



国家精品课程

国家“十一五”规划教材

OPTICS

光学

第四章

山东大学信息学院光学系

蔡履中

主讲

2010, 11



## 第四章 光的衍射

- 4.1 衍射的基本原理及分类
- 4.2 菲涅耳衍射
- 4.3 夫琅禾费衍射（一）：连通孔径
- 4.4 光学成像系统的分辨本领
- 4.5 夫琅禾费衍射（二）：非连通孔径
- 4.6 光栅

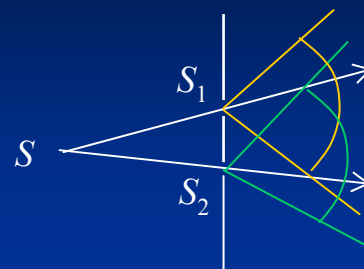


## 4.1 衍射的基本原理及分类

### 4.1.1 衍射现象概述

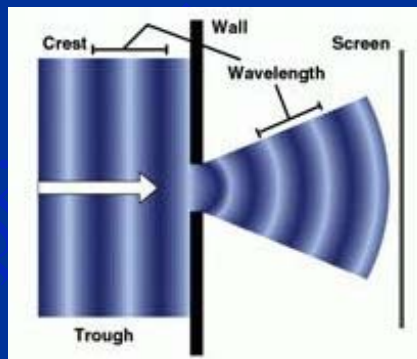
#### 1. 衍射概念:

波在传播过程中遇到障碍物时偏离几何光学路径的现象。如杨氏实验中 $S_1$ ,  $S_2$ 的作用。

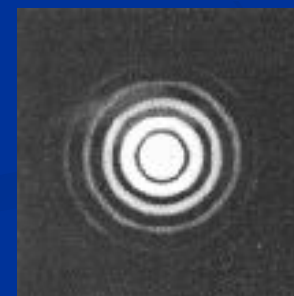


#### 2. 衍射的一般特点:

1. 波可以到达几何阴影区;
2. 强度的空间分布一般有多次起伏变化;



(多个明暗交替的条纹或圆环——衍射图样)



3. 对光束的空间限制越甚, 则该方向的衍射效应越强.

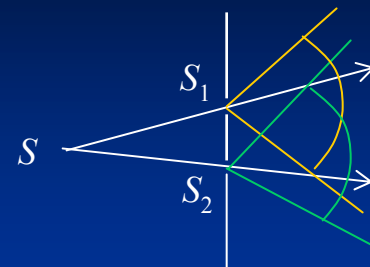
例: (1) 缝越窄光斑分散越开;  
(2) 孔越小中心亮斑越大.



### 3. 衍射与干涉一般同时存在

Young: 对每一单缝的作用称之为衍射;

对双缝衍射波的相互作用称为干涉.



若 $S_1, S_2$ 为理想点(或缝), 则衍射波为理想球(或柱)面波 — 双缝干涉

若 $S_1, S_2$ 有有限宽度, 则衍射波已非理想球(或柱)面波,

其空间分布由衍射效应所决定 — 双缝衍射.

干涉和衍射的取名: 1) 何种因素起主导作用;

2) 习惯.

后文将进一步说明干涉, 衍射的本质联系和区别.



#### 4. 衍射是一切波动的固有特性

水波，声波，无线电波，物质（电子衍射）波均有，但明显程度不同。

衍射明显程度依赖于  $\lambda/a$

$\lambda$ : 波长;  $a$ : 引起衍射的障碍物或孔径线度.

$\lambda/a$  越大, 衍射越显著

$\frac{\lambda}{a}$	$<10^{-3}$	衍射现象不明显
	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	衍射现象显著
	$\sim 1$	过渡为散射

各波段绕过衍射物的能力不同,  $\lambda$  接近  $a$  时衍射明显 (绕射)

	(中长) 无线电波	声波	可见光
$\lambda$	$10 \sim 10^3$ m	$10^{-2} \sim 10$ m	$0.4 \sim 0.7 \mu\text{m}$



5. 障碍物 — 改变波前分布, 引入空间不均匀性



振幅型: 孔和缝

相位型: 光学厚度  $nh$  不同的玻璃板

6.  $\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$  时, 波动光学  $\rightarrow$  几何光学

衍射具有重要的理论及实际意义 :

如光栅, 光学仪器, 傅里叶光学, X 线衍射, 电子衍射等



## 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理

### 一、惠更斯 — 菲涅耳原理

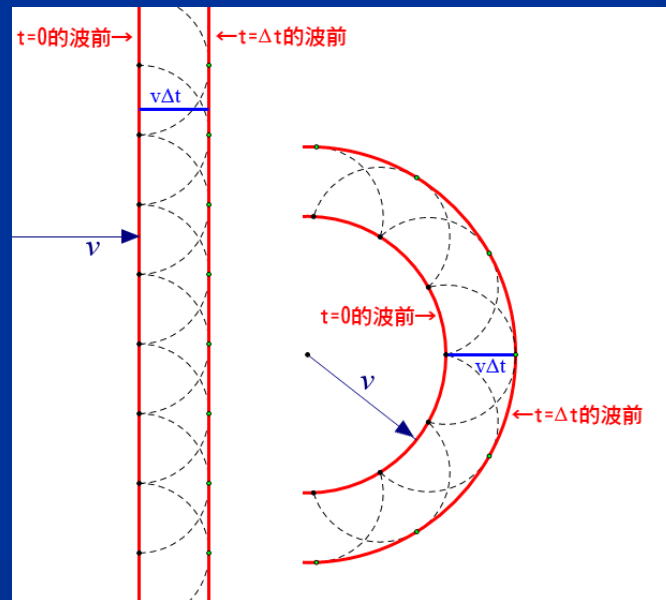
#### 1. 原理的表述及意义

波动 { 扰动的传播 — 后一点振动由前一点振动引起  
 时空周期性 — 各次波有确定相位关系, 可相干叠加

#### 惠更斯原理

#### 次波概念

下一时刻的波面是上一时刻所有次波波面的**包络面**.





#### 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

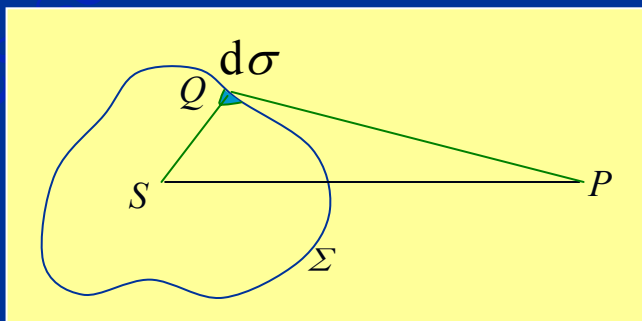
1818年, Fresnel 吸收惠更斯原理的“次波”概念,

补充引入“次波相干叠加”思想, 发展成

**惠更斯—菲涅耳原理:**

波前上每一点都可看作是次波中心, 光场中某点的扰动是包围光源的任一闭曲面上所有点所发出的次波在该点的相干叠加.

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P)$$



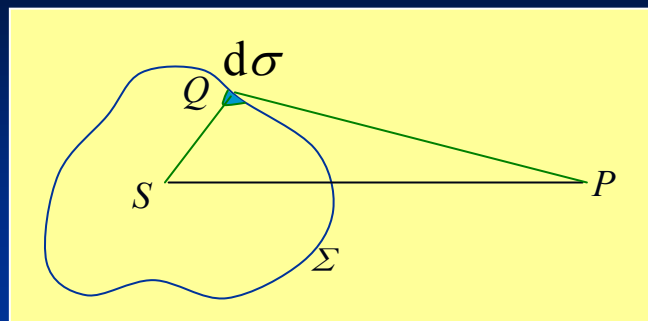
$d\tilde{E}(P)$ :  $\Sigma$  上小面元  $d\sigma$  在  $P$  点所产生的复振幅.





## 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P)$$

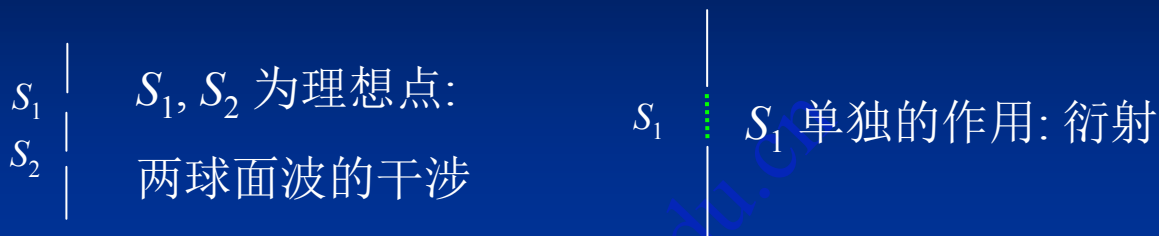


讨论:

- (1) 隐含思想: 空间各点对  $P$  点的扰动可用面  $\Sigma$  上次波的扰动来代替.
- (2)  $\Sigma$  不必为波面, 但一般取波面: 波面同相位, 简化.
- (3) 相干叠加指  $P$  点复振幅是各次波复振幅的叠加积分  
—— 次波假设和叠加原理的必然结果.
- (4)  $S$  一般指单色光源, 但也可推广到多色扩展源.
- (5) 波前受阻挡时, 参与叠加的只是未被阻挡的次波.

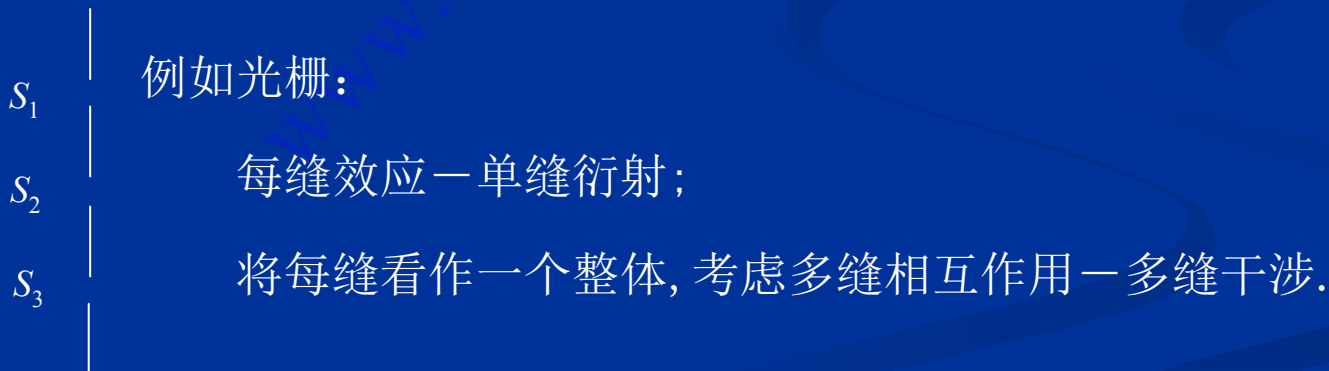


### (6) 干涉与衍射的异同



**共性:** 次波相干叠加

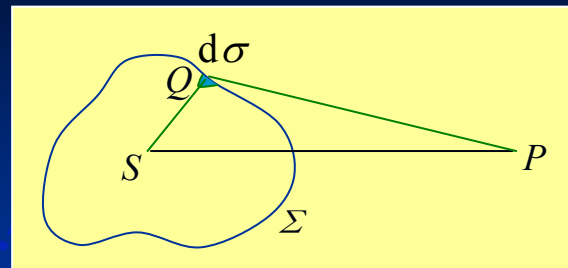
**区别** { 干涉: 空间**分离**的(一般为**有限多**)次波源或光束的叠加 — 求和;  
 衍射: 空间**连续**的**无限多**次波源的叠加 — 积分.





## 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P)$$

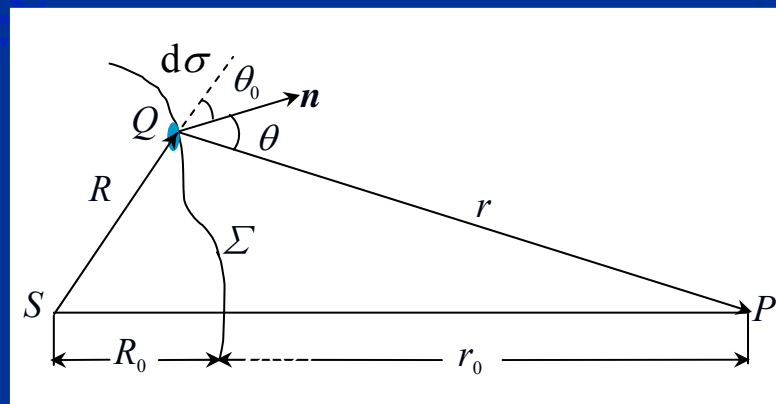


### 2. Fresnel 衍射积分公式

设  $S$  点初相为 0,  $Q$  点复振幅  $\tilde{E}(Q) = \frac{A}{R} e^{ikR}$

在  $Q$  点取一小面元  $d\sigma$ , 它在  $P$  点引起元振动复振幅

$$d\tilde{E}(P) \begin{cases} \propto \tilde{E}(Q) \\ \propto d\sigma \\ \propto \frac{e^{ikr}}{r} & \text{传播因子} \\ \propto F(\theta_0, \theta) & \text{倾斜因子} \end{cases}$$



$F(\theta_0, \theta)$  表示面元  $d\sigma$  位于不同方位和向不同方向有不同辐射强度.

显然在  $\theta_0 = \theta = 0$  时,  $F$  有最大值 1;

$F$  随着  $\theta_0, \theta$  增大而单调减小.



## 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

写成等式 
$$d\tilde{E}(P) = c\tilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}F(\theta_0, \theta)d\sigma$$
  $c$  为常数

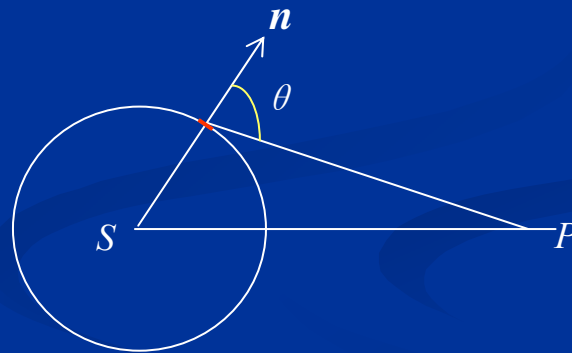
即 
$$\tilde{E}(P) = c\oiint_{\Sigma} \tilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}F(\theta_0, \theta)d\sigma$$
 Fresnel 衍射积分公式

说明:

1. 上式最初来自Fresnel 直觉猜想.

Fresnel 取  $\Sigma$  为球面波面,  $\theta_0=0$

$$F(\theta) = \begin{cases} \cos\theta, & \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



2.  $c$  未能确定.

但  $c$  对相对强度分布无影响, 故对强度计算结果精确, 说明上式有合理内核. 需要更坚实的理论基础.

思考题: 1, 2



## 秋高气爽正是赏菊时



采菊东篱下，  
悠然见南山。

——晋 陶渊明

待到秋来九月八，  
我花开后百花杀。  
冲天香阵透长安，  
满城尽带黄金甲。

——唐 黄巢

莫道不消魂，  
帘卷西风，  
人比黄花瘦。

——宋 李清照













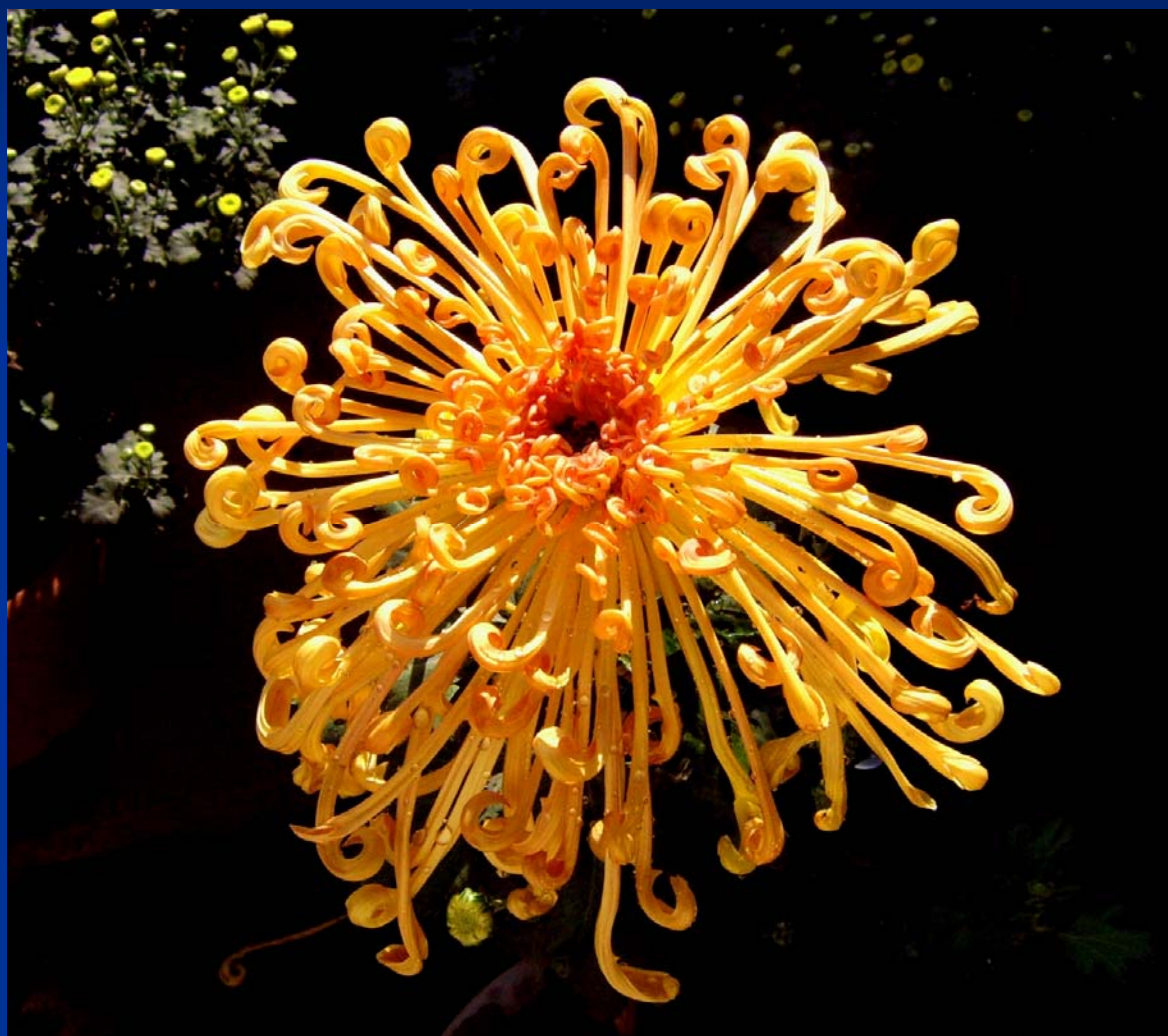








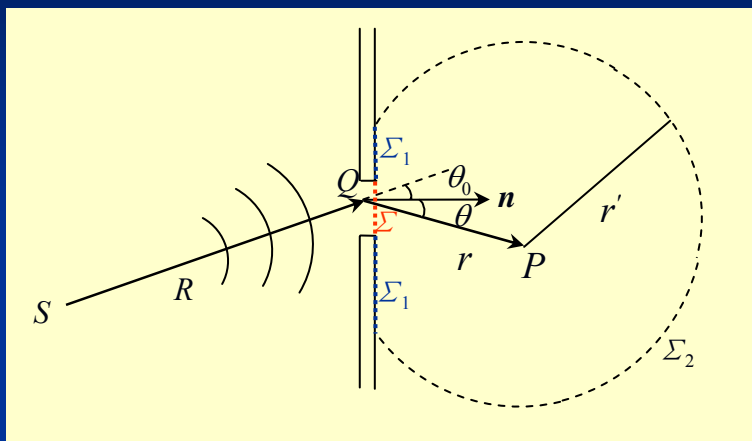








## 二. 平面屏衍射的基尔霍夫理论



考察平面屏上一透光孔径  $\Sigma$

$S$  单色点光源

$P$  所考察场点

**数学依据:** 任一点光场  $P$  点的扰动可由包围该点的闭曲面上各点的场值及其梯度值表示出来 (叠加积分)。

作闭曲面  $\Sigma' = \Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$

两个假定----**基尔霍夫边界条件**

1. 开孔 ( $\Sigma$ ) 处光场及其梯度值与无屏时相同——忽略了屏对场的影响;
2. 紧贴屏后 ( $\Sigma_1$ ) 无扰动, 光场及梯度值均为0——忽略了场在屏后的扩展.

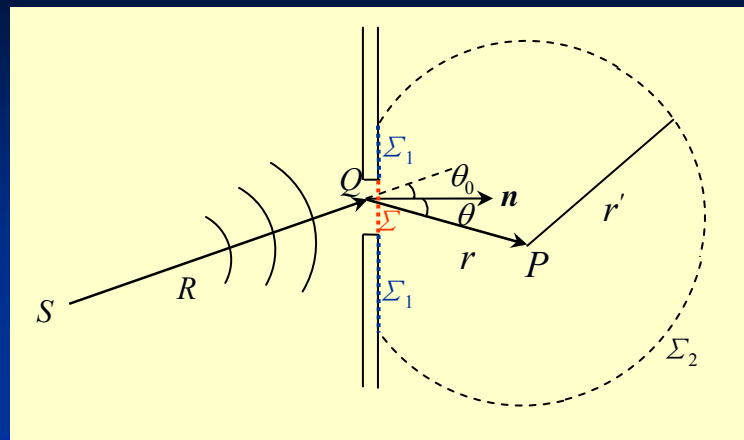
屏对场的影响只发生在孔径边缘波长量级的极小范围,

所以只要  $\Sigma$  的线度及  $S, P$  与开孔的距离远大于  $\lambda$ , 上述二假设成立.



### 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

闭曲面  $\Sigma' = \Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$



$$\oiint_{\Sigma'} \dots d\sigma = \iint_{\Sigma} \dots d\sigma + \iint_{\Sigma_1} \dots d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \dots d\sigma$$

$$\begin{array}{ccc} \text{边界条件 2} & \parallel & \\ 0 & & \downarrow r' \rightarrow \infty \\ & & 0 \end{array}$$

运算结果

$$\tilde{\mathbf{E}}(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \tilde{\mathbf{E}}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{2} (\cos \theta_0 + \cos \theta) d\sigma$$

—— 基尔霍夫衍射积分公式



### 与菲涅耳衍射公式的区别:

1) 积分区域转化为透光孔径  $\Sigma$ .

2) 求出了倾斜因子的具体形式  $F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos \theta_0 + \cos \theta)$

$$\theta_0=0 \text{ 时, } F(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\theta_0=\theta=0 \text{ 时, } F=1$$

$F$  随着  $\theta_0$ ,  $\theta$  的增大而减小的总体趋势不变.

