

三态噪声诱导的无穷耦合粒子形成的系统随机共振现象

韩引霞

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了无穷耦合粒子形成的系统耦合系数遭受三态噪声扰动时, 系统所表现出的随机共振现象. 首先, 利用随机平均法和Shapiro-Loginov公式, 得到了耦合粒子位置的一阶矩的精确表达式; 其次, 通过计算机模拟画出输出信号振幅与输入信号频率、系统参数、噪声参数之间的变化曲线; 最后, 从模拟曲线观察到系统不仅表现出了随机共振现象, 甚至还出现了双共振峰, 这在双态噪声诱导的无穷个耦合粒子系统中是没有的现象.

关键词: 三值噪声; 耦合粒子系统; 双共振峰; 随机共振

中图分类号: O211.64

文献标识码: A

文章编号: 1001-5132 (2012) 02-0079-04

在人们传统观念中, 噪声是令人厌烦的. 然而, 当噪声与非线性系统、线性系统相结合, 在适当的条件下, 系统会出现一些非常奇妙的现象, 例如噪声诱导的相变、输运、共振激活等等^[1-3]. 在这些现象中随机共振就是一例^[4-9]. 随机共振概念是1981年, Benzi 等人在研究古气象冰川演化问题时首次提出来的^[4-5]. 此后, 随机共振的理论和实验研究都引起了人们极大的兴趣. 在短短的二十多年间, 被发现具有随机共振现象、利用随机共振现象的系统, 不单单出现在物理学领域里, 而且已经延伸到了化学、工程、生物、现代通讯等领域^[6-9].

近年来, 研究耦合系统中随机共振现象的文章已有发表^[10-15]. 文章^[11]利用非线性主方程考虑了由外部周期力驱动无限个耦合粒子构成的双态系统中的随机共振. Bulsara 等人研究了非线性无限耦合粒子点阵^[12]及局域耦合粒子点阵^[13]的随机共振. 对于一种特殊类型的耦合(平均场耦合)研究中^[14]也观察到随机共振. 此外, 由乘性双态噪声和周期信号驱动的单粒子^[14]及无限个耦合粒子^[15]构成的线性系统中的随机共振现象研究也涉及到此方面. 但是, 双态噪声和三态噪声在模拟自然涨落时都是非常有用的; 而且三态噪声更复杂, 它包括了双态噪声的所有情形. 更有意义的是, 与高斯

色噪声的平坦系数 $\kappa = 3$, 对称性双态噪声的平坦系数 $\kappa = 1$ 相比较, 三态噪声的平坦系数 κ 可以是 $1 \sim \infty$ 的任何数, 这个优势在模拟真实涨落时更有实际意义. 受此启发, 笔者将考虑由三态噪声和周期信号驱动的单粒子及无限个耦合粒子构成的线性系统中的随机共振现象.

1 系统模型

笔者考虑的是由无限多个全域耦合粒子组成的系统, 它们遵循下面的随机微分方程:

$$dx_i / dt = b + cx_i + se + A_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

式中, b, c, A_0 都为常量, b, c 代表系统参量; s 是平均场, 它的定义式为 $s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)$; e 代表全域

耦合系数, 当粒子数 $N \rightarrow \infty$ 时, 每个粒子的变化过程应满足同样的演化方程, 因此, 平均场 s 简化为 $s = x$. (1)式变为:

$$dx / dt = b + cx + ex + A_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

假设耦合系数 e 受到三态噪声 $Z(t)$ 的扰动, (2)式变成:

$$dx / dt = b + cx + (e + Z(t))x + A_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

$Z(t)$ 是三值噪声, 它在 $Z_1 = d, Z_2 = 0, Z_3 = -d$ ($d > 0$) 三值之间发生跃迁, 跃迁概率为 ν . 假设,

它的定态概率满足 $P_s(d) = P_s(-d) = q$, $P_s(0) = 1 - 2q$ ($\frac{1}{2} > q > 0$). 三值噪声 $Z(t)$ 是一个对称性的均值为零的指数关联噪声, 它满足的统计特征为:

$$\langle Z(t) \rangle = 0, \langle Z(t)Z(t') \rangle = 2qd^2 \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (4)$$

式中, τ 为噪声关联时间, 它与转移概率 ν 互为倒数, 即 $\nu = 1/\tau$.

