\{x_n\}$强收敛于T不动点的一个充分必要条件，从而映象T可不满足全连续条件；

(iii) 证明方法不同于 Liu[6]，Osilike[7]，Igbokwe[11]和 Moore[12]等的方法且更为简单，同时他们的结果是本文结果的某种特殊情况.

注 4 迭代参数的数学模型为：对任意的$n\ge 1$，有：

$$b_n=\frac{1}{n+2},c_n=\frac{1}{(n+2)^2},a_n=1-b_n-c_n;$$

$$b_n^{'}=\frac{1}{n+2},c_n^{'}=\frac{1}{(n+2)^2};$$

$$a_n^{'}=1-b_n^{'}-c_n^{'},\ b_n^{''}=c_n^{''}=\frac{1}{(n+1)(n+2)^2};$$

$$a_n^{''}=1-b_n^{''}-c_n^{''},\ k_n=1+\frac{1}{n+2}.$$

参考文献：

[1] Glowinski R, Le Tallec P. Augemented lagragian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics[M]. Philadelphia: SIAM, 1989.

[2] Haubruge S, Nguyen V H, Strodiot J J. Convergence analysis and applications of the Glowinski-Le Tallec splitting method for finding a zero of the sum of two maximal monotone operators[J]. Optim Theory Appl, 1998, 97:645-673.

[3] Noor M A. New aproximation schemes for general variational inequalities[J]. Math Anal Appl, 2000, 251: 217-229.

[4] Noor M A. Three-step iterative algorithms for multi-valued quasi variational inclusions[J]. Math Anal Appl, 2001, 255:589-604.

[5] Xu B L, Noor M A. Fixed-point iterations for asymptotically nonexpansive mppings in Banach spaces[J]. Math Anal Appl, 2002, 267:444-453.

[6] Liu Q H. Convergence theorems of the sequence of iteratives for asymptotically demicontractive and hemi-contractive mappings[J]. Nonlinear Anal TMA, 1996, 26: 1 835-1 842.

[7] Osilike M O. Iterative approximations of fixed points of asymptotically demicontractive mappings[J]. Indian J Pure Appl Math, 1998,12:1 291-1 300.

[8] Chang S S. On the approximation problem of fixed points for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Indian J Pure Appl Math, 2001, 9:1 297-1 307.

[9] Hu L G, Liu L W. Convergence problem of *p*-strictly asymptotically demicontractive mappings in Banach spaces[J]. Acta Anal Func Appl, 2004(2):132-139.

[10] Senter H F, Dotson W J. Approximating fixed points of nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 44:375-380.

[11] Igbokwe D I. Approximation of fixed points of asymptotically demicontractive mapping arbitrary Banach spaces[J]. Ineq Pure and Appl Math, 2002(3):1-24.

[12] Moore C, Nnoli B V C. Iterative sequence for a symptotically demicontractive maps in Banach spaces[J]. Math Anal Appl, 2005, 302:557-562.

Convergence Theorems for Asymptotically Demicontractive Mappings in Normed Linear Spaces

HU Liang-gen

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Using new analytic techniques, we analyze and study several strong convergence theorems of the three-step iterative process with errors for asymptotically pseudocontractive mapping and asymptotically demicontractive mappings in arbitrary real normed linear spaces. Our results not only include the modified Mann and Ishikawa iterative process with errors as two special cases, but also prove the necessary and sufficient condition for sequence convergence.

Key words: asymptotically pseudocontractive and demicontractive mappings; three-step iterative process with errors; the modified Mann and Ishikawa iterative process with errors; necessary and suffice condition; normed linear spaces

CLC number: O177.91 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）