3) 求出  $c$  的表达式  $c = \frac{1}{i\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{-i\pi/2}$

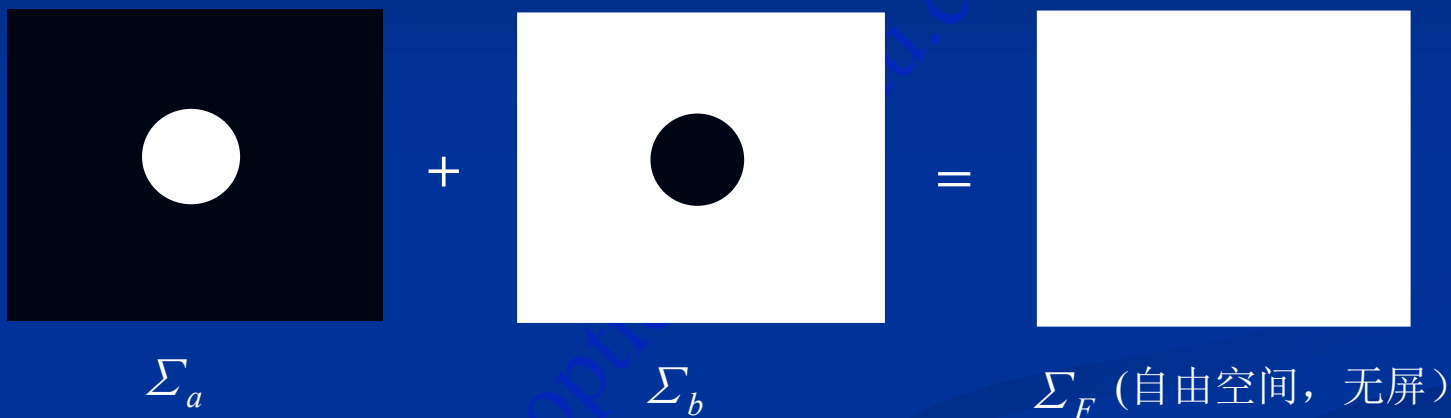
$Q$  点处次波复振幅可以写为  $\tilde{E}'(Q) = \frac{1}{\lambda} e^{-i\pi/2} \tilde{E}(Q) = \frac{1}{\lambda} e^{-i\pi/2} \cdot \frac{A}{R} e^{ikR}$

与真实波复振幅  $\tilde{E}(Q)$  相比相位超前了  $\pi/2$



### 三. 巴俾涅 (Babinet) 原理

#### 互补屏



(黑色: 不透光区; 白色: 透光区.)

$\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 的透光区域之和是整个透光平面 $\Sigma_F$

$\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 称为一对互补屏





### 一对互补屏的衍射

$$S \bullet \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_a \\ \bullet P \end{array} \right. \quad \tilde{E}_a(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_a} \dots \dots d\sigma$$

$$S \bullet \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_b \\ \bullet P \end{array} \right. \quad \tilde{E}_b(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_b} \dots \dots d\sigma$$

$$S \bullet \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_F \\ \bullet P \end{array} \right. \quad \tilde{E}_F(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_F} \dots \dots d\sigma \quad \text{自由空间传播}$$

$$\because \Sigma_a + \Sigma_b = \Sigma_F, \quad \therefore \tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) = \tilde{E}_F(P).$$



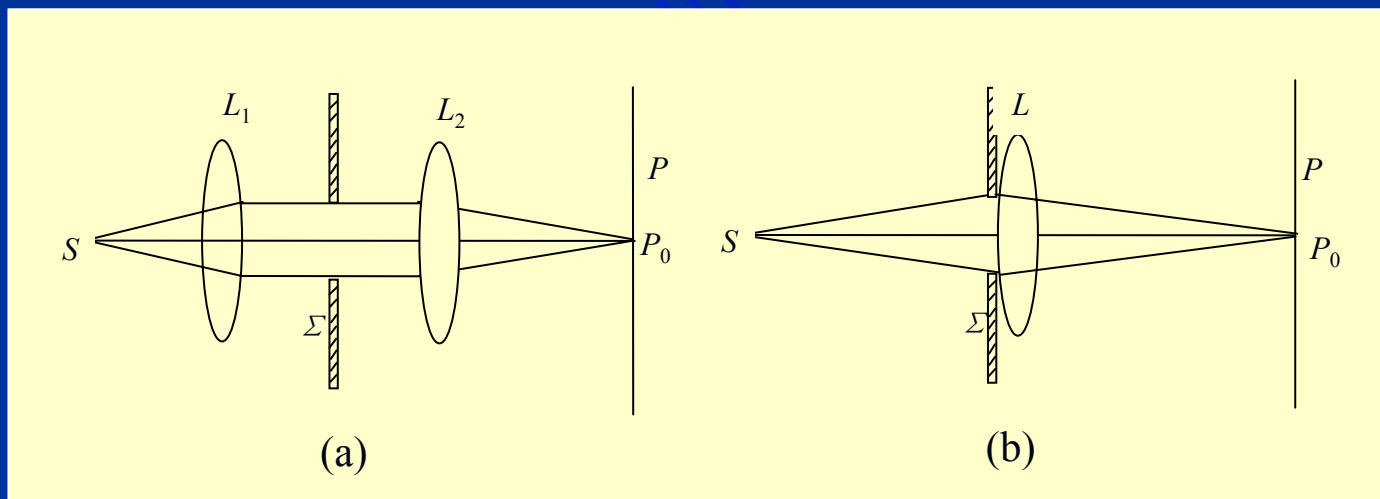
### 4.1.2 惠更斯—菲涅耳原理及平面屏衍射理论

$$\tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) = \tilde{E}_F(P)$$

应用特例： $\tilde{E}_F(P) = 0$

$$\tilde{E}_a(P) = -\tilde{E}_b(P),$$

$$I_a(P) = I_b(P)$$



即一对互补屏所形成的衍射图样  
在除光源的几何像点外的所有区域都相同



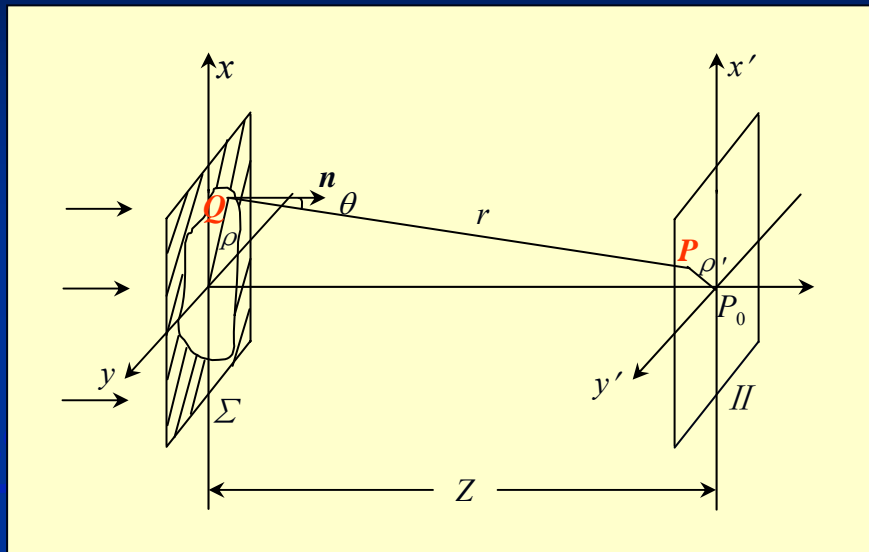
### 4.1.3 衍射问题的近似处理及分类

#### 一. 平面屏衍射问题的近似处理

单色光正入射

$\Sigma$ : 孔径平面,  $Q(x, y)$

$\Pi$ : 观察平面,  $P(x', y')$



由基尔霍夫公式  $\theta_0=0$ , 可以得到

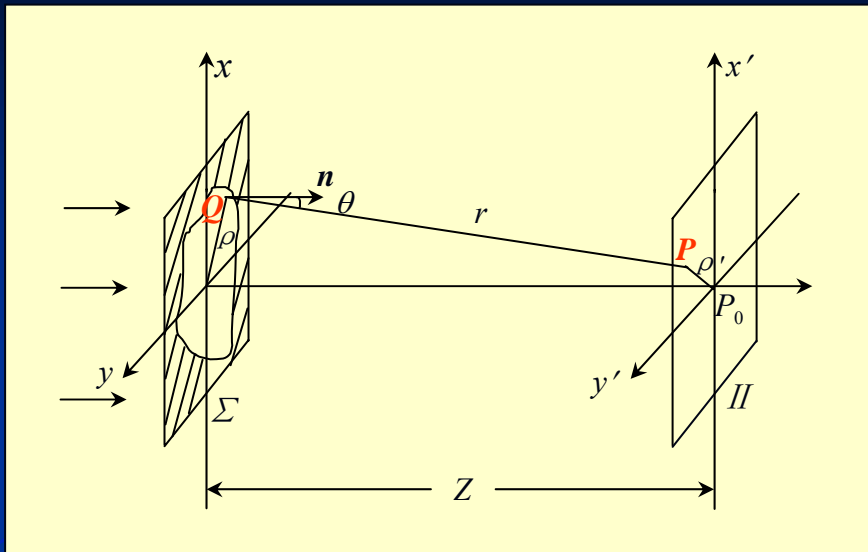
$$\tilde{E}(x', y') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) dx dy$$



### 4.1.3 衍射问题的近似处理及分类

#### 1. 傍轴近似 (Fresnel 近似)

杨氏实验中曾引入过，  
这里孔径及观察区域  
都应为傍轴.



条件:  $\rho_M^2 = (x^2 + y^2)_M \ll Z^2$ ,  $\rho'_M{}^2 = (x'^2 + y'^2)_M \ll Z^2$

$\rho_M, \rho'_M$ :  $Q, P$  对纵轴 ( $Z$ ) 的最大横向偏离

近似关系:  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{Z}$

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + Z^2} \approx Z + \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2Z}$$



### 4.1.3 衍射问题的近似处理及分类

代入基尔霍夫公式

$$\tilde{E}(x', y') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) dx dy$$

得

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y') &= \frac{1}{i\lambda Z} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) e^{ikr} dx dy \\ &= \frac{1}{i\lambda Z} e^{ikZ} e^{\frac{ik}{2Z}(x^2+y^2)} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) e^{\frac{i\pi}{\lambda Z}(x^2+y^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{光强 } I(x', y') = |\tilde{E}(x', y')|^2 = \frac{1}{(\lambda Z)^2} \left| \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) e^{\frac{i\pi}{\lambda Z}(x^2+y^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')} dx dy \right|^2$$

菲涅耳衍射公式



## 2. 远场近似 (Fraunhofer 近似)

在满足傍轴近似的前提下, 若  $Q$  点进一步满足

$$\text{条件 } \frac{\pi}{\lambda Z} \rho_M^2 \ll \pi, \quad \text{即 } Z \gg \frac{\rho_M^2}{\lambda}$$

在孔径  $\Sigma$  整个透光区有近似关系  $\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda Z}(x^2 + y^2)\right] \approx 1$

$$\text{可得 } \tilde{E}(x', y') = \frac{1}{i\lambda Z} e^{ikZ} e^{\frac{ik}{2Z}(x'^2 + y'^2)} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx' + yy')\right] dx dy$$

$$I(x', y') = \left| \tilde{E}(x', y') \right|^2 = \frac{1}{(\lambda Z)^2} \left| \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx' + yy')\right] dx dy \right|^2$$

夫琅禾费衍射公式 —— F.T.

$$\text{实用条件 } Z \geq 10 \frac{\rho_M^2}{\lambda}$$

例:  $\rho_M = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 0.6 \text{ } \mu\text{m}$ .  $Z = 10 \text{ cm}$  即可充分满足傍轴近似

但  $Z \geq 1670 \text{ m}$  才能满足远场近似!



## 二. 衍射的分类

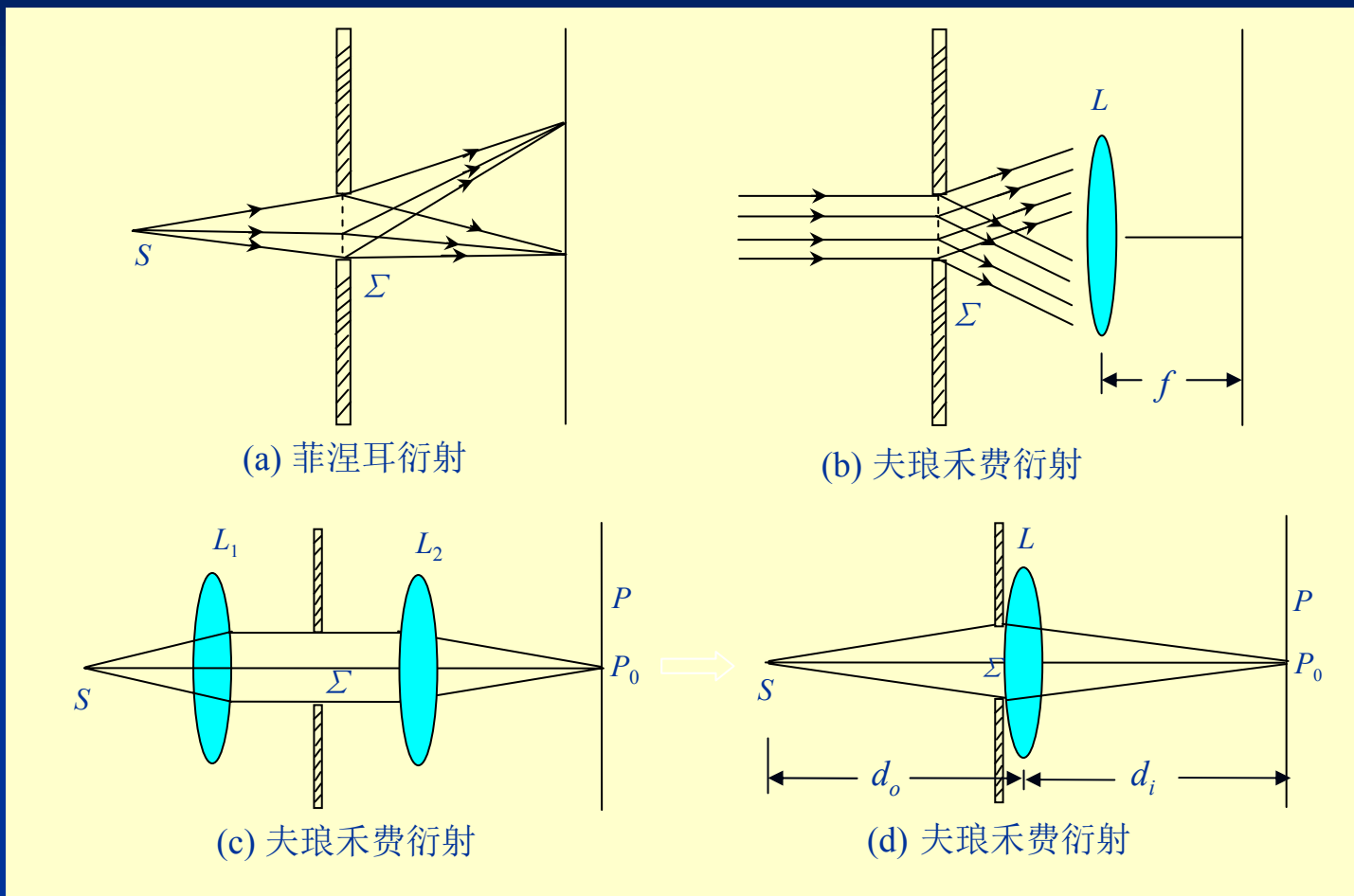
按以上两种近似可把衍射近似分为两类

	菲涅耳衍射	夫琅禾费衍射
1	源点和场点均满足傍轴近似， 但不同时满足远场近似	源点和场点均满足远场近似
2	源点和（或）场点在有限远处	源点和场点均在无限远处
3	非平行光的衍射	平行光的衍射
4	光源面和接受平面非物像共轭面	光源面和接受平面为物像共轭面



### 4.1.3 衍射问题的近似处理及分类

#### 菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的各种情况



更仔细区分，从屏向右：几何阴影区，菲涅耳衍射区，夫琅禾费衍射区





## 4.2 菲涅耳衍射

### 4.2.1 菲涅耳衍射的分析方法

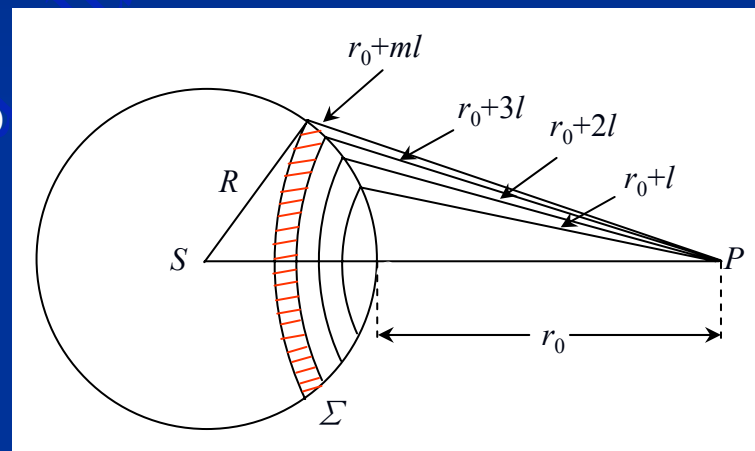
数值积分繁冗; 可以采用定性, 半定量的方法.  
其基本出发点: 次波相干叠加  $\rightarrow$  矢量合成

#### 一. 矢量图解法

$S$  单色点源,  $\Sigma$  某时刻的波面 (球面)  
求场点  $P$  处的扰动

#### 1. 波带分割

以  $P$  点为中心, 取一小正数  $l$ ,  
以  $r_0+l, r_0+2l, r_0+3l, \dots$  为半径作球面,  
在  $\Sigma$  上截取一圈圈环带——波带



点光源波面的波带分割

当  $l \ll \lambda$  时, 元波带  $\left\{ \begin{array}{l} \text{同一元波带上各点到 } P \text{ 点光程相同} \\ \text{相邻元波带到 } P \text{ 点光程均相差 } l \end{array} \right.$

$P$  点光场是所有元波带在该点贡献的相干叠加

2. 各波带在  $P$  点产生的振幅和相位

## (1) 振幅:

第  $m$  个波带在  $P$  点的振幅

$$\Delta A_m \propto \frac{d\sigma_m}{r_m} F(\theta_m)$$

 $\rho_m$ , 波带外缘半径;  $h_m$ , 球冠高度

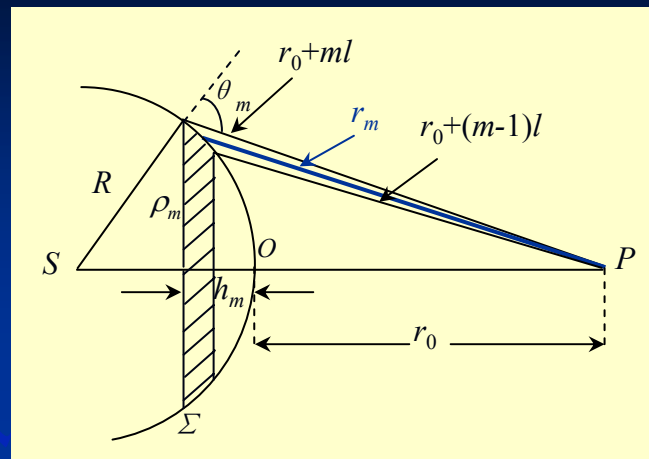
$$\rho_m^2 = h_m(2R - h_m) = (r_0 + ml)^2 - (r_0 + h_m)^2$$

解出  $h_m$ , 代入前  $m$  个波带的球冠面积公式  $S_m = 2\pi R h_m$ 

$$\text{第 } m \text{ 个波带面积 } d\sigma_m = S_m - S_{m-1} = \frac{2\pi R l}{R + r_0} \left[ r_0 + \left(m - \frac{1}{2}\right)l \right]$$

$$\text{第 } m \text{ 个波带到 } P \text{ 点平均距离 } r_m = r_0 + \left(m - \frac{1}{2}\right)l$$

$$\text{由上两式可知比值 } \frac{d\sigma_m}{r_m} = \frac{2\pi R l}{R + r_0} \text{ 与 } m \text{ 无关.}$$

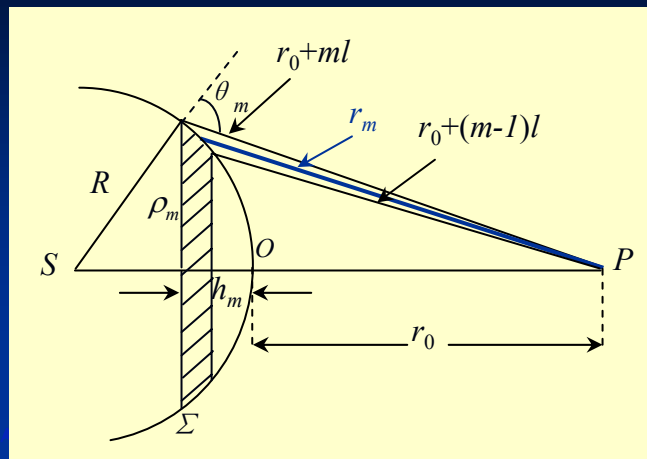
第  $m$  个波带截面图



## 4.2.1 菲涅耳衍射的分析方法

$$\Delta A_m \propto \frac{d\sigma_m}{r_m} F(\theta_m)$$

$$\frac{d\sigma_m}{r_m} = \frac{2\pi Rl}{R+r_0} \text{ 与 } m \text{ 无关.}$$



第  $m$  个波带截面图

故  $\Delta A_m$  的变化仅来源于  $F(\theta_m)$  的变化,

随  $m$  增大,  $F(\theta_m)$  从 1 降为 0,  $\Delta A_m$  单调递减到 0.

但由于波带分割很密, 其递减速率很慢.

### (2) 相位:

$m$  向外一个序号, 振动相位增加 (落后) 一定值

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} l$$



## 3. 矢量合成图

将各元波带在  $P$  点产生的复振幅看作一元矢量  $\Delta A_m$ : 振幅为  $\Delta A_m$ , 相位依次差  $\delta$

将所有元矢量叠加起来 --- 首尾相接  
 设  $O$  点次波源在  $P$  点相位为 0 (水平向右)

$\Delta A_m$  大小不变, 依次向上偏移  $\delta$

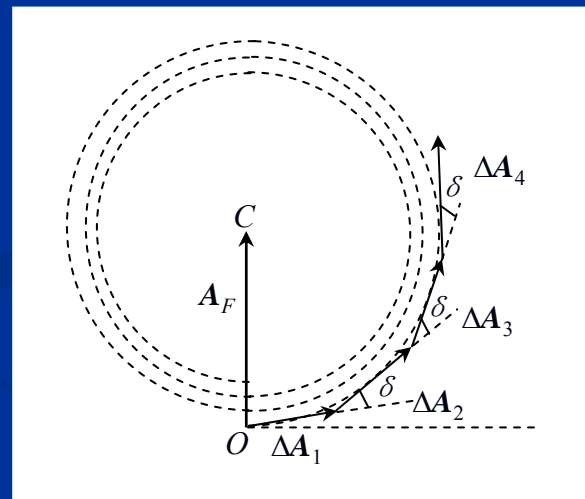
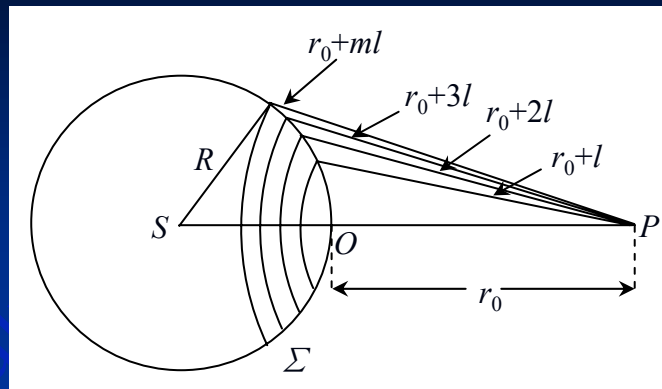
若无倾斜因子影响, 当  $\delta$  变化  $2\pi$  时回到原点  
 但  $F(\theta)$  缓慢减小到 0,  $\Delta A_m$  也缓慢减小到 0,  
 折线向中心逐渐盘曲 --- 螺旋折线.