由于耦合系数不能为负值, 因此对于三态噪声的所有态要求为:

$$e > d. \quad (5)$$

2 一阶矩

对(3)式取系综平均, 得到:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = b + c\langle x \rangle + e\langle x \rangle + \langle Z(t)x \rangle + A_0 \sin \omega t. \quad (6)$$

(6)式出现新关联因子 $\langle Z(t)x \rangle$, 根据 Shaoiro-Loginov 公式^[16]:

$$\frac{d\langle Z(t)\Phi(t) \rangle}{dt} = \langle Z(t) \frac{d\Phi(t)}{dt} \rangle - \nu \langle Z(t)\Phi(t) \rangle, \quad (7)$$

$$\frac{d\langle Z^2(t)\Phi(t) \rangle}{dt} = \langle Z^2(t) \frac{d\Phi(t)}{dt} \rangle - 2\nu \langle Z^2(t)\Phi(t) \rangle + 2\nu \langle Z^2(t) \rangle \langle \Phi(t) \rangle. \quad (8)$$

(6)式中的关联因子 $\langle Z(t)x \rangle$ 可以写为:

$$\frac{d\langle Z(t)x \rangle}{dt} = \langle Z(t) \frac{dx}{dt} \rangle - \nu \langle Z(t)x \rangle = (c + e - \nu) \langle z(t)x \rangle + \langle Z^2(t)x \rangle. \quad (9)$$

(9)式中的关联因子 $\langle Z^2(t)x \rangle$ 可以写为:

$$\frac{d\langle Z^2(t)x(t) \rangle}{dt} = \langle Z^2(t) \frac{dx(t)}{dt} \rangle - 2\nu \langle Z^2(t)x(t) \rangle + 4qd^2 \nu \langle x(t) \rangle = (c + e - 2\nu) \langle Z^2(t)x(t) \rangle + 2qd^2 \langle Z(t)x(t) \rangle + 4qd^2 \nu \langle x(t) \rangle + 2qd^2 (b + A_0 \sin(\omega t)). \quad (10)$$

(6)式、(9)式及(10)式形成关于3个变量 $\langle x(t) \rangle$, $\langle Z(t)x(t) \rangle$, $\langle Z^2(t)x(t) \rangle$ 的封闭方程组. 根据(6)式、(9)式及(10)式可推得关于变量 $\langle x(t) \rangle$ 的三阶微分方程为:

$$\frac{d^3 \langle x \rangle}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + a_0 \langle x \rangle = c_2 A_0 \sin \omega t + c_1 A_0 \cos \omega t + c_0, \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_2 &= -3(c + e - \nu), \\ a_1 &= 3(c + e)^2 - 6\nu(c + e) + 2\nu^2 - 2qd^2, \\ a_0 &= (c + e - 2\nu)[2qd^2 - (c + e)(c + e - \nu)], \\ c_2 &= (c + e - \nu)(c + e - 2\nu) - \omega^2, \\ c_1 &= [3\nu - 2(c + e)]\omega, \\ c_0 &= b[(c + e - \nu)(c + e - 2\nu)], \end{aligned}$$

它的通解写为:

$$\langle x \rangle = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) + A_3 + \sum_{j=1}^3 L_j \exp(\rho_j t), \quad (12)$$

L_j ($j=1, 2, 3$) 是积分常数, 由初始条件确定. ρ_j 满足下列的三阶多项式方程:

$$\rho^3 + a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_0 = 0. \quad (13)$$

为了保证(12)式解的稳定性, 除了(5)式的限制之外, 要求 ρ 必须满足负实根. 根据劳斯-赫尔维茨判据^[17], 得到:

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_2 a_1 > a_0. \quad (14)$$

在定态时, 即 $t \rightarrow \infty$ 时, 一阶矩的解为:

$$\langle x \rangle = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + A_3, \quad (15)$$

或者,

$$\langle x \rangle = A \sin(\omega t + \varphi) + A_3, \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= (A_1^2 + A_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{A_1}{A_2}\right), \\ A_1 &= \frac{f_2 f_3 + f_1 f_4}{f_1^2 + f_2^2}, \quad A_2 = \frac{f_1 f_3 - f_2 f_4}{f_1^2 + f_2^2}, \\ A_3 &= \frac{b(c + e - \nu)(c + e - 2\nu)}{(c + e - 2\nu)[2qd^2 - (c + e - \nu)(c + e)]}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} f_1 &= 3(c + e - \nu)\omega^2 + (c + e - 2\nu) \cdot \\ &\quad [2qd^2 - (c + e)(c + e - \nu)], \\ f_2 &= [3(c + e)^2 - 6\nu(c + e) + 2\nu^2 - 2qd^2 - \omega^2]\omega, \\ f_3 &= [3\nu - 2(c + e)]\omega A_0, \\ f_4 &= [(c + e - \nu)(c + e - 2\nu) - \omega^2]A_0, \end{aligned}$$

其中, A 代表输出信号的振幅, φ 代表输出信号的相位.