$l \rightarrow 0$  时, 螺旋折线  $\rightarrow$  螺线

收缩速度极慢, 每转一圈,  $r$  增大  $\lambda$ ,

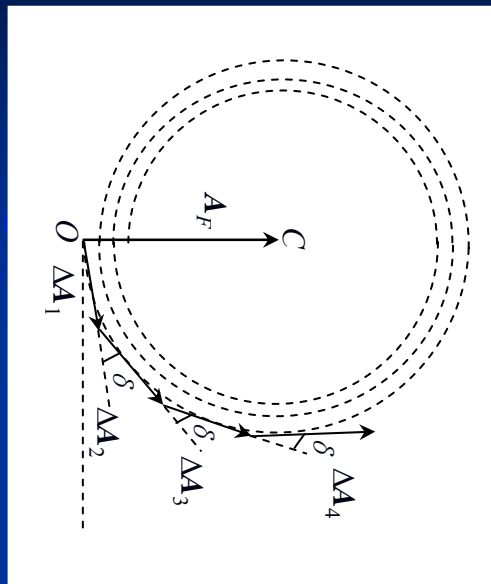
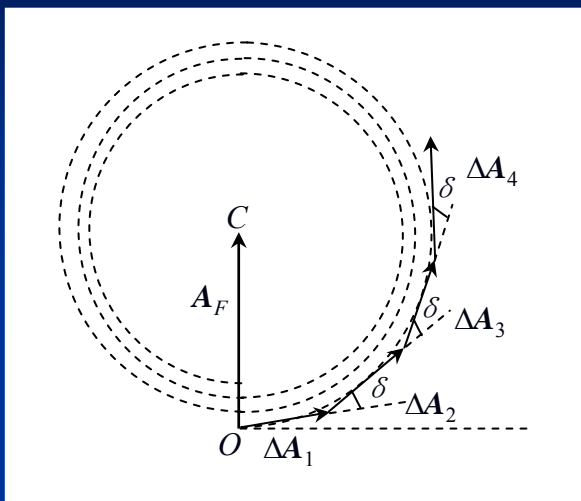
相位变化  $2\pi$ ; 最后  $F(\theta)$  趋于 0,  $\Delta A_m$  也趋于 0, 螺线盘曲到中心.

$$\text{合矢量 } \mathbf{A}_F = \overrightarrow{OC} \quad \text{光强 } I_F = A_F^2$$





## 4.2.1 菲涅耳衍射的分析方法



### 讨论:

左图中, 设 $O$ 点次波在 $P$ 点相位为参考相位 $0$ , 得 $A_F$ 向上, 相位比前者落后 $\pi/2$ .

若设 $O$ 点次波相位为 $-\pi/2$ , 即起始矢量向下(右图), 则 $A_F$ 向右, 与自由传播时相同.

以后只考虑强度, 相位 $-\pi/2$ 无影响



## 二. 半波带法

取  $l = \lambda/2$ , 则  $\delta = \pi$ , 相应的波带称为**半波带**

**半波带法**: 在矢量合成时, 将每一个半波带作为一个整体考虑.

相当于把螺线上**每一个近似半圆的弧简化为一单矢量.**

矢量图解法的**简化和归并**

**相邻半波带相位差 $\pi$ , 方向相反**

第一个半波带绕半周  $A_1 = \overline{OM_1}$

第二个半波带再绕半周  $A_2 = \overline{M_1N_1}$

第三个半波带再绕半周  $A_3 = \overline{N_1M_2}$

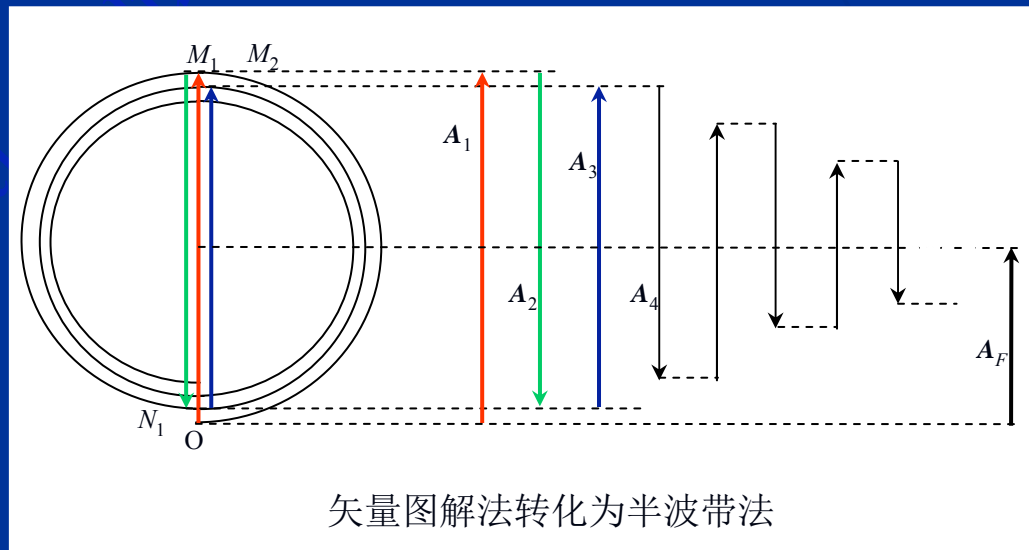
.....以下依次类推

对于自由传播, 最后转到中心

$$A_F = A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \frac{1}{2} A_1$$

$$I_F = \frac{1}{4} I_1$$

半波带法可用来分析极值条件



习题: 1, 4



## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

## 一. 圆孔衍射

右图装置： $S$  单色点光源

$\Sigma$  圆孔孔径，半径为  $\rho$

## 1. 轴上点

先确定圆孔对点  $P$  露出的半波带数  $m$

由上节结果， $h \ll 2R$  时，有

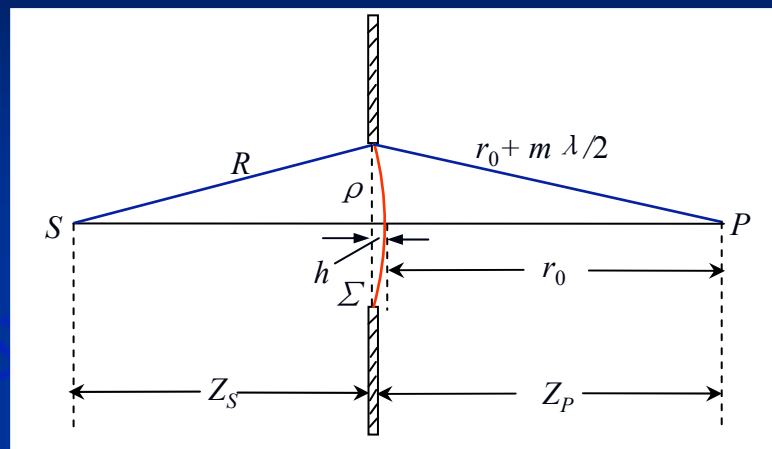
$$\rho_m = \left[ 2ml \frac{Rr_0}{R+r_0} \left( 1 + \frac{ml}{2r_0} \right) \right]^{1/2}$$

对半波带， $l = \lambda/2$ ，若孔径满足傍轴近似： $\rho^2 \ll Z_S^2, Z_P^2$ ，  
则  $m\lambda/4r_0 \ll 1$ ，上式化为

$$\rho_m = \sqrt{\frac{Rr_0}{R+r_0} m\lambda} \quad \xrightarrow{\rho_m = \rho} \quad m = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} \right) \frac{\rho^2}{\lambda}$$

傍轴近似

$$m = \left( \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_P} \right) \frac{\rho^2}{\lambda}$$



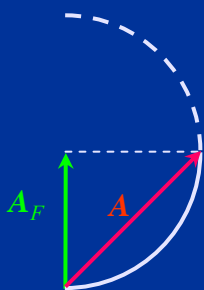


## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

求出 $m$ 后, 即可用矢量图解法( $m \neq$ 整数)和半波带法( $m =$ 整数)求解.

### 矢量图解法分析圆孔衍射

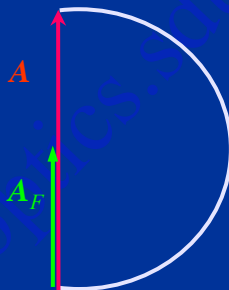
$m = 1/2$



$$A = \sqrt{2} A_F$$

$$I = 2I_F$$

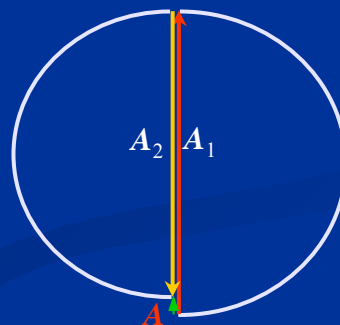
$m = 1$



$$A = 2A_F$$

$$I = 4I_F$$

$m = 2$



$$A = A_1 - A_2 \approx 0$$

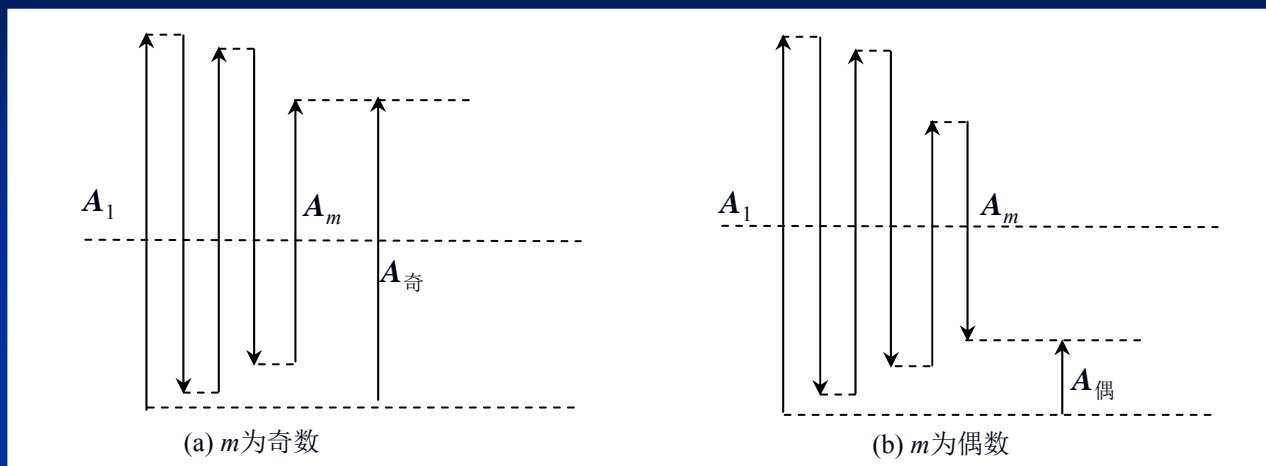
$$I \approx 0$$





## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

### 半波带法分析圆孔衍射



可见,  $m$ 为奇数时,  $I$ 达到极大值

$$I_{\text{奇}} = \frac{1}{2}(A_1 + A_m);$$

$m$ 为偶数时,  $I$ 达到极小值

$$I_{\text{偶}} = \frac{1}{2}(A_1 - A_m).$$

**动态变化:**  $\lambda$ 给定,  $m=m(Z_s, Z_p, \rho)$ . 三者之一变,  $m$ 变,  $I_p$ 变.

情况1:  $Z_s, \rho$ 定,  $P$ 从无限远移近,  $Z_p \downarrow$ ,  $m \uparrow$ ,

(1)  $P$ 点亮暗交替,  $m$ 奇数时亮,  $m$ 偶数时暗;

(2) 亮暗起伏幅度越来越小, 因相邻 $A_{\text{奇}}$ ,  $A_{\text{偶}}$ 差别越来越小.

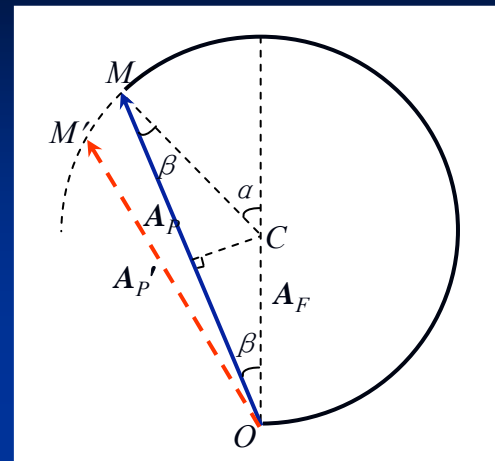
情况2:  $m$ 非整数, 用矢量图解法分析.



## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

**例：**点光源 $S$ ， $\lambda=600\text{nm}$ ， $Z_s=1\text{m}$ ， $\rho=0.5\text{mm}$ ， $Z_p=0.5\text{m}$ ， $P$ 为轴上点.求：(1)  $I_p/I_F$ ？

- (2) 其他参量不变， $\rho$  稍微增大时 $I_p$  如何变化？  
 (3) 其他参量不变， $P$ 点稍向孔径平面移近时 $I_p$  如何变化？  
 (4) 其他参量不变， $P$ 点从初始位置向孔径平面移近时，距该平面多远时  $I_p$  第一次出现极大？



**解：** (1)  $m = \left(\frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_p}\right) \frac{\rho^2}{\lambda} = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{500}\right) \times \frac{0.5^2}{6 \times 10^{-4}} = 1\frac{1}{4}$

作图，由几何关系知  $\alpha = 45^\circ$ ， $\beta = 22.5^\circ$  .

$$A_P = 2 A_F \cos 22.5^\circ = 1.85 A_F, \quad I_p / I_F = 1.85^2 = 3.4 .$$

(2)  $\rho \uparrow : m \uparrow$ ， $M \rightarrow M'$ ， $A_P \rightarrow A_{P'}$ ， $A_{P'} < A_P$ ， $P$ 点光强减小.

(3)  $Z_p \downarrow : m \uparrow$ ， $P$ 点光强减小.

(4)  $P$ 从初始位置移向孔径平面， $m=2$ 时，第一次出现极小值；  
 $m=3$ 时，第一次出现极大值，由该 $m$ 可求出  $Z_p=16.1\text{cm}$ .

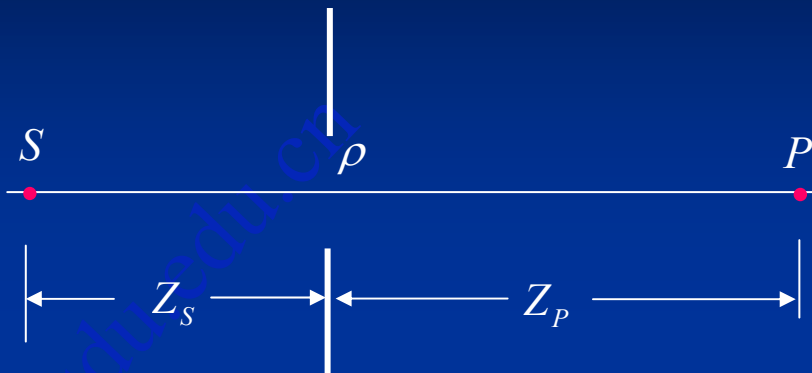


## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

**讨论：**圆孔菲涅耳衍射中轴上点从无限远移近时的光强变化

应用公式

$$m = \left( \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_P} \right) \frac{\rho^2}{\lambda}$$



先算出  $P$  点趋于无限远时相应的  $m_\infty = \frac{\rho^2}{\lambda Z_S}$

根据  $P$  点移近时  $m \uparrow$ , 判断第一个极值相应的  $m$ , 从而确定  $P$  点移近时各极大极小值出现的次序和位置.

**思考：**(1) 若  $m_\infty = 0.5, 1.2, 1.8, 2.3, \dots$  各有何结论？

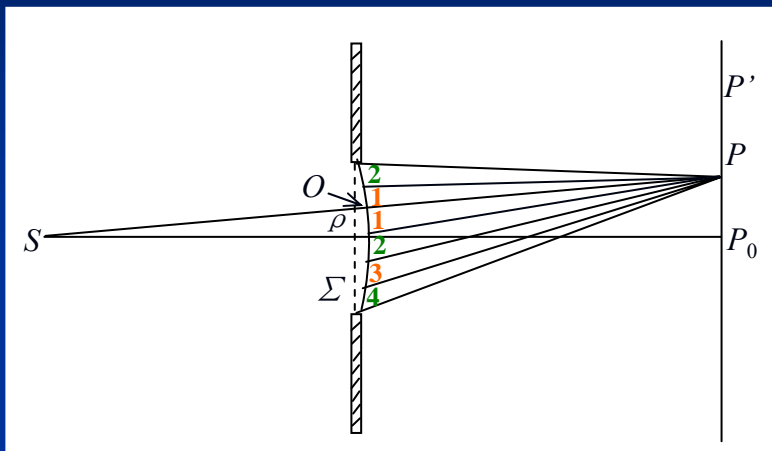
(2) 若平行光正入射呢？

(3) 同理分析  $Z_S$  和  $\rho$  变化的情况.

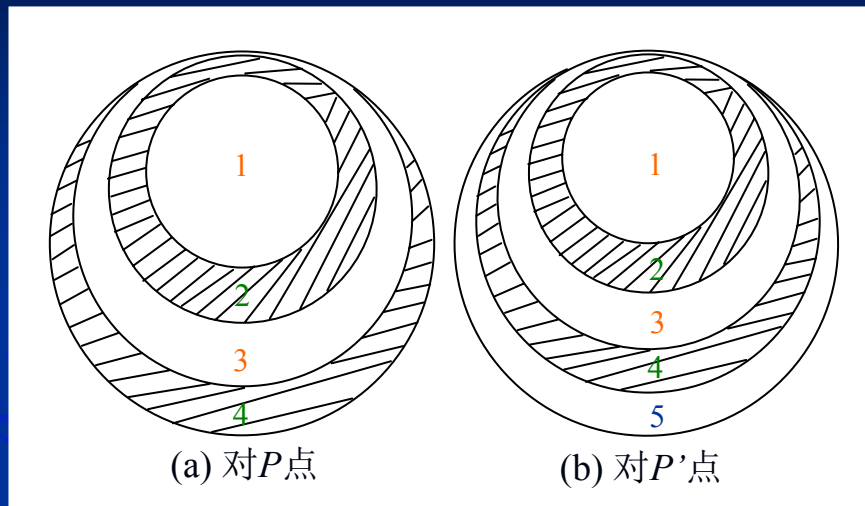


## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

### 2. 轴外点



对  $P$  点圆孔所露出的半波带划分



对不同轴外点圆孔所露出的半波带部分

$P$  点: 1和2抵消, 3和4抵消, 暗;

$P'$  点: 1和2抵消, 3和4抵消, 还有5作贡献, 亮.

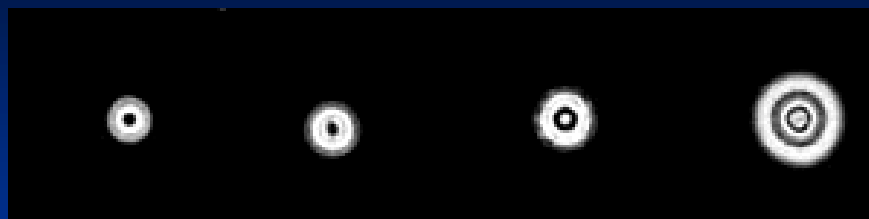
故沿径向向外光强有亮暗变化.

由圆对称性推广到整个屏.

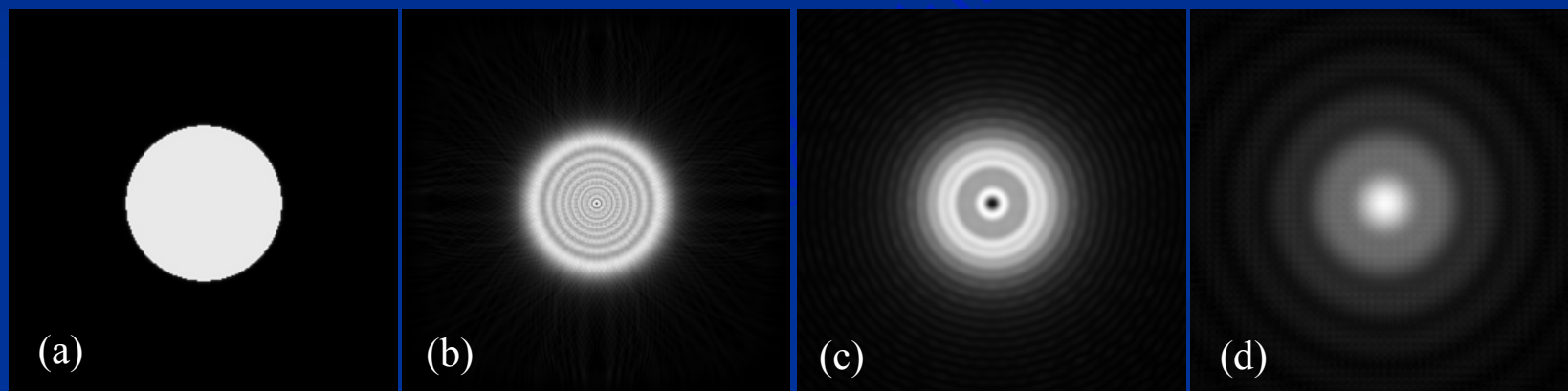
可知图案是从中心向外亮暗交替的圆环.



## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射



圆孔菲涅耳衍射图样的照片



圆孔菲涅耳衍射的模拟图样. (a) 圆孔, (b)  $F=18$ , (c)  $F=4$ , (d)  $F=1$ .

其中  $F = R^2 / \lambda Z$  称为**菲涅耳数**,  $R$ 为圆孔半径,  $Z$ 为观察距离.

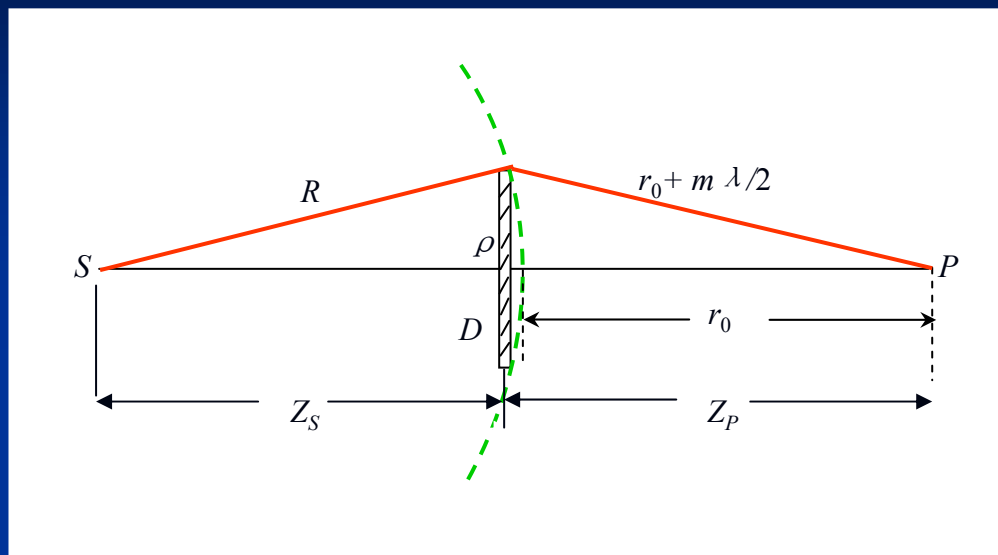
菲涅耳衍射:  $F \geq 1$ ; 夫琅禾费衍射:  $F \ll 1$ .





## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

### 二. 圆屏衍射



如上图所示， $S$  在轴上， $D$  为不透光圆屏

#### 1. 轴上点

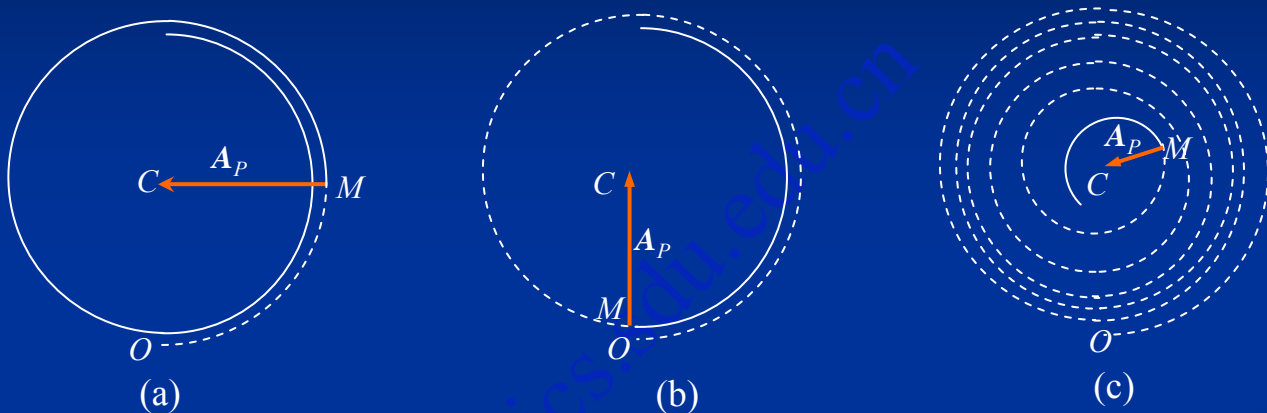
**矢量图解法：**先假定无屏，作出自由传播时的矢量图，  
然后将屏挡住的部分擦去，

从剩余部分的起始点指向螺线中心  $C$  的矢量  $A_P$  即  $P$  点振动的复振幅。



## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

### 用矢量图解法分析圆屏衍射（轴上点）



(a), (b), (c)分别为圆屏挡住了前半个，前两个和前许多个半波带的为情形.

结论： 1) 屏后轴上点总为亮点.

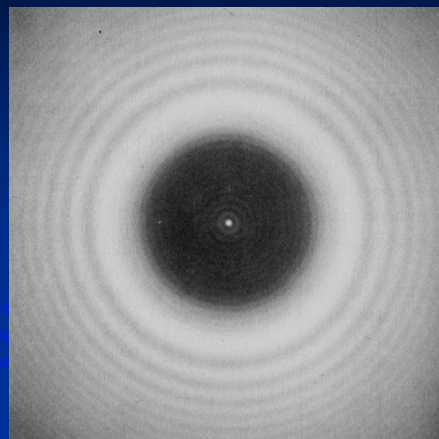
2)  $Z_P$  减小或  $\rho$  增大时， $m$  增大， $A_P, I_P$  均单调缓慢减小.

3)  $Z_P$  很小或  $\rho$  很大时， $m$  很大， $A_P, I_P$  已很小， $P$  处亮点不显著.



### 2. 轴外点

仿照对圆孔衍射的分析，  
或用巴俾涅原理  
(自由传播时傍轴区光场基本均匀)，  
可知围绕中心外部是明暗交替的圆环。

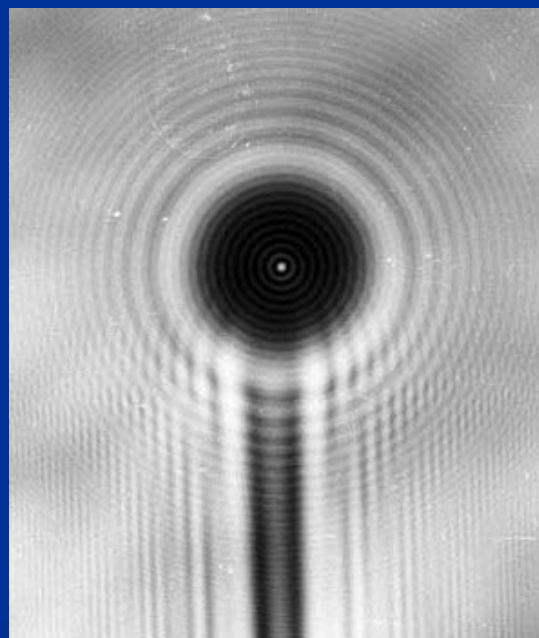


历史回顾：泊松亮点轶事

**思考：**为什么日常生活中难以看到

泊松亮点？(思考题 4.3)

看到泊松亮点的条件是什么？

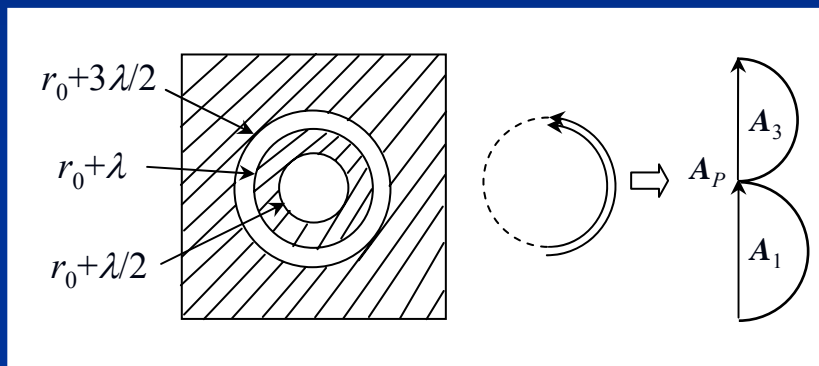




### 三. 某些环、扇形孔径的衍射

基本方法：**矢量图解法**，将各环、扇形孔相对应的矢量叠加。

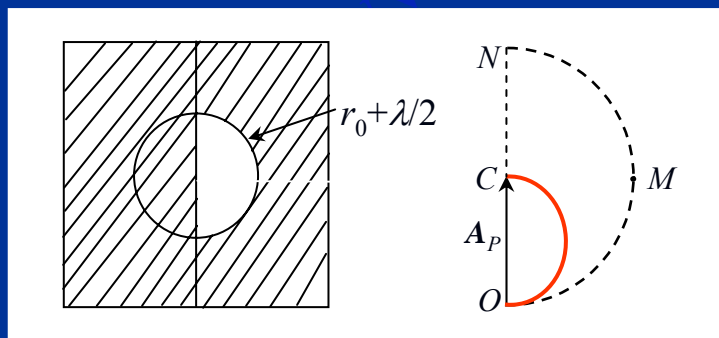
#### 例 1：环形孔径



$$A_P = A_1 + A_3 \approx 2 A_1 = 4 A_F$$

$$I_P = A_P^2 = 16 I_F$$

#### 例 2：半圆孔径



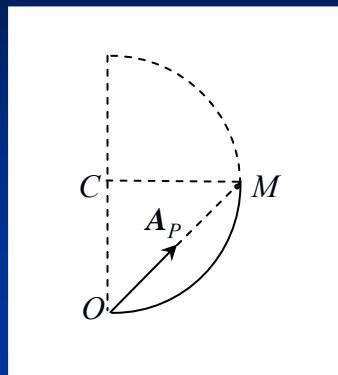
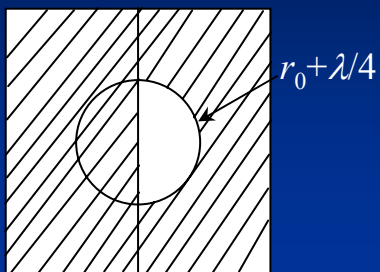
半圆孔径是第一个半波带的半侧，每一元矢量方向不变，长度减半，相应螺线为  $\widehat{OC}$  (注意不是  $\widehat{OM}$ )。

$$A_P = A_F, \quad I_P = I_F$$



## 4.2.2 圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

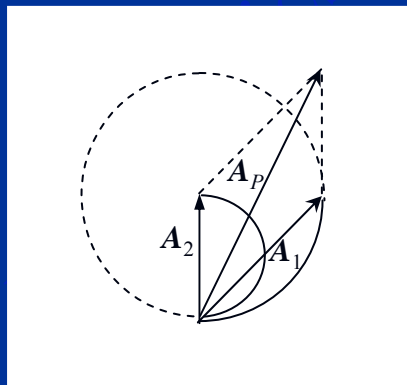
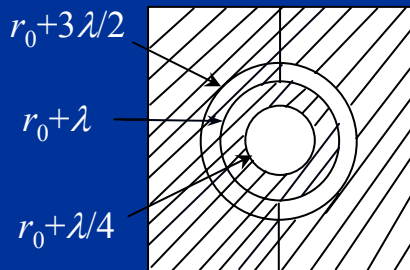
### 例 3: 半圆孔径



$$A_P = \frac{\sqrt{2}}{2} A_F$$

$$I_P = \frac{1}{2} I_F$$

### 例 4: 环扇结合孔径



$$I_P = A_P^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 45^\circ$$

$$= (\sqrt{2}A_F)^2 + A_F^2 + 2\sqrt{2}A_F \cdot A_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 5I_F$$



## 4.2.3 菲涅耳波带片

**菲涅耳波带片**：只让奇（或偶）序数半波带透过的特制的衍射屏。

例：只让第1, 3, 5, 7, 9半波带透过

$$A_P = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 = 5A_1 = 10 A_F, \quad I_P = 100I_F$$

相当于聚焦作用，人称菲涅耳透镜。

## 1. 焦距

$$m = \left( \frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_p} \right) \frac{\rho^2}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{\rho_m^2 / m\lambda}$$

$Z_s, Z_p$  分别相当于物距和像距

$$\text{波带片的焦距为 } f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$$

由于  $\rho_m \propto \sqrt{m}$ ，所以  $f$  与  $m$  无关







## 2. 制法:

确定  $\lambda$ ,  $f$ , 由上式可以得出  $\rho_m = \sqrt{m\lambda f}$

对  $m=1, 2, 3, \dots$  算出相应的半径  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$

放大  $M$  倍作同心圆环, 相间涂黑;

照相缩微到  $1/M$ , 记录到底片或玻璃干板上,

即焦距为  $f$  的波带片.

总环数及最外环半径  $\rho$  的确定:

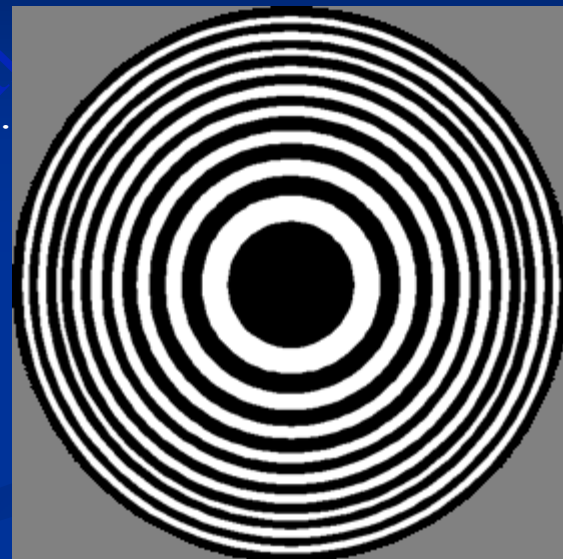
由要求的  $I/I_F$  来确定开环数  $N$

$$A_P = 2NA_F, \quad I_P = 4N^2 I_F \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I_P}{I_F}}$$

若中心闭带, 最外环  $m = 2N$

若中心开带, 最外环  $m = 2N-1$

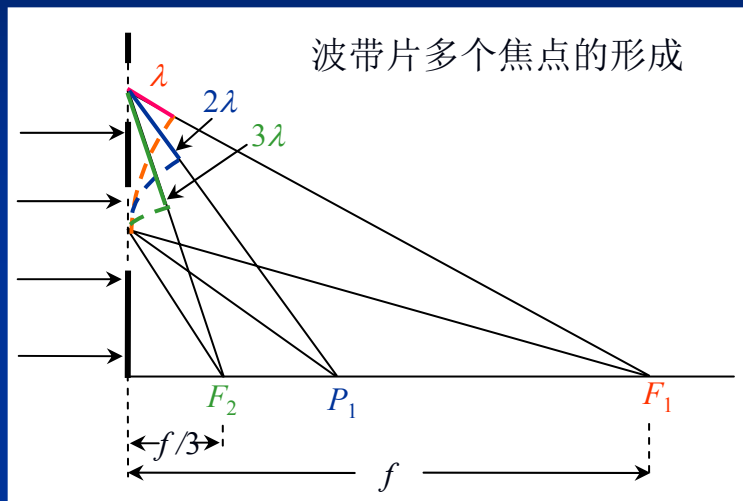
然后根据  $\rho_m = \sqrt{m\lambda f}$  来确定半径.





### 3. 波带片与透镜的区别

#### (1) 波带片有多个焦点



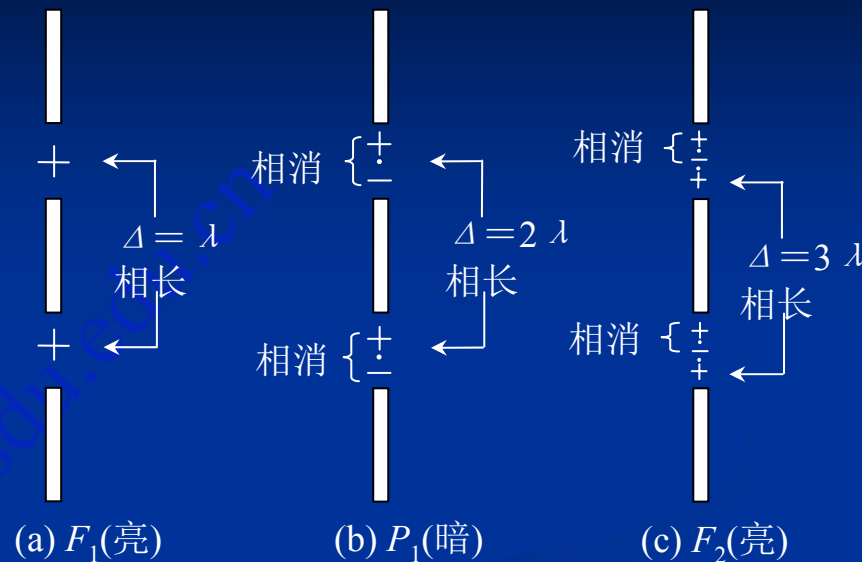
单色平行光正入射

$F_1$  主焦点;  $F_2, F_3, \dots$  次焦点  
 $f_1=f$  主焦距,  $f_2, f_3, \dots$  次焦距

每一个透光带对主焦点  $F_1$  为1个半波带, 相邻透光带光程差  $\lambda$ ;

对次焦点  $F_2$  为3个半波带, 相邻透光带光程差  $3\lambda$ ;

对次焦点  $F_n$  为  $(2n-1)$  个半波带, 相邻透光带光程差  $(2n-1)\lambda$ .



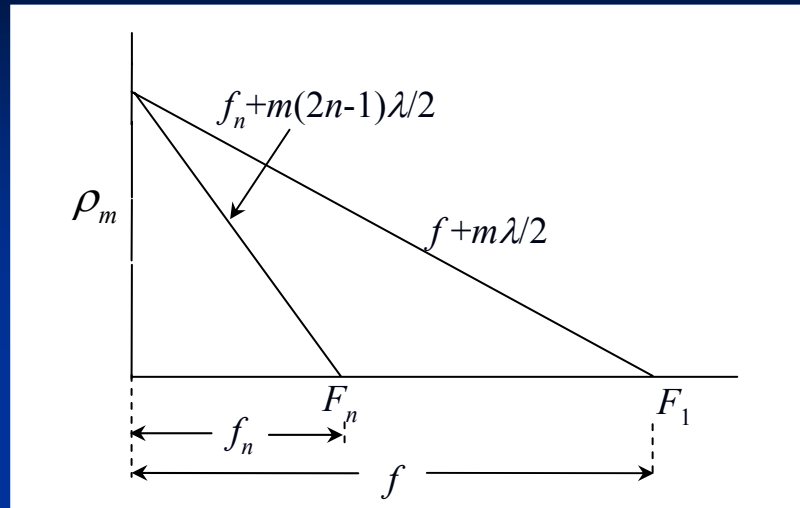
与左图中  $F_1, P_1, F_2$  相应的各半波带的划分及相位关系



### 4.2.3 菲涅耳波带片

#### 各次焦距与主焦距的关系

设波带片有  $m$  个环带  
(透光不透光相同),  
半径  $\rho_m$   
平行光正入射, 有



$$\rho_m^2 + f_n^2 = \left[ f_n + m(2n-1) \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

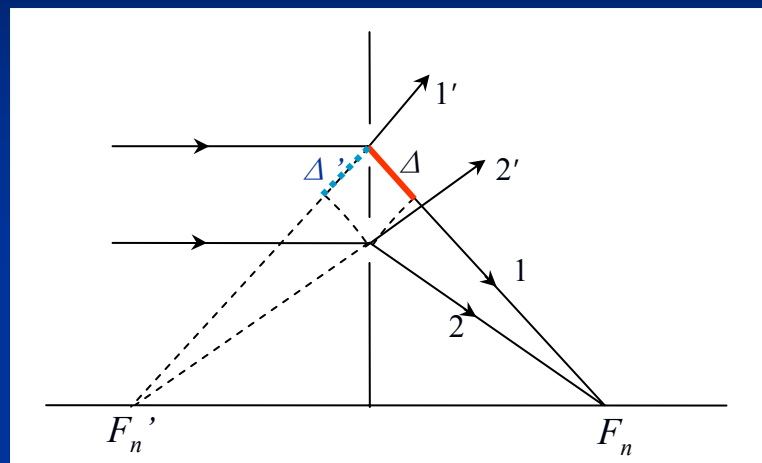
展开忽略  $\lambda^2$ , 得到  $f_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{1}{2n-1} f$

所以次焦距  $f_2 = \frac{f}{3}$ ,  $f_3 = \frac{f}{5}$ ,  $f_3 = \frac{f}{7}$ , .....



### 4.2.3 菲涅耳波带片

由几何对称性可知应有**虚焦点**



$$\Delta' = \Delta$$

1、2 加强则1'、2' 亦加强，故有虚焦点 $F_n'$ 。

**实虚焦点关于波带片平面对称**



## (2) 色散关系与普通透镜相反

普通透镜:  $\lambda \uparrow, n \downarrow, f \uparrow$

波带片:  $f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda}$

$\lambda \uparrow, f \downarrow$

两者可互相补偿校正

## (3) 成像原理不同

普通透镜成像: 等光程相长干涉;

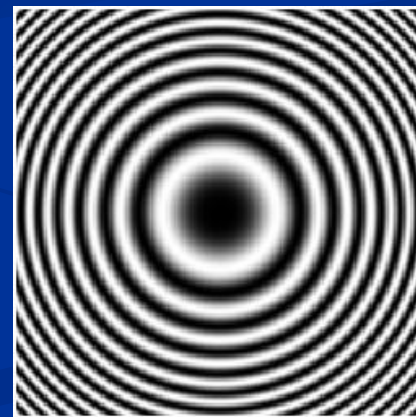
波带片: 不等光程 ( $\Delta = \lambda, 3\lambda, 5\lambda, \dots$ ) 相长干涉

说明: 具有  $\rho_m \propto \sqrt{m}$  的其他结构也可用作波带片

例如牛顿环图样.

这时只有主焦点, 次焦点消失.

(具体分析参考以后章节(正弦光栅)).