3 模拟结果

根据(16)式可模拟出系统的输出信号振幅与输入信号频率、系统参数、噪声参数等之间的变化

曲线. 图 1 为在相同系统参量、噪声参量及不同的输入信号频率 ω 条件下, 系统的输出信号振幅 A 与噪声的转移概率 ν 之间的变化关系. 从图 1 中可以看到随着转移概率 ν 的增大, 在它达到某值时, 系统的输出信号振幅首先显示出 1 个高峰值; 随后, 随着转移概率 ν 的逐渐增大, 系统的输出信号振幅急剧降低; 但是, 当转移概率 ν 达到某值时, 系统的输出信号振幅再次显示出 1 个峰值, 不过这次的峰值远小于第 1 次的峰值. 输出信号振幅表现出波峰, 说明系统出现了随机共振行为. 更重要的是, 在三态噪声驱动下, 随着噪声参量的变化, 系统不仅表现出了随机共振现象, 而且出现了 2 个峰值. 这在以往有关的文献中还没有报道过^[10-15]. 除此之外, 还可以发现输入信号频率 ω 越小, 随机共振现象越明显.

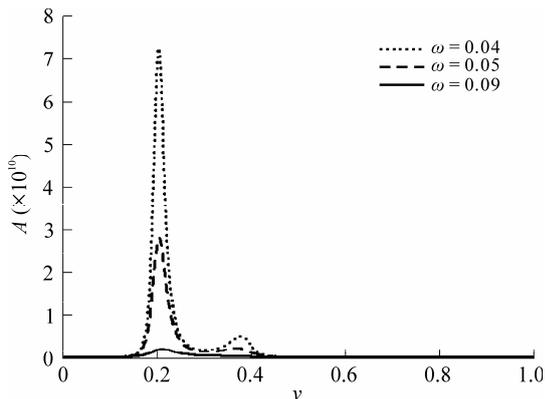


图 1 不同输入信号频率 ω 条件下, 系统的输出信号振幅 A 与噪声转移概率 ν 之间的变化关系 ($c=0.1, e=0.3, q=0.2, A_0=1.0, d=0.1$)

图 2 为在相同的系统参量条件下, 系统的输出信号振幅 A 与输入信号频率 ω 的变化关系. 从图中随着输入信号频率 ω 的变化, 系统的输出信号振幅 A 从最大值急剧的降低. 图 2 说明随着输入信号频率 ω 的变化, 系统没有出现随机共振现象. 但是, 可以看到输入信号频率 ω 越小, 输出信号振幅 A 越大, 这与图 1 中的情况相对应.

图 3 为在相同的噪声参量条件下, 系统输出信号振幅 A 与系统参量 c 的变化关系. 从图 3 中可以看到随着系统参量 c 的变化, 在系统的耦合系数为一定条件下时, 系统的输出信号振幅 A 先出现了 1 个最小值; 随后出现了峰值; 再次随着系统参量 c 的增加, 输出信号振幅 A 急剧降低. 出现峰值说明

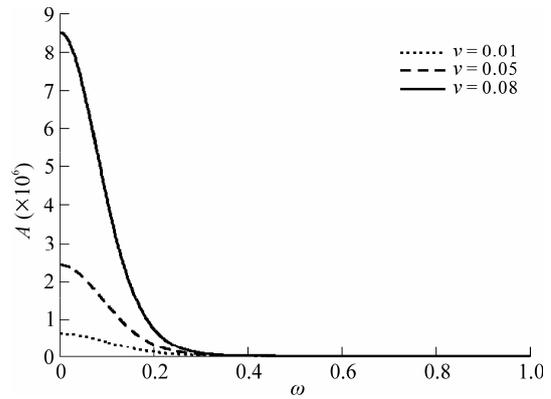


图 2 不同转移概率 ν 条件下, 系统的输出信号振幅 A 与输入信号频率 ω 的变化关系 ($c=0.1, e=0.3, q=0.2, A_0=1.0, d=0.1$)

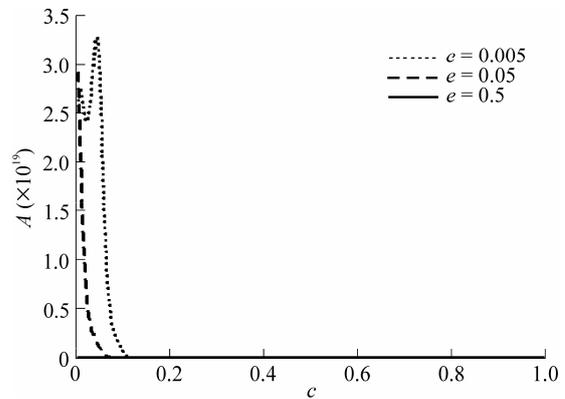


图 3 不同耦合系数 e 条件下, 系统的输出信号振幅 A 与系统参量 c 的变化关系 ($\omega=0.02, q=0.2, \nu=0.05, A_0=1.0, d=0.001$)

随着系统参量的变化, 系统也可以表现出随机共振现象. 此外, 也发现耦合系数也影响到系统的随机行为, 耦合系数越小, 随机共振现象越显著, 耦合系数增大, 随机共振现象消失了.