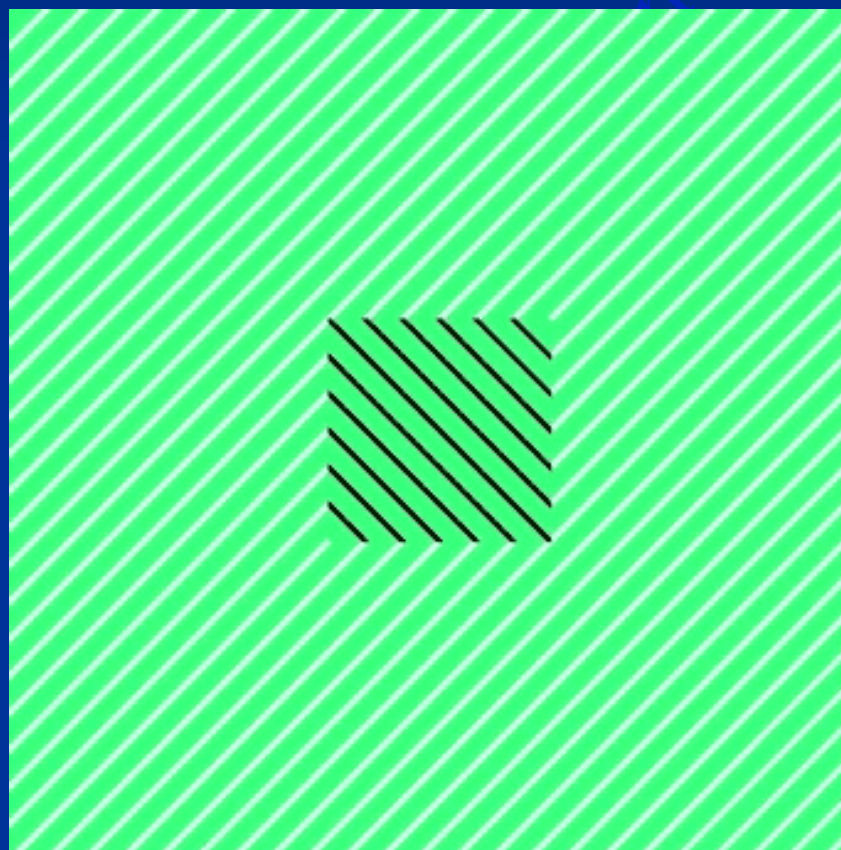
习题: 5, 6, 7, 8, 10

有奖选作题: 思考题 3

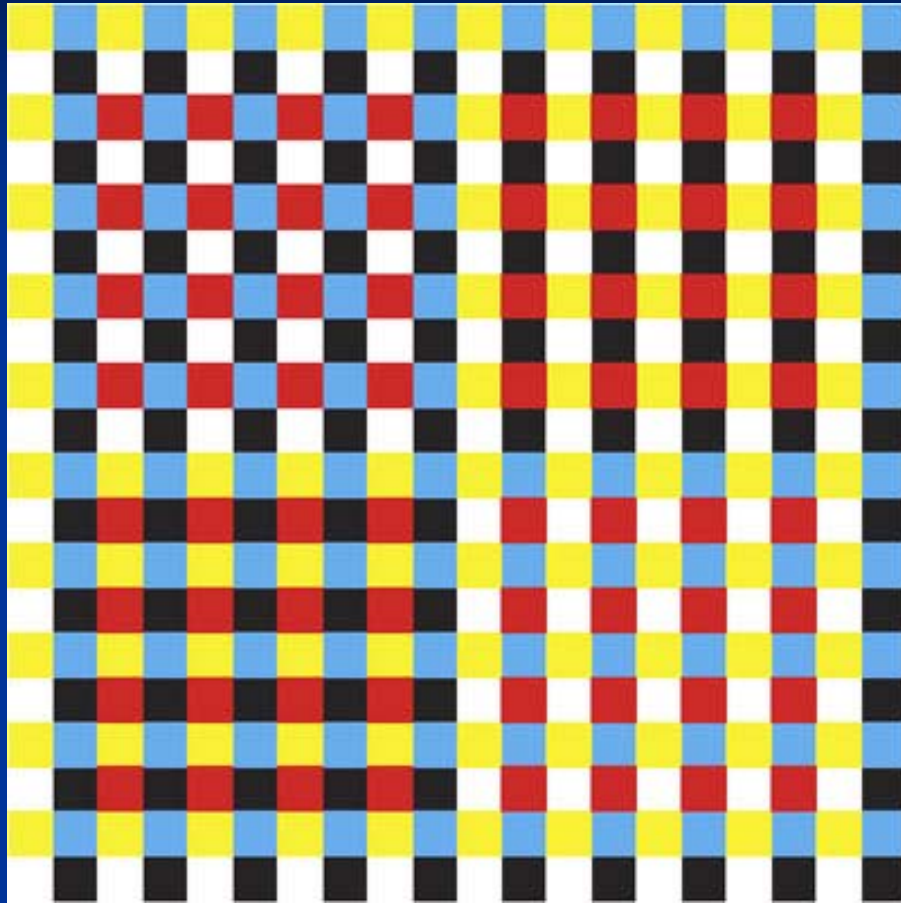


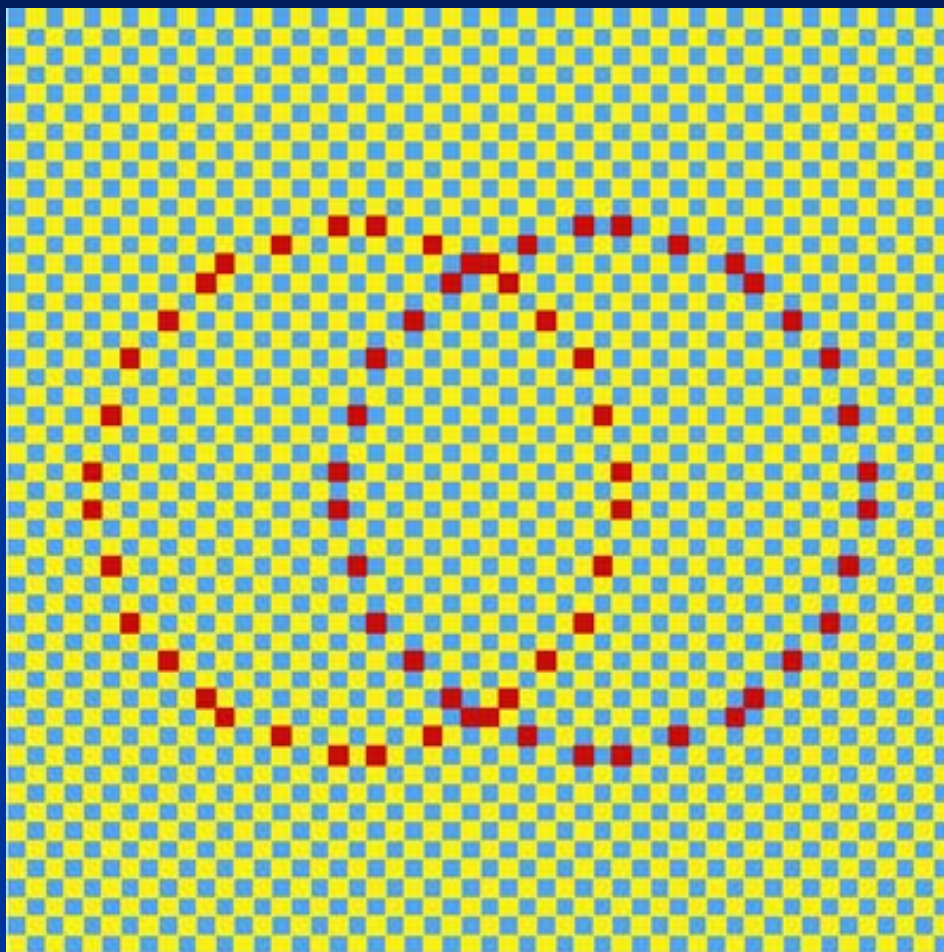
## Refreshments

**Optical illusions: Are these colors different?**











# 4.3 夫琅禾费衍射（一）：连通孔径

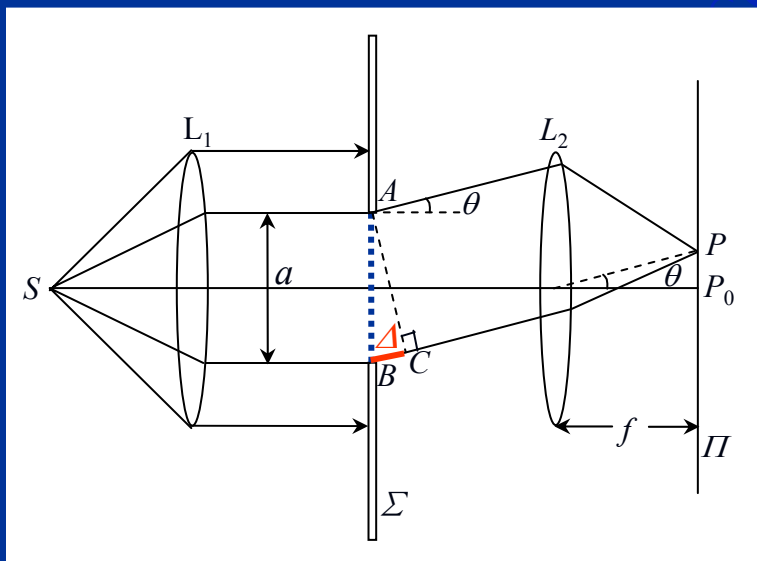
## 4.3.1 单缝衍射

### 一. 理论分析

- 3 种方法
- 半波带法
  - 矢量图解法
  - 公式计算法

以前两者为主，培养直观分析能力.

### 1. 半波带法



将波面  $AB$  分成细条带

边缘光程差  $BC$  为

$$\Delta = a \sin\theta \quad (\theta \text{ 是衍射角})$$

波面  $AB$  所分半波带数

$$N = \Delta / (\lambda/2)$$



### 4.3.1 单缝衍射

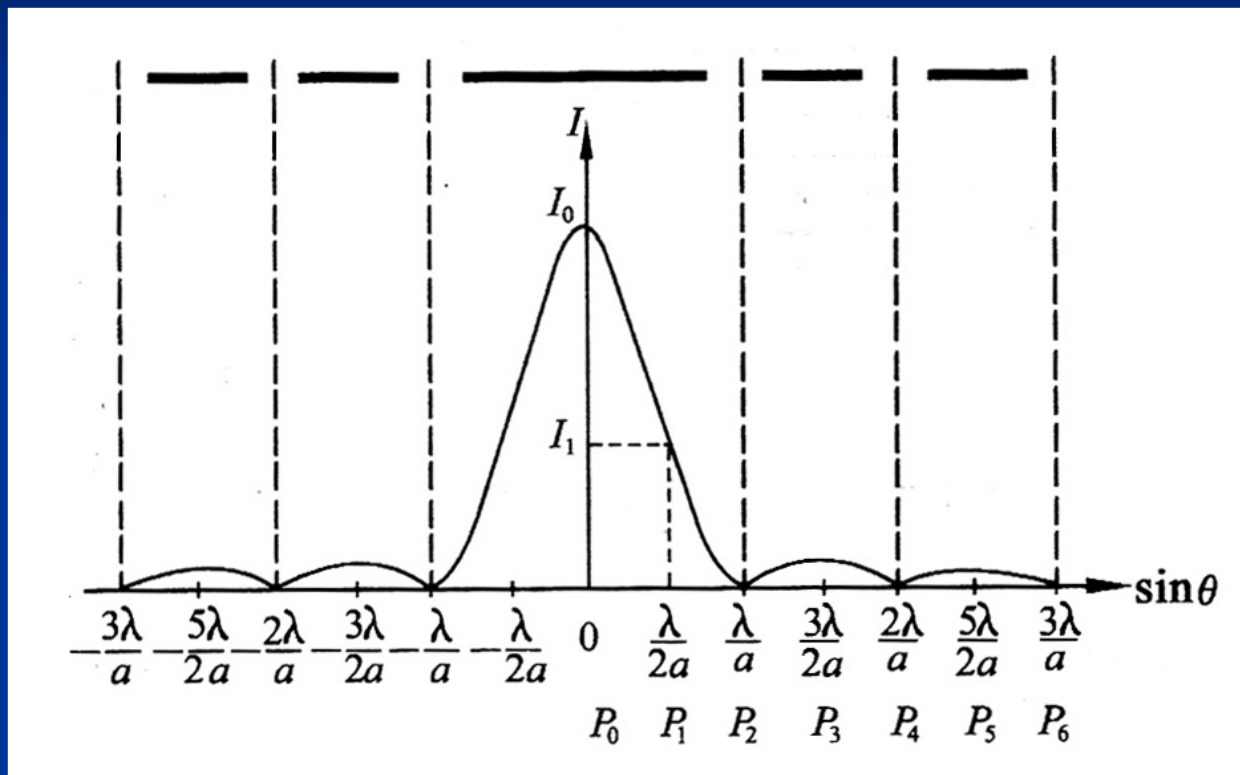
场点	$\Delta = a \sin \theta$	$N$	矢量图	$A_P$	$I_P$	$\sin \theta$	特征
$P_0$	0	0		$A_0$	$I_0$	0	几何像点
$P_1$	$\frac{\lambda}{2}$	1		$A_1 < A_0$	$I_1 < I_0$	$\frac{\lambda}{2a}$	非极值点
$P_2$	$\lambda$	2		0	0	$\frac{\lambda}{a}$	极小 0点
$P_3$	$\frac{3\lambda}{2}$	3		$A_3$	$I_3$	$\frac{3\lambda}{2a}$	极大
$P_4$	$2\lambda$	4		0	0	$\frac{2\lambda}{a}$	极小 0点
$P_5$	$\frac{5\lambda}{2}$	5		$A_5$	$I_5$	$\frac{5\lambda}{2a}$	极大

可见半波带法可得各极值点（极大，消光）



### 4.3.1 单缝衍射

#### 单缝夫琅禾费衍射光强分布





## 2. 矢量图解法

$\theta = 0$  时, 相应的  $A_0 = \overline{OM}$

$\theta \neq 0$  时, 边缘光线相位差

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = 2\alpha$$

令  $F(\theta) = 1$ , 将  $OM$  弯曲为弧线  $\widehat{ON}$

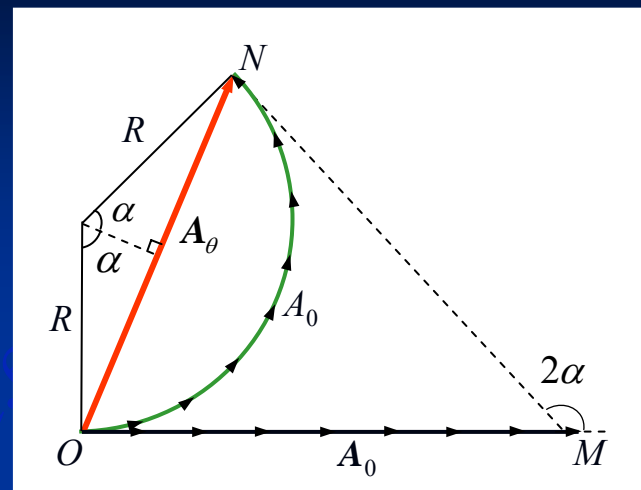
$$A_\theta = \overline{ON}$$

由  $A_0 = \widehat{ON} = R \cdot 2\alpha$  得  $R = \frac{A_0}{2\alpha}$

$$\text{故有 } A_\theta = 2R \sin \alpha = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad I_\theta = A_\theta^2 = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

其中  $I_0 = A_0^2$  几何像点光强

$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$  边缘光线相位差的一半





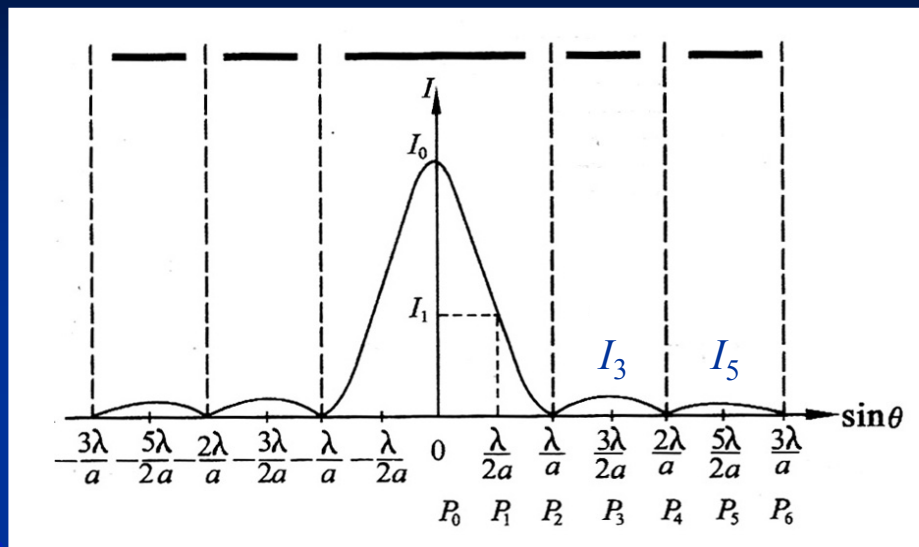


### 4.3.1 单缝衍射

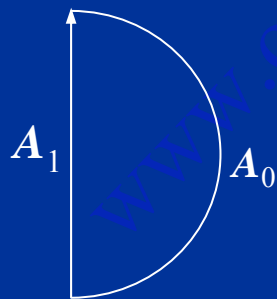
矢量图解法比半波带法更精确

可应用于任何  $\theta$ ，如求前文的

$I_1, I_3, \dots$



例: 求  $I_1$



$$A_1 = \frac{2A_0}{\pi}$$

$$I_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 A_0^2 = 0.405I_0$$

自己算  $I_3, I_5, \dots$



## 3. 公式计算法

$$\text{应用公式 } \tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) e^{ikr} d\sigma$$

$Q$  为  $\Sigma$  上动点

取  $O$  到  $P$  光程为参考光程  $r_0$

$Q$  到  $P$  的光程为

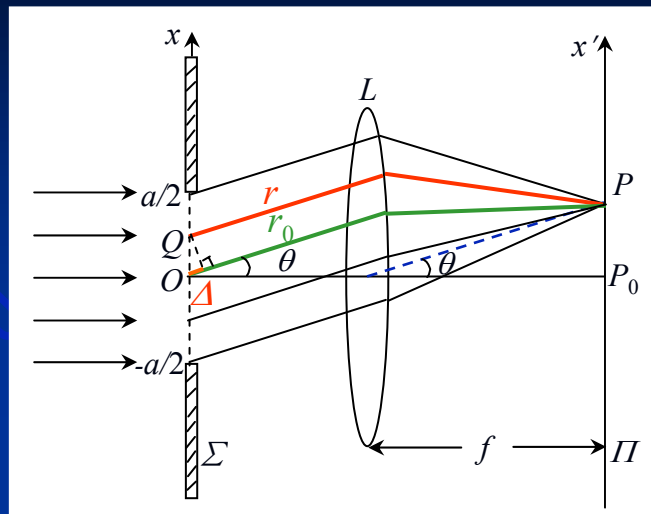
$$r = r_0 - \Delta = r_0 - x \sin \theta$$

$$\Delta = x \sin \theta \quad e^{ikr} = e^{ikr_0} e^{-ik\Delta}$$

将常数因子  $e^{ikr_0}$  提出合并于  $C$ , 则有

$$\tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} e^{-ik\Delta} d\sigma$$

可见  $r_0$  可为任意数, 只改变  $C$ , 不改变光强的相对分布.





### 4.3.1 单缝衍射

单缝可作一维考虑：

$$\tilde{E}(P) = \tilde{E}_\theta = C \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx \sin \theta} dx = Ca \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{其中 } \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

$$\theta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \tilde{E}_0 = Ca \text{ 几何像点的复振幅}$$

$$\tilde{E}_\theta = \tilde{E}_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$I_\theta = |\tilde{E}_\theta|^2 = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$I_0 = |\tilde{E}_0|^2$$

几何像点的光强

换用自变量 $x'$ ：傍轴下有  $\sin \theta \approx \theta \approx \frac{x'}{f}$

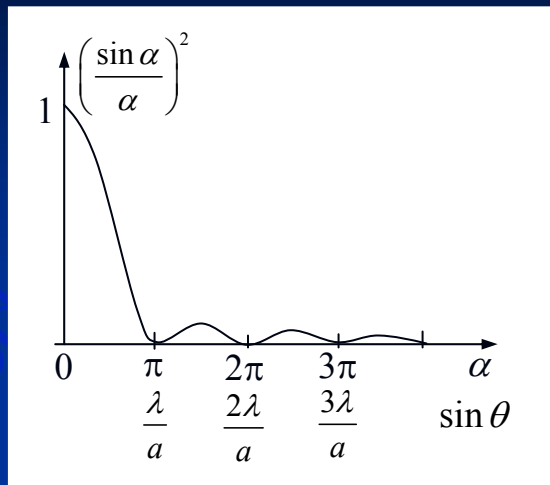
$$I(x') = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi a x' / \lambda f)}{\pi a x' / \lambda f} \right]^2 = I_0 \text{ sinc}^2 \left( \frac{a x'}{\lambda f} \right)$$

$$\text{其中 } \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



## 二. 单缝衍射因子的特点

上式中的  $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$  称为单缝衍射因子



1. 主极强（中心）—0 级衍射斑

$$\alpha = 0, \quad \theta = 0$$

几何光学像点（等光程位置处），对斜入射时也成立。

2. 极小（消光）—在主极大两侧  $\sin \theta$  轴上等距排列。

$$\alpha = m\pi, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

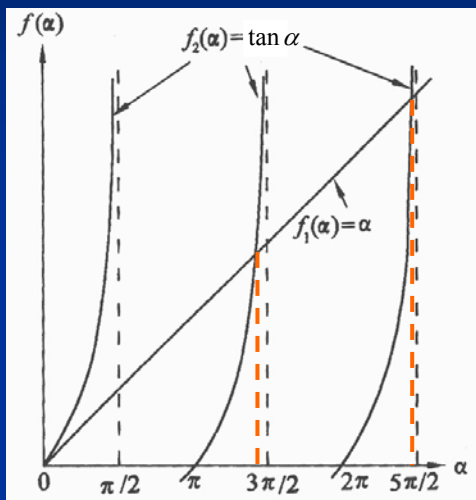
$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$$

$$I_{\theta} = 0 \quad \text{0点}$$

主极强宽度是次极强宽度的两倍



## 3. 次极强—高级衍射斑



其中心位置可由  $\frac{d\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2}{d\alpha} = 0$

来确定，即  $\tan \alpha = \alpha$

可以用数值计算或图解法求解

图解法：由直线  $f_1 = \alpha$  和曲线族  $f_2 = \tan \alpha$

交点的横坐标确定  $\alpha$

$$\alpha = 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi, \dots$$

相应  $\sin \theta = \pm 1.43 \frac{\lambda}{a}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{a}, \pm 3.47 \frac{\lambda}{a}, \dots$  大致处于各极小值中间

将得到的  $\alpha$  带入公式中可求出各次极强中心强度，

随  $m$  增大而迅速减小，最大次极强（一级）也不及主极强的5%，

故能量主要分布于主极强。



### 4.3.1 单缝衍射

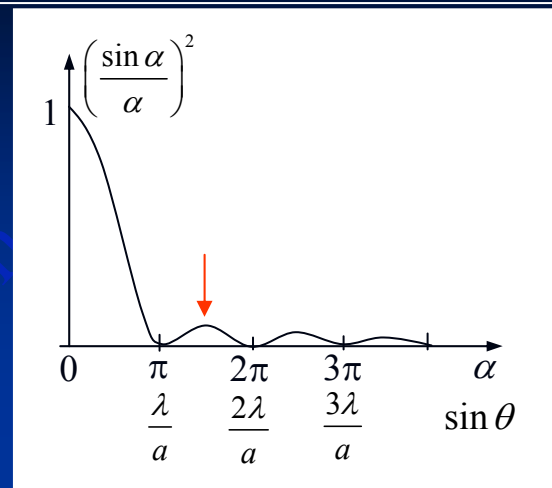
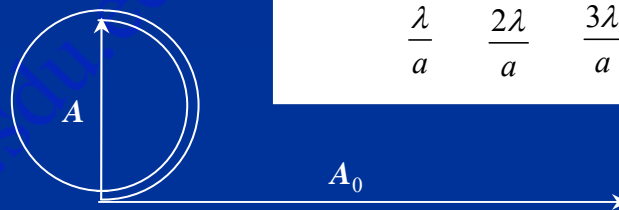
**讨论:** 用矢量图解法估算次极强相对强度

**例:** 一级次极强

将长度  $A_0$  的钢丝盘曲一圈半

$$A = \frac{A_0}{1.5\pi}$$

$$I = \frac{1}{(1.5\pi)^2} I_0 = 0.04503 I_0$$



公式精确计算值为  $0.04718 I_0$ , 误差不到5%

可类似计算其他级次极强

**思考:** 为什么矢量图解及半波带法得到的  $\theta$  往往有一定差别?

上述估算亦有一定误差?

如一级次极强位置	}	半波带法	$\sin \theta = 1.5 \frac{\lambda}{a}$
		矢量图解法	$\sin \theta = 1.43 \frac{\lambda}{a}$





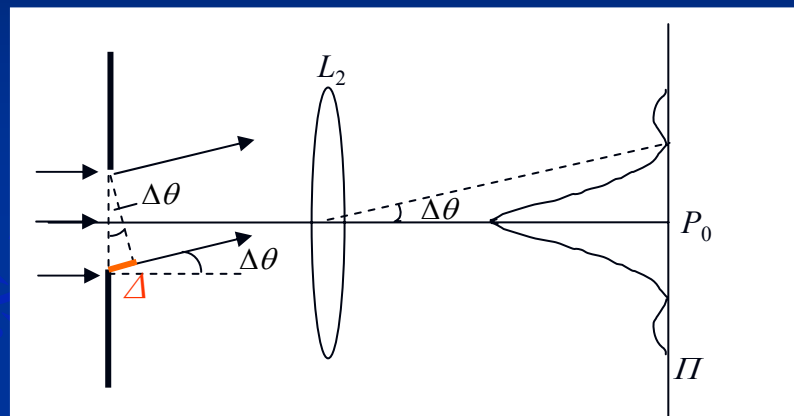
## 三. 主极强的半角宽度

主极强的半角宽度  $\Delta\theta$ : 从主极强中心到第一0点的角距离

第一零点:  $\Delta = a \sin \Delta\theta = \lambda$

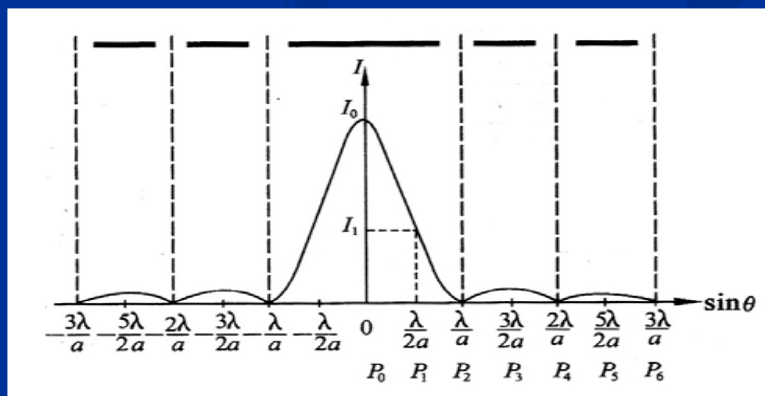
$$\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \quad \text{衍射反比关系}$$



$\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0.$  波动光学  $\rightarrow$  几何光学

各次极强宽度是  
主极强宽度之半

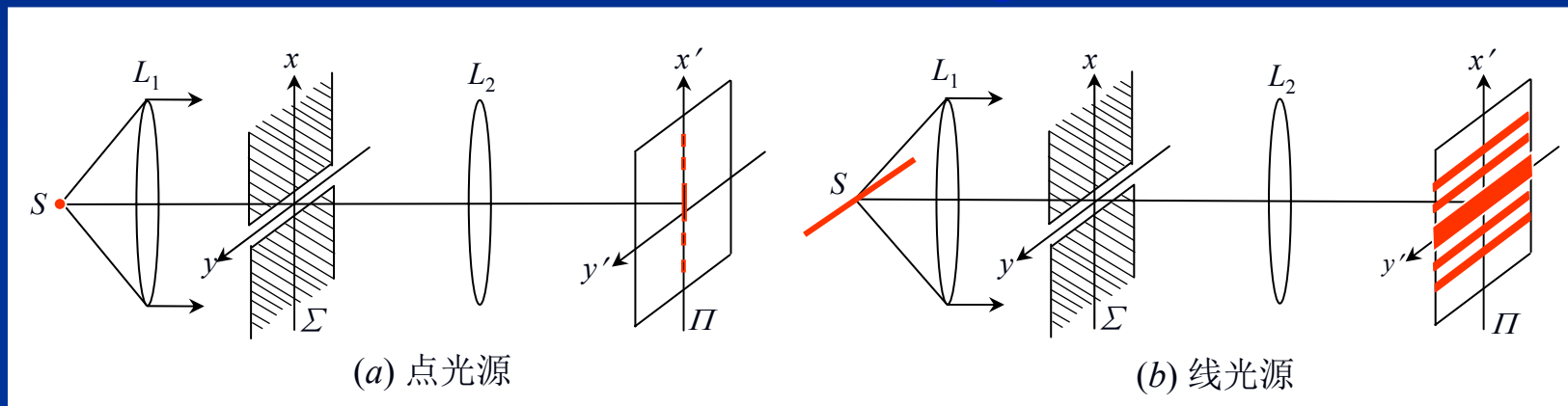




### 四. 观察方式

点光源：一排亮斑；

线光源：一系列亮线.

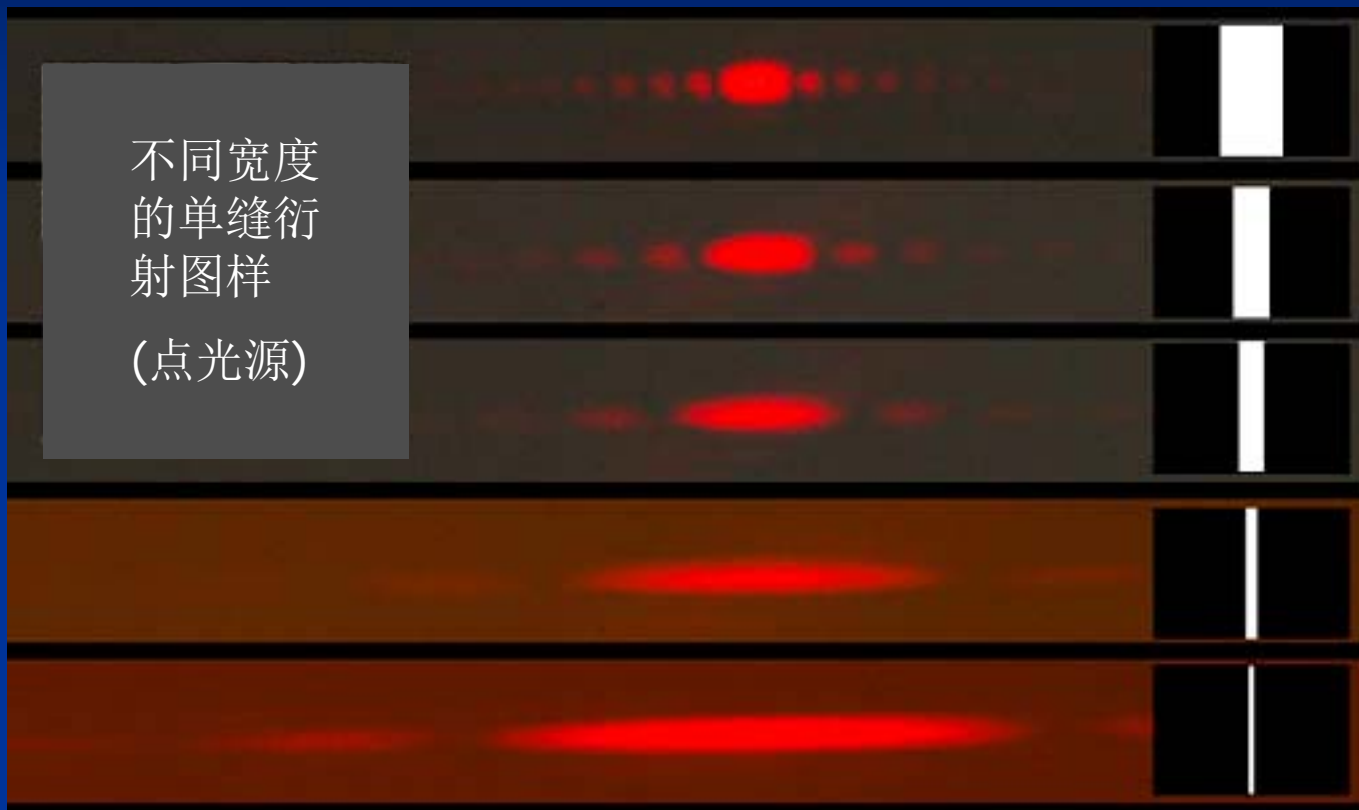


思考：

- (1)  $S$  点源或缝上下平移、旋转时图样如何变化？
- (2)  $S$  为白光光源时图样如何？
- (3) “隔门缝看人一扁了”——用指缝看远处的点光源试试.



### 4.3.1 单缝衍射





### 4.3.1 单缝衍射



绿色激光照射下的单缝衍射图样(点光源)

A: 缝宽0.02 mm;

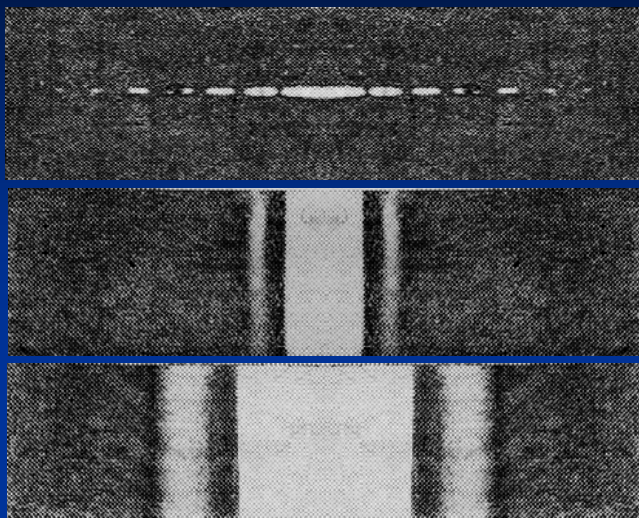
B: 缝宽0.04 mm;

C: 缝宽0.08 mm;

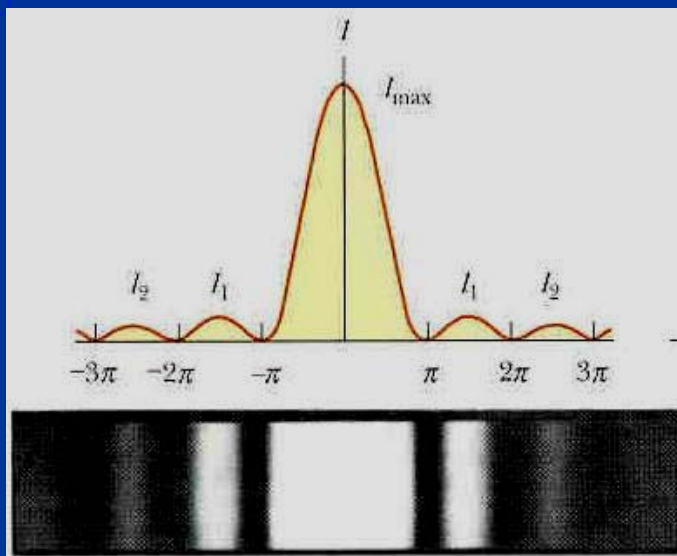
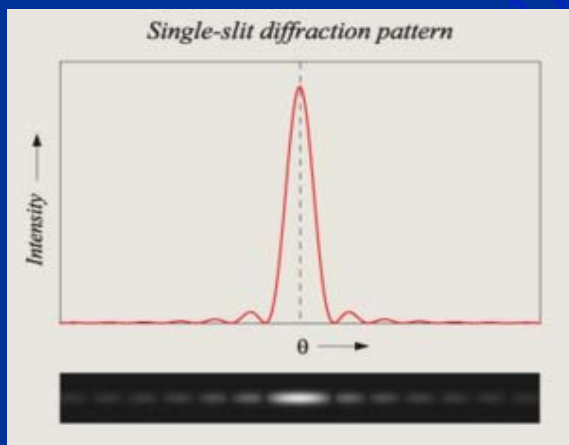
D: 缝宽0.16 mm.



### 4.3.1 单缝衍射



单缝夫琅禾费衍射图样照片  
(判断各图所用是点光源还是线光源)





## 4.3.2 矩孔衍射

## 一. 强度计算

平行光正入射

射向  $\Pi$  平面上  $P(x', y')$  点的光线  
具有同一方向, 记为  $\hat{r}_0$

即  $\overrightarrow{O'P}$  方向的单位矢量

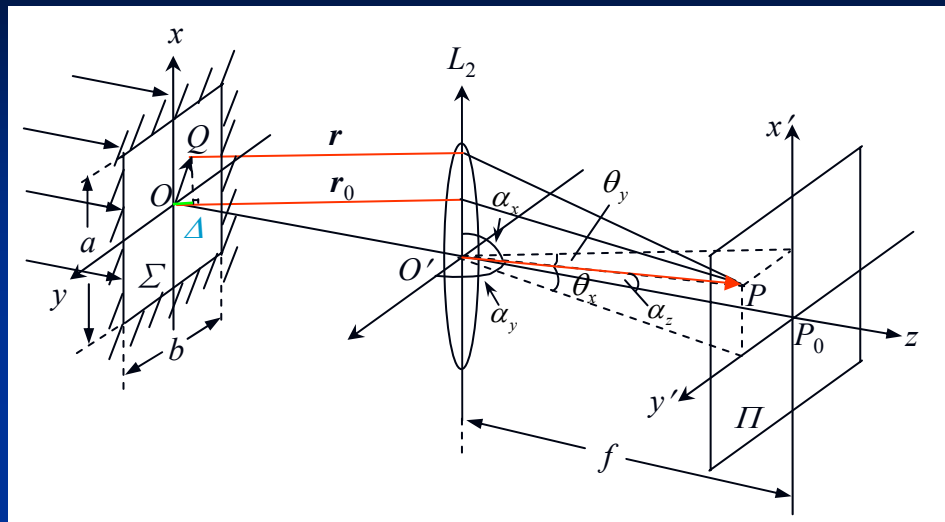
$$\hat{r}_0 = (\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z) = (\sin \theta_x, \sin \theta_y, \cos \alpha_z)$$

孔径上任一动点  $Q$  相应光程为  $r$ , 参考光程  $r_0$ , 光程差  $\Delta$

$$\overrightarrow{OQ} = (x, y, 0) \quad r = r_0 - \Delta \quad \Delta = \overrightarrow{OQ} \cdot \hat{r}_0 = x \sin \theta_x + y \sin \theta_y$$

$$\text{代入公式有 } \tilde{E}(P) = c \iint_{\substack{-a/2 \leq x \leq a/2 \\ -b/2 \leq y \leq b/2}} e^{-ik\Delta} dx dy = cab \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta_x, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta_y$$







### 4.3.2 矩孔衍射

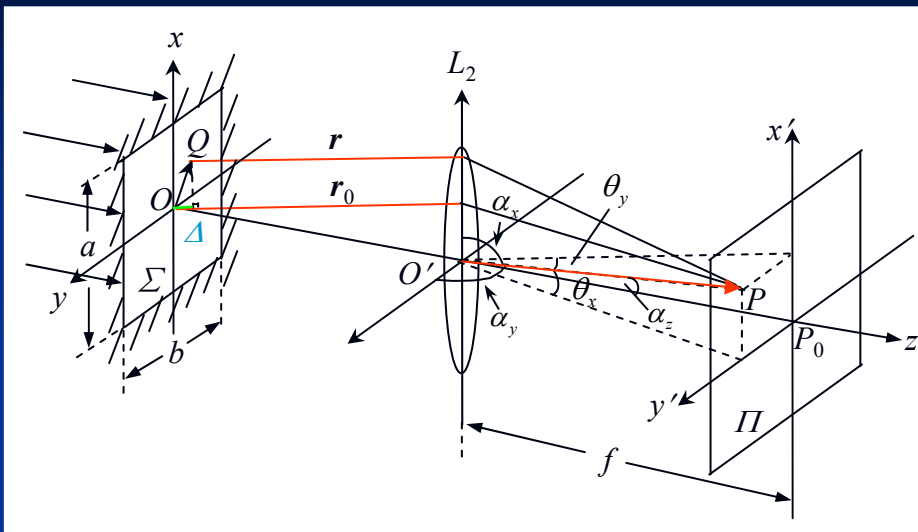
若  $\theta_x = \theta_y = 0$ ,

中心点  $P_0$   $\alpha = \beta = 0$

$$\tilde{E}(P_0) = \tilde{E}_0 = cab$$

故有

$$\tilde{E}(P) = \tilde{E}_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta}$$



$$I(P) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

$I_0$  : 几何像点的光强

傍轴近似下, 有  $\sin \theta_x \approx \theta_x \approx \frac{x'}{f}$ ,  $\sin \theta_y \approx \theta_y \approx \frac{y'}{f}$

上式也可写成以坐标为自变量的形式:

$$I(x', y') = I_0 \sin^2 c^2 \left( \frac{ax'}{\lambda f} \right) \sin^2 c^2 \left( \frac{by'}{\lambda f} \right)$$



## 二. 衍射图样特点

$$I(P) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta_x, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta_y$$

1. 光强分布取决于 $x, y$ 方向两个单缝衍射因子的乘积,

每一方向相对光强分布相当于宽度等于该方向孔径宽度的单缝衍射图样.

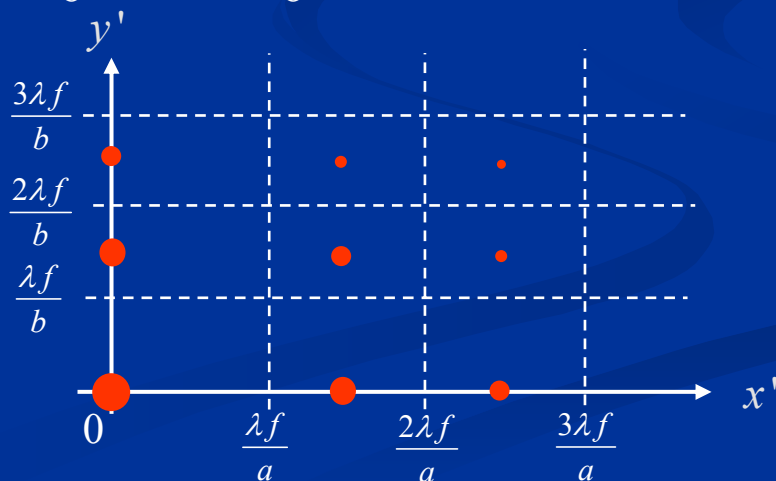
2. 能量主要分布于中心斑 (0级) 附近, 其次为 $x', y'$ 轴方向.

3. 消光暗线网  $\alpha = m\pi, \sin \theta_x = m \frac{\lambda}{a}, x' = m \frac{\lambda f}{a}$   
 $\beta = n\pi, \sin \theta_y = n \frac{\lambda}{b}, y' = n \frac{\lambda f}{b}$  ( $m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

右图中虚线为消光暗线网

红点为各主极强中心位置

红点大小大致表示各主极强相对大小





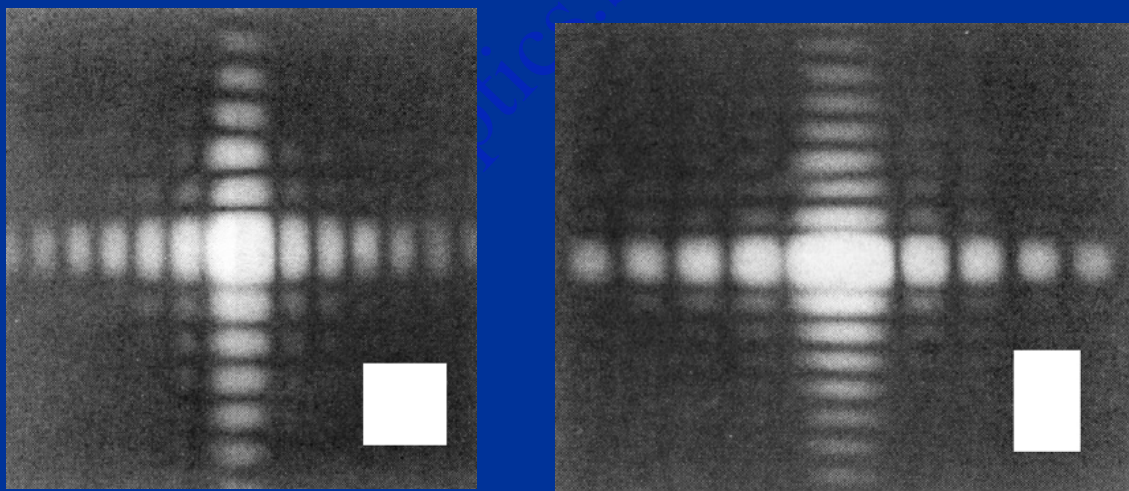
#### 4. 衍射反比关系

傍轴近似下， $x, y$ 方向主极强半角宽和次极强角宽度分别为

$$\Delta\theta_x = \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta\theta_y = \frac{\lambda}{b}$$

若某方向孔径**宽**——该方向的衍射斑**细而密**；

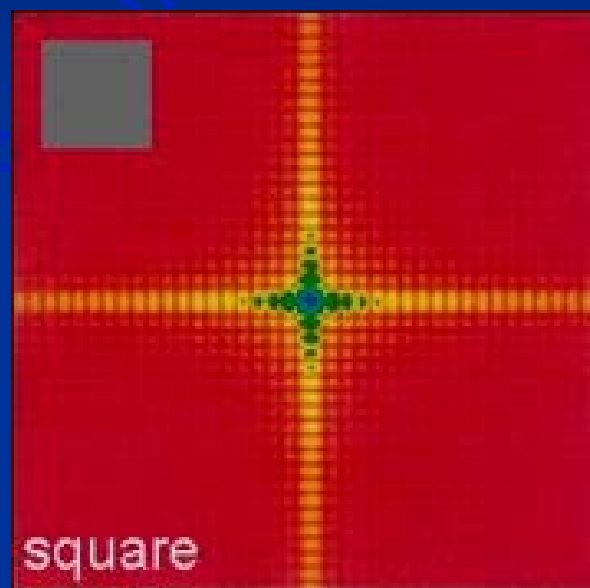
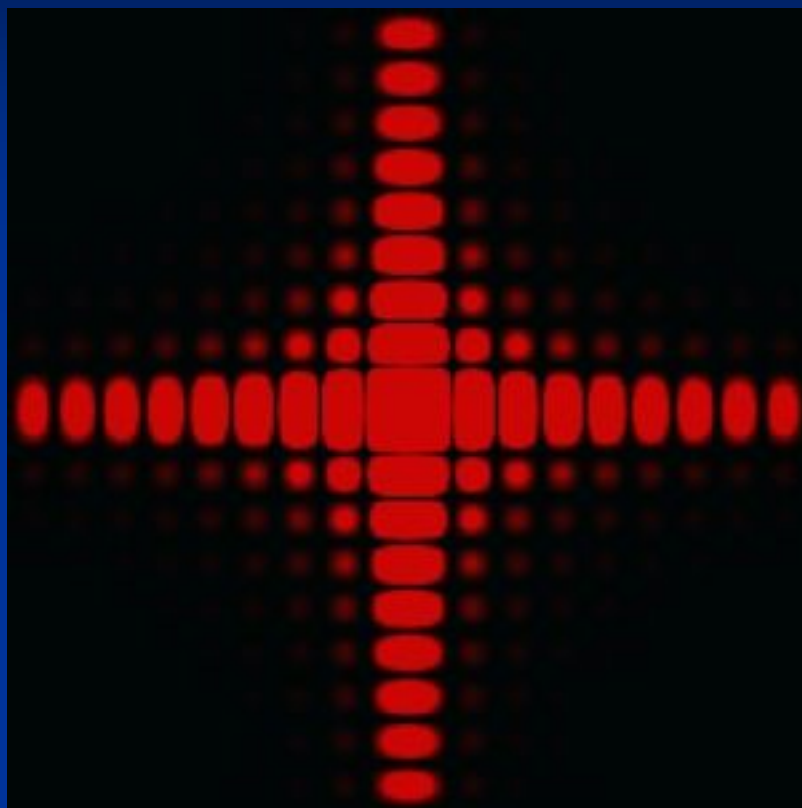
**窄**——该方向的衍射斑**粗而疏**。