4 结论

研究了耦合系数受三态噪声调制的无穷个耦合粒子系统中的随机共振现象. 首先, 利用随机平均法和 Shapiro-Loginov 公式, 推出了耦合粒子的一阶矩的精确表达式; 然后, 通过计算机模拟, 画出了输出信号振幅与输入信号频率、系统参数、噪声参数之间的关系曲线. 从研究结果来看, 系统表现出两种类型的随机共振现象: 一种是随着噪声参量的变化, 系统表现出非单调的变化, 即出现传统的随机共振, 但是此时出现的是双共振峰, 这在文献[10-15]中是有的现象; 一种随着系统参量

的变化, 系统表现出非单调的变化, 即出现系统参量诱导的随机共振现象.

参考文献:

- [1] Reimann P. Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium[J]. *Phys Rep.* 2002, 361(2/4):57-265.
- [2] Haljas A, Mankin R, Sauga A, et al. Anomalous mobility of Brownian particles in a tilted symmetric sawtooth potential[J]. *Phys Rev E*, 2004, 70(4):41107-41118.
- [3] Fiasconaro A. Resonant activation in asymmetric potentials[EB/OL]. [2008-10-23]. <http://arxiv.org/abs/0805.2406>.
- [4] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance [J]. *J Phys A*, 1981, 14(11):453-457.
- [5] Mcnamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance[J]. *Phys Rev A*, 1989, 39(9): 4854-4869.
- [6] Bloch C C. *Classical and quantum[M]*. New York: Oscillator & Wiley Press, 1997.
- [7] Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy[J]. *Rev Mod Phys*, 1943, 15(1):1-89.
- [8] Lindenberg K, Seshadri V, West B J. Brownian motion of harmonic systems with fluctuating parameters. II. Relation between moment instabilities and parametric resonance [J]. *Phys Rev A*, 1980, 22:2172-2179.
- [9] Tureli M, *Theoretical population biology[M]*. New York: Academic Press, 1977.
- [10] Li Jinghui, Hanggi P. Spatially periodic stochastic system with infinite globally coupled oscillators[J]. *Phy Rev E*, 2001, 64:11106-11113.
- [11] Lindner J F, Meadows B K, Ditto W L. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, 75:3-6.
- [12] Schmid G, Goychuk I, Hanggi P. Channel noise and synchronization in excitable membranes[J]. *Physica A*, 2003, 325:165-175.
- [13] Acebron J A, Bulsara A R, Rappel W J. Noisy FitzHugh-Nagumo model: From single elements to globally coupled networks[J]. *Phys Rev E*, 2004, 69:26202-26210.
- [14] Casado J M, Ordóñez J G, Morillo M. Stochastic resonant of collective variables in finite sets of interacting identical subsystems[J]. *Phys Rev E*, 2006, 73:11109-11116.
- [15] Li Jinghui. Stochastic Huge-resonance caused by coupling for a globally coupled linear system[J]. *Commun Theor Phys*, 2009, 51:265-269.
- [16] Shapiro V E, Loginov V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations[J]. *Physica A*, 1978, 91(3/4):563-574.
- [17] Roul S. In *programming for mathematicians[M]*. Berlin: Springer Verlag Press, 2000:280-286.

Phenomena of Stochastic Resonance Induced by Trichotomous Noise in an Infinitely Coupled Particles System

HAN Yin-xia

(College of Science & Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This paper study the phenomena of stochastic resonance in an infinitely coupled particles system induced by trichotomous noise. Based on the random average method and Shapiro-Loginov formula, an explicit expression of the first moment is obtained. By simulation, we obtain the curves of the amplitude of the output signal with noise parameter, system parameter and the frequency of the input signal. The results show that the amplitude of the output signal is a non-monotonic function of the noise parameter and system parameter, i.e., the system shows the phenomena of stochastic resonance. The system shows double-resonance phenomenon.

Key words: trichotomous noise; coupled particles system; double-resonance phenomenon; stochastic resonance

(责任编辑 章践立)