方孔（左）和矩孔（右）夫琅禾费衍射图样照片

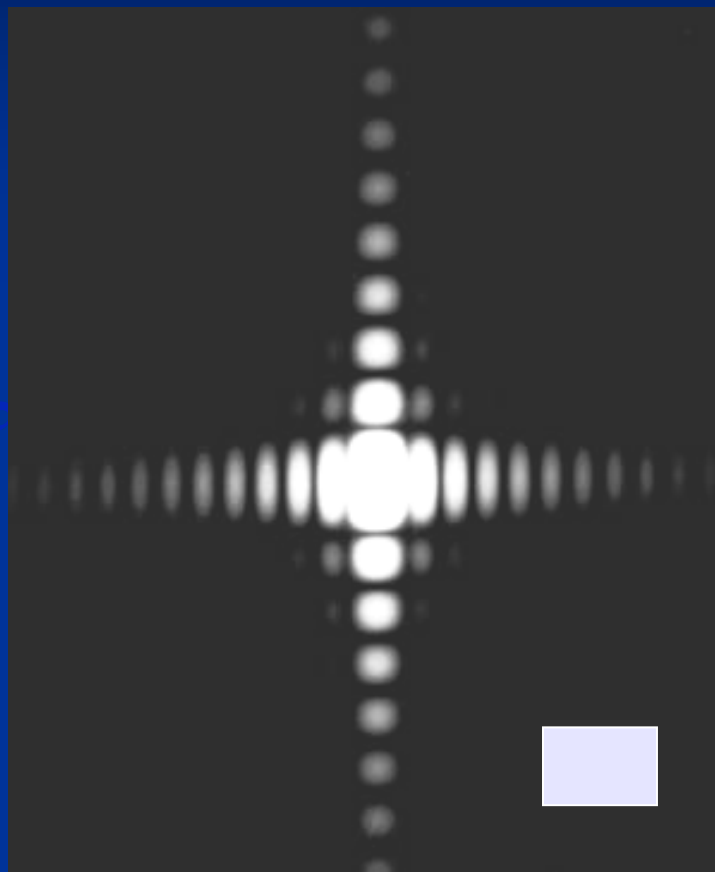
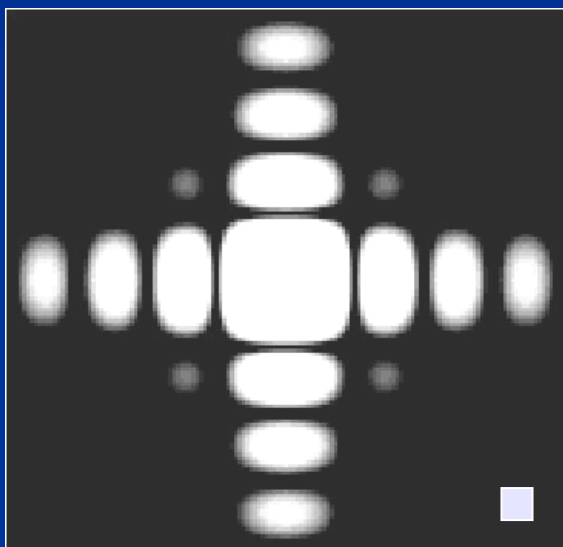


## 4.3.2 矩孔衍射





## 4.3.2 矩孔衍射



习题: 11, 12, 13, 15, 16

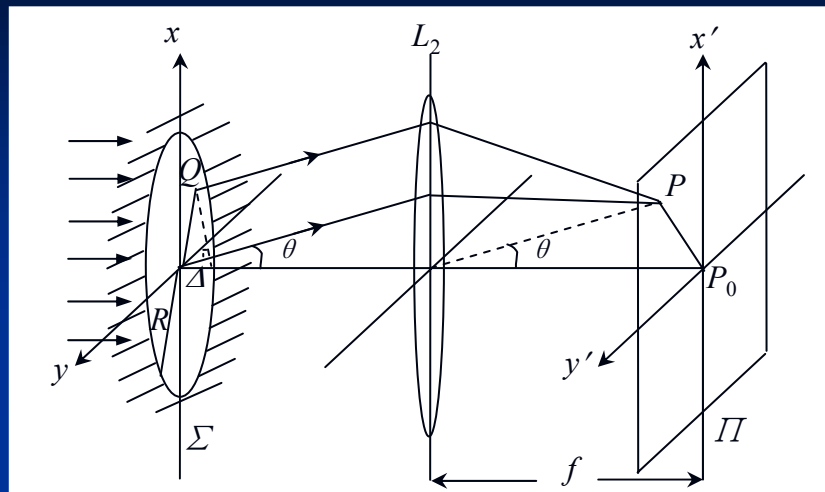


## 4.3.3 圆孔衍射

## 一. 强度计算

分析如上节,

只是换为圆形孔径.



$$\tilde{E}(P) = c \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-ik\Delta} dx dy = c \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy$$

$$\text{光强为 } I(P) = I_\theta = I_0 \left[ \frac{2J_1(u)}{u} \right]^2 \quad I_0: \text{几何像点光强}$$

其中  $J_1(u)$  为  $u$  的一阶第一类Bessel函数

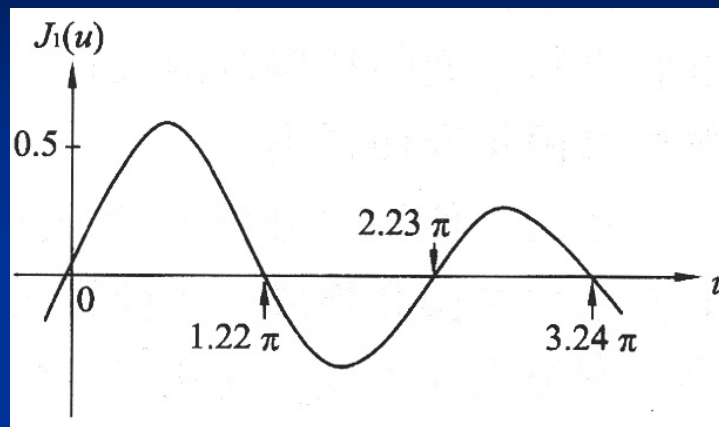
$$u = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta, \text{ 仍为孔径边缘相应的最大相位差之半}$$





## 二. 函数 $J_1(u)$ 的性质

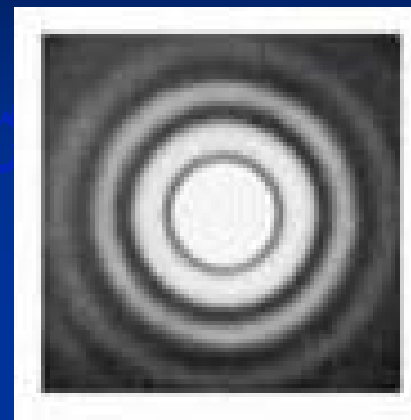
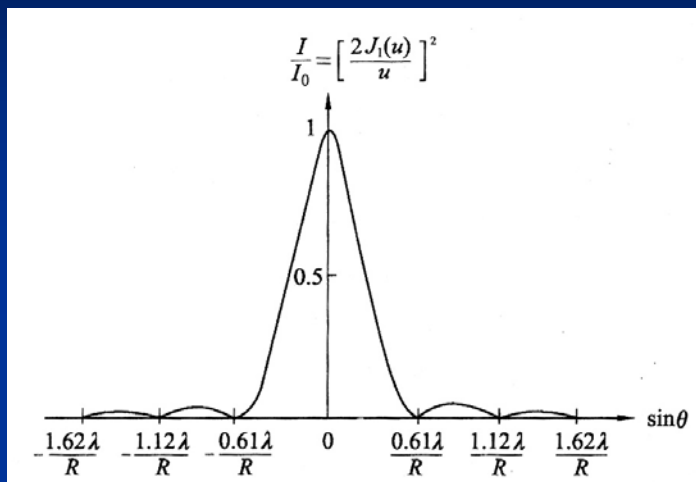
函数  $J_1(u)$  的部分曲线



- (1)  $u = 0, J_1(u) = 0$ , 但  $\frac{J_1(u)}{u}$  有最大值  $1/2$
- (2)  $J_1(u)$  的零点在  $1.22 \pi, 2.23 \pi, 3.24 \pi, \dots$
- (3)  $u$  增大时,  $J_1(u)$  大体以振荡形式衰减



## 三. 圆孔衍射光强分布特点



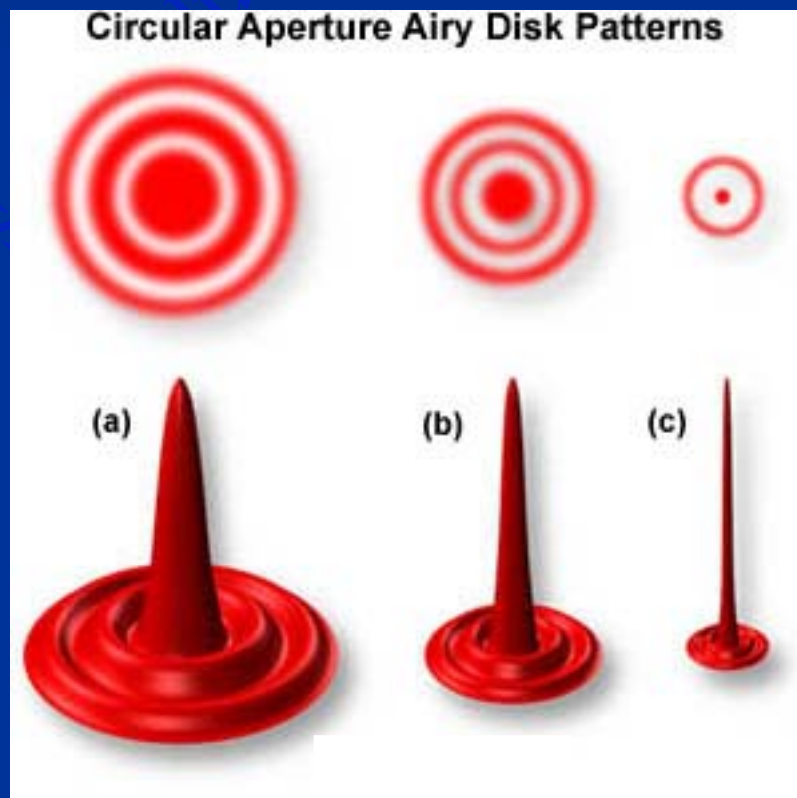
$\theta \rightarrow u \rightarrow J_1(u) \rightarrow I_\theta$  相对光强  $\frac{I_\theta}{I_0} = \left[ \frac{2J_1(u)}{u} \right]^2$ , 如左上图

1. 以 $P_0$ 为中心圆对称.
2.  $P_0$ : 几何像点, 光强具有极大值. 中心亮斑—艾里斑 (0级主极强)
3. 中心向外亮暗交替的同心环, 亮度急剧衰减.



### 4.3.3 圆孔衍射

圆孔衍射照片及图示



4. 艾里斑的角半径  $\Delta\theta$ 

即第一暗环的角半径, 相应  $u = \frac{2\pi R \sin \Delta\theta}{\lambda} = 1.22\pi$

傍轴近似  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$

可得角半径  $\Delta\theta = \frac{0.61\lambda}{R} = \frac{1.22\lambda}{D}$  其中  $D=2R$  为圆孔直径

线半径  $f\Delta\theta$

大部分能量 (~84%) 集中于艾里斑,

故艾里斑可看作由于圆孔衍射所造成的光束扩展范围.

## 5. 衍射反比关系

$$\Delta\theta \propto \frac{\lambda}{R}. \quad \lambda \text{ 给定, } \Delta\theta \propto \frac{1}{R}. \quad R \uparrow, \Delta\theta \downarrow.$$

$$\frac{\lambda}{R} \rightarrow 0, \quad \Delta\theta \rightarrow 0. \quad \rightarrow \text{几何光学.}$$

用截面有限的孔径不可能得到绝对平行的光束.

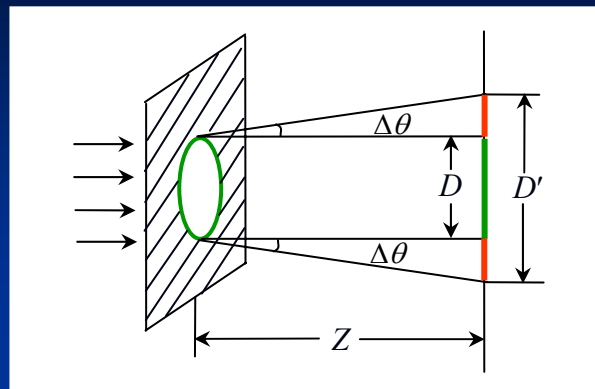


### 4.3.3 圆孔衍射

例：光束发散角

$Z$  远大于  $D$ ，满足远场条件

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$



接收屏上主极强光斑直径  $D' = D + 2Z\Delta\theta = D + 2Z \cdot \frac{1.22\lambda}{D}$

$D \downarrow$ ,  $\Delta\theta \uparrow$ , 几何阴影减小时衍射范围增大 —— 一对矛盾.

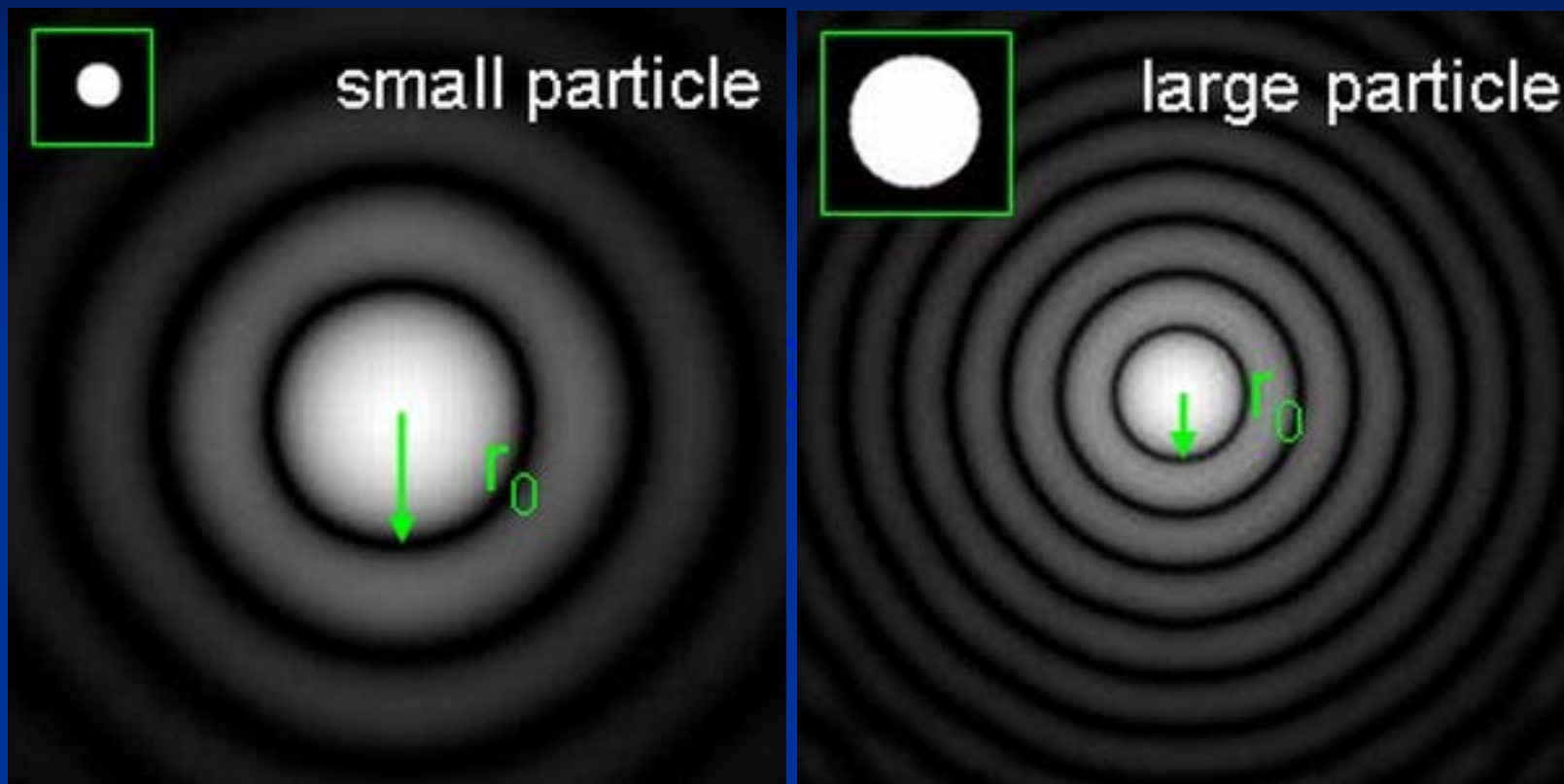
若使  $D'$  最小, 有极值条件  $\frac{dD'}{dD} = 1 - 2.44 \frac{\lambda Z}{D^2} = 0$

$$\Rightarrow D = \sqrt{2.44\lambda Z}$$

讨论：圆屏夫琅禾费衍射，用Babinet 原理，除中心点外图样相同.



### 4.3.3 圆孔衍射







### 4.3.3 圆孔衍射



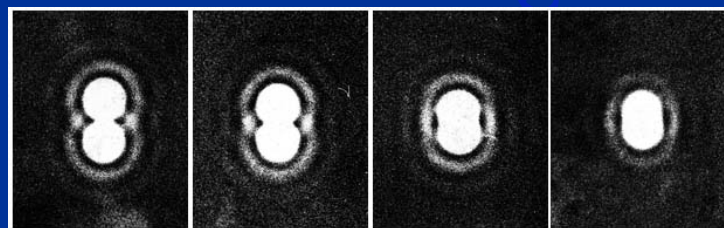
白光圆孔衍射



## 4.4 光学成像系统的分辨本领

### 一. 问题的提出及有关概念

- 几何光学: 点物→点像. 只要放大率足够大, 则可分辨的距离为无限小.
- 波动光学: 点物→衍射图样, 艾里斑像斑. 太近不可分辨.



**成像系统的分辨本领:** 系统分辨两个相邻物点的像的能力.

约定: (1) 成像系统是无相差的理想光学系统:

分辨率只受衍射限制, 点物的像可看作是孔径出瞳的夫琅禾费衍射.

(2) 非相干成像:

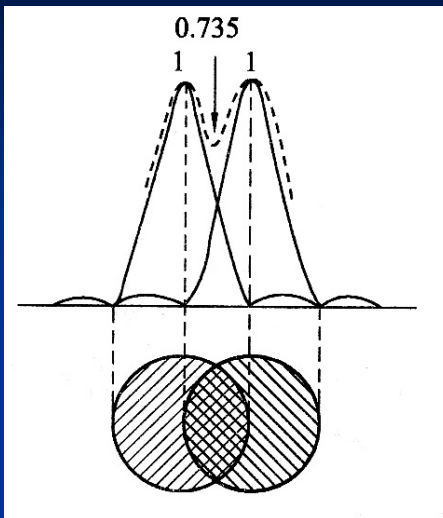
各物点发光非相干, 像面光强分布是各物点单独成像斑的强度叠加.

(3) 待分辨的两物点的亮度相同.



### 二. 瑞利判据

何种情况下才算刚能分辨的判据有一定人为性；前面曾引入过泰勒判据，用得更多的是瑞利判据。



#### 瑞利(Rayleigh)判据:

当一个物点所产生的艾里斑的**中心**恰与另一物点的艾里斑边缘(即**第一零点位置**)**重合**时，该两像斑或相应两物点是刚可分辨的。

中心凹陷达26%以上，较苛刻。



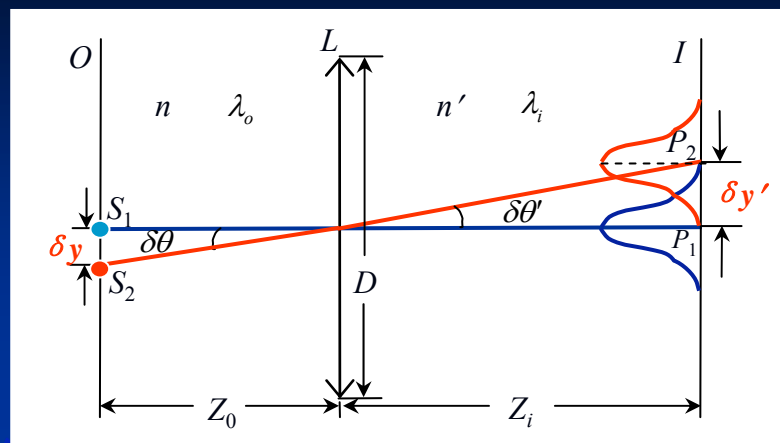


## 三. 成像仪器的分辨本领

一般讨论, 如右图

$\delta\theta$  物方  
 $\delta\theta'$  像方 **最小分辨角**  
 $\delta y$  物方  
 $\delta y'$  像方 **最小分辨距离**

} **分辨极限**



刚能分辨时 物、像方各量关系

临界情况: 艾里斑半角宽  $\Delta\theta =$  两像斑中心角分离  $\delta\theta'$ 记  $\lambda$ : 真空波长,  $\lambda_o$ : 物方波长,  $\lambda_i$ : 像方波长.  $\lambda_o = \frac{\lambda}{n}$ ,  $\lambda_i = \frac{\lambda}{n'}$ .由  $\Delta\theta = \frac{1.22\lambda_i}{D}$ , 得  $\delta\theta' = \frac{1.22\lambda_i}{D} = \frac{1.22\lambda}{n'D}$ .  $\delta y' = Z_i \delta\theta'$ .由折射定律傍轴近似形式  $n\delta\theta = n'\delta\theta'$ 可得  $\delta\theta = \frac{n'}{n} \delta\theta' = \frac{1.22\lambda}{nD}$ ,  $\delta y = Z_o \delta\theta$ .

} 形式相同



### 1. 人眼

物方:  $n=1$ ,  $\delta\theta_e = \frac{1.22\lambda}{D_e}$  ( $D_e$  为瞳孔直径, 2~8 mm)

取  $D_e=2$  mm,  $\lambda=550$  nm, 则

$$\delta\theta_e = 3.4 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 70''$$

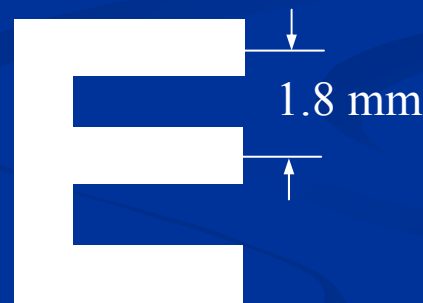
在明视距离25cm处  $\delta y_e \approx 0.08$  mm

常近似取 1' 作为人眼最小分辨角

例: 视力表, 1.5.

5 m 远处,

$$\delta y = 3.4 \times 10^{-4} \times 5000 = 1.7 \text{ mm.}$$





## 4.4 光学成像系统的分辨本领

### 2. 照相物镜 $n = n' = 1, Z_i = f$

$$\delta y' = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

$D$  为物镜直径;  $D/f$  为相对孔径

$f/D$ :  $F$  数: 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16.....

以成倍数增加的 整数的平方根排列

$F$  数大一档,  $D$  小一档, 通光面积减半, 曝光时间长一倍.

$F$  数越大,  $D$  越小, 分辨能力越低.

实际上还要受胶片感光颗粒的限制.







### 3. 望远镜

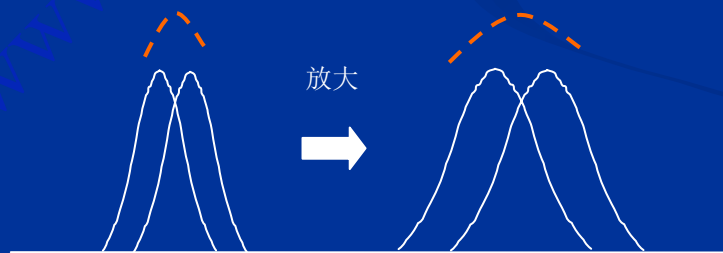
物镜  $n = n' = 1$ ,  $\delta\theta = \delta\theta' = \frac{1.22\lambda}{D}$   $D$  为物镜直径

目镜将其放大到  $\delta\theta_e = \frac{1.22\lambda}{D_e}$

故一合理望远镜放大率为  $M = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta} = \frac{D}{D_e}$

可见望远镜分辨本领的提高本质上是由于物镜的大口径，

目镜的作用只不过将依瑞利判据已经分离开的两像斑放大到人眼可观察的程度。

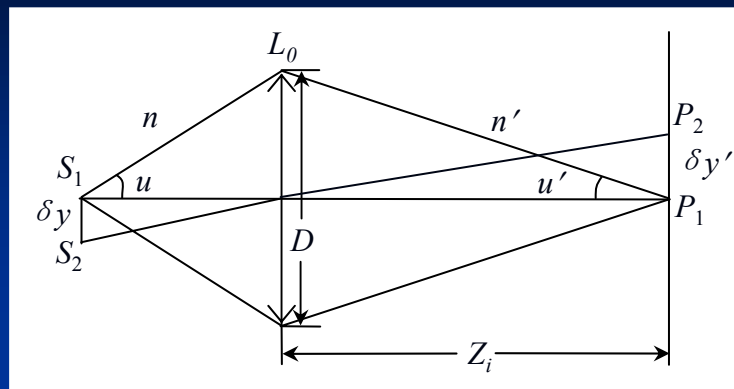


不可分辨之像斑放大后仍不可分辨



## 4. 显微镜

物方  $u$  较大, 不满足傍轴近似;  
像方  $u'$  较小, 满足傍轴近似.



$$\text{像方 } \delta y' = \frac{1.22\lambda Z_i}{n'D}$$

物镜满足阿贝正弦条件,  $n\delta y \sin u = n'\delta y' \sin u'$

$$\sin u' = \frac{D}{2Z_i}$$

综合以上三式



$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

$n \sin u$  称为**数值孔径** N. A.  
(Numerical Aperture).



## 4.4 光学成像系统的分辨本领

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

提高分辨率的途径:

1) 增大 **N.A.** ( $u \uparrow, n \uparrow$  油浸), 有限制, 一般  $< 1.5$ .

2) 减小  $\lambda$ , 短波长照明: 紫外 (200 ~ 250 nm);

或用电子束的物质波 (0.1 ~ 0.001 nm) — 电子显微镜.

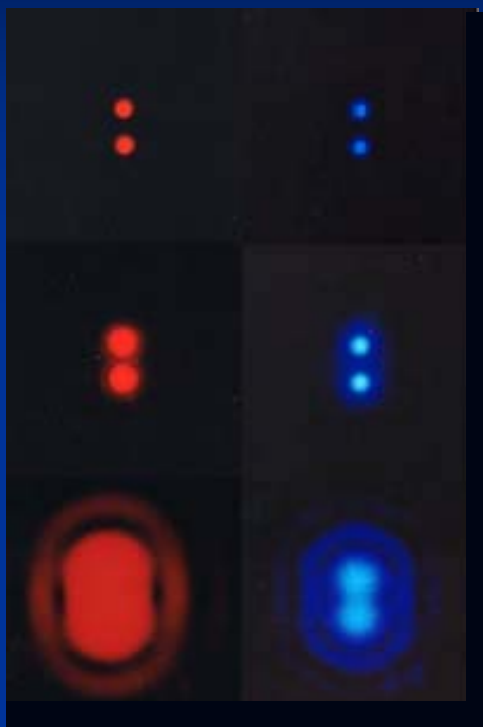
目前**N.A.** 可达1.25, 白光 (0.55  $\mu\text{m}$ ),  $\delta y = 0.27 \mu\text{m}$ ,

在人眼明视距离分辨率约为 0.08 mm, 故放大约300倍.

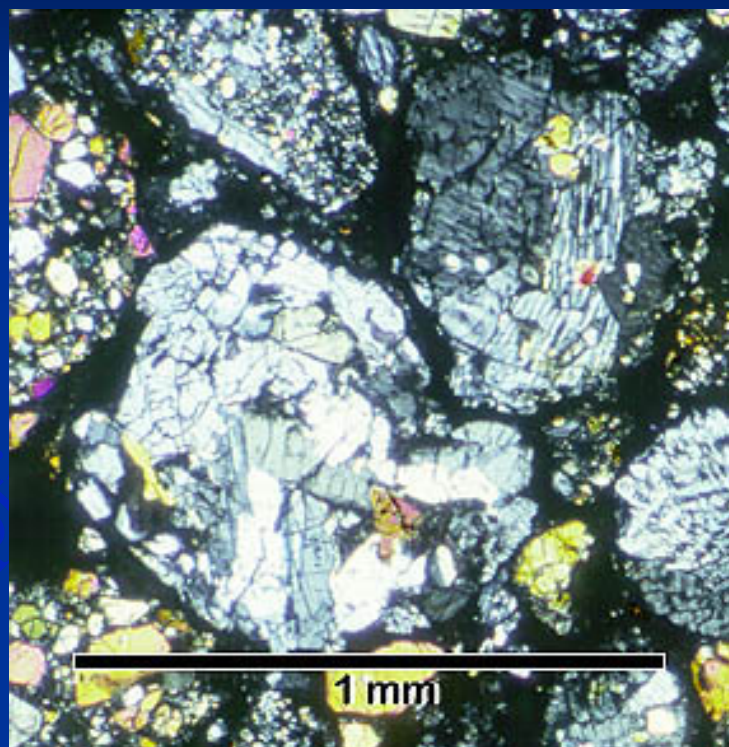
电子显微镜达数十万, 百万倍, 提高 2~4 数量级.



## 4.4 光学成像系统的分辨本领



波长越短分辨率越高



显微镜下的小陨石球粒照片



## 4.4 光学成像系统的分辨本领



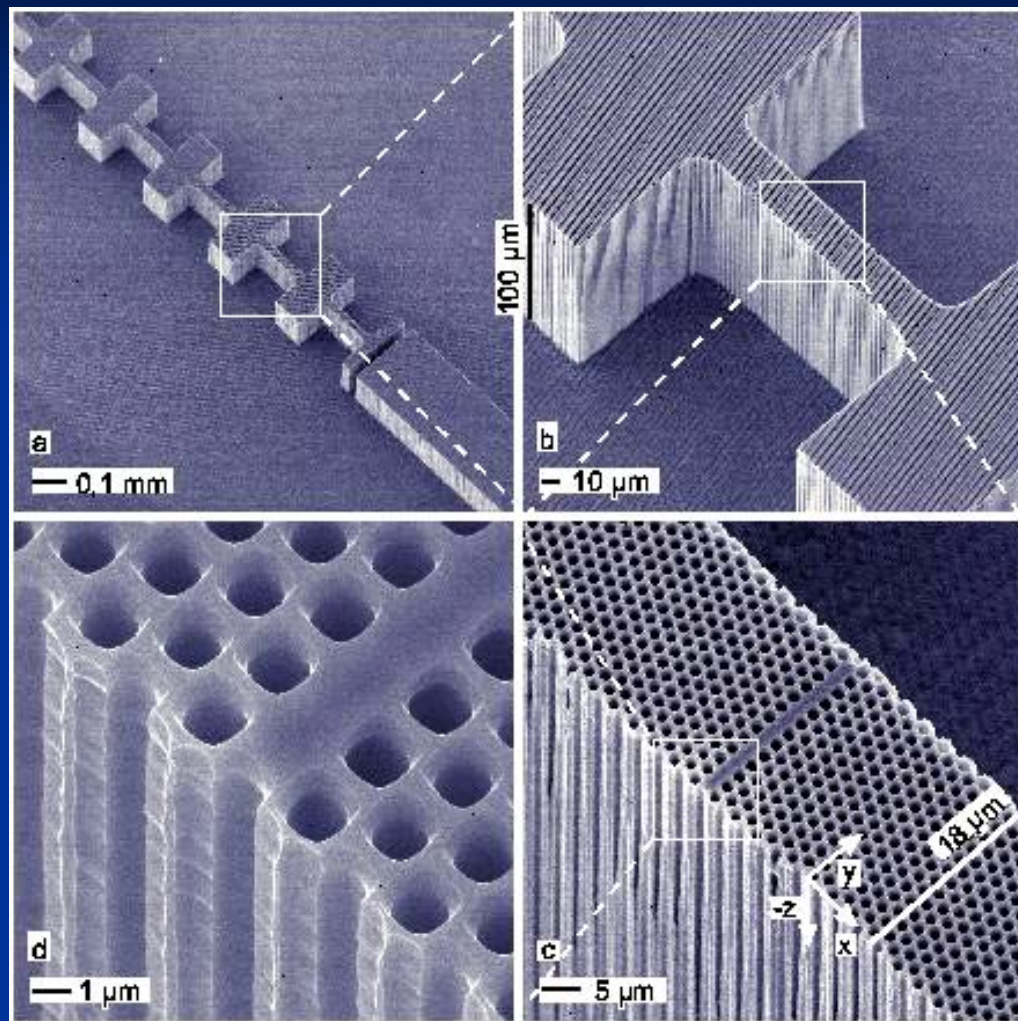
现代电子  
显微镜





## 4.4 光学成像系统的分辨本领

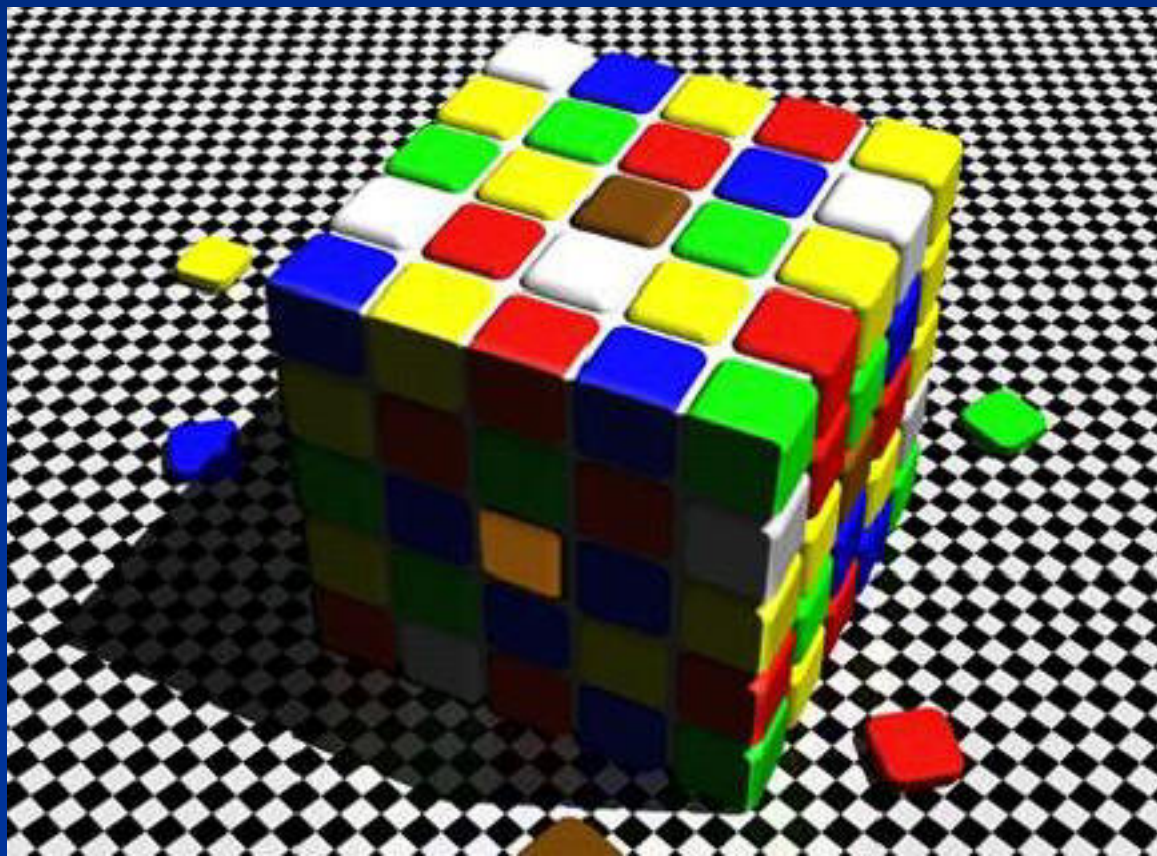
电镜下光子晶体的照片



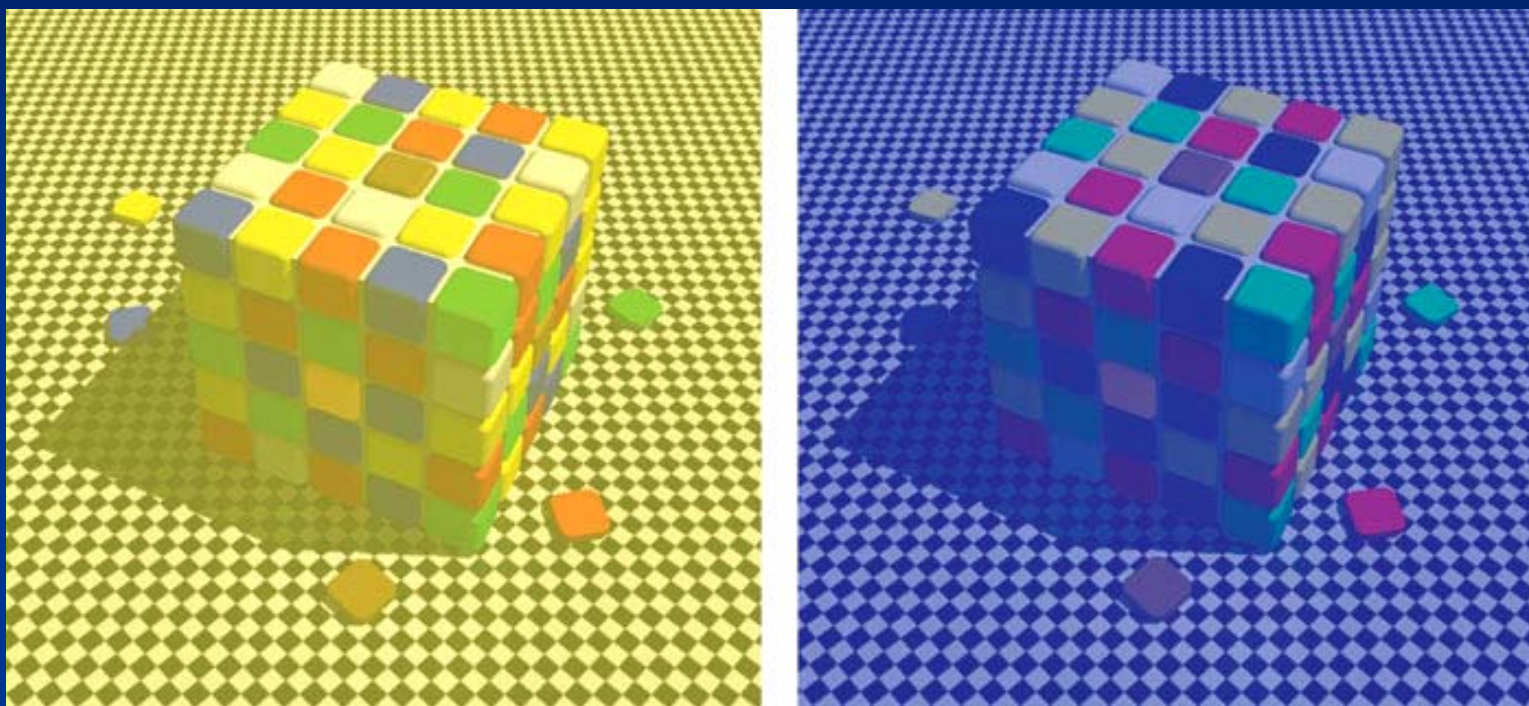
习题: 17, 21, 22, 23, 25 有奖选作: 思考题4, 6



## Refreshments: Optical Illusions Colors







The blue squares on the left and the yellow squares on the right are of the same gray-level !



# 4.5 夫琅禾费衍射（二）：非连通孔径

## 4.5.1 多缝衍射

### 一. 物理图像分析

#### 1. 定性分析

缝宽 $a$ , 缝距 $d$  (相邻缝对应位置)

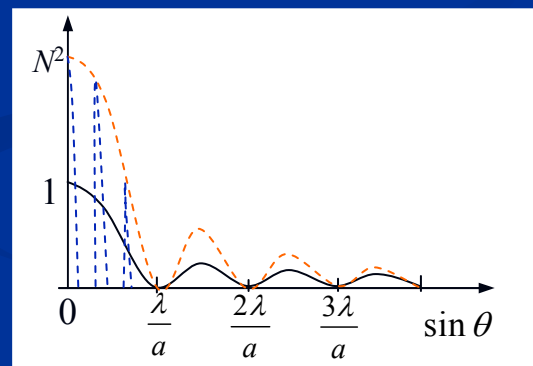
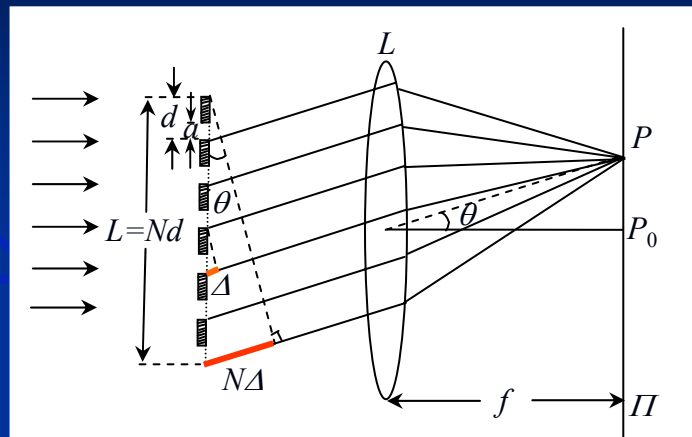
多缝衍射 { 单缝衍射( $a$ )  
缝间干涉( $d, N$ )

单缝衍射因子已知, 如右图黑线

缝间干涉:  $N$  缝平行光干涉

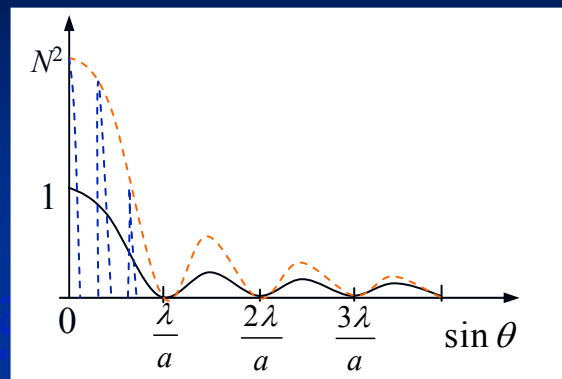
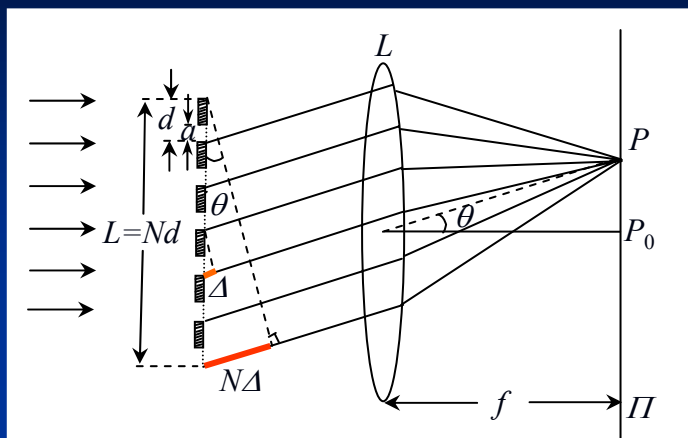
每相邻光束间有确定光程差  $\Delta = d \sin \theta$

$$\text{位相差 } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$





## 4.5.1 多缝衍射



原单缝衍射的零点，无论多缝如何叠加，仍为零点；

原单缝衍射的非零点，若相长干涉，振幅  $N$  倍，强度  $N^2$  倍；  
若相消干涉，振幅，光强都为零。

故可想到多缝与单缝衍射的区别：

- (1) 包络线形状相同，但强度增大到  $N^2$  倍。
- (2) 比单缝多加了零点和随之而来的起伏。



2. 矢量图分析

$N$ 缝总 光程差 $\Delta_N = Nd \sin \theta$	$N$ 缝总 相位差 $\delta_N = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_N$	缝间 光程差 $\Delta = d \sin \theta$	缝间 相位差 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$	方位 $\sin \theta$	矢量图	强度 $I_\theta$	备注
0	0	0	0	0		$N^2 I_{10}$	0级 主极强
$\lambda$	$2\pi$	$\frac{\lambda}{N}$	$\frac{2\pi}{N}$	$\frac{\lambda}{Nd}$	转一圈	0	第一 零点
$\frac{3}{2}\lambda$	$3\pi$	$\frac{3}{2}\frac{\lambda}{N}$	$\frac{3\pi}{N}$	$\frac{3\lambda}{2Nd}$	一圈半	极大	第一 次级强
$2\lambda$	$4\pi$	$2\frac{\lambda}{N}$	$\frac{4\pi}{N}$	$\frac{2\lambda}{Nd}$	两圈	0	第二 零点
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$N\lambda$	$N \cdot 2\pi$	$\lambda$	$2\pi$	$\frac{\lambda}{d}$		$N^2 I_{1\theta}$	一级 主极强



## 关于上页表格的说明

将每一单缝的贡献看作一整体，作为一个分矢量；

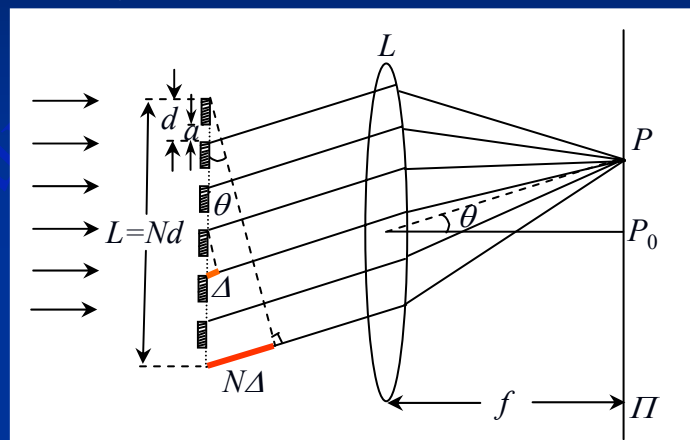
$N$  个矢量叠加，首尾相接，形成螺旋折线；

相邻矢量幅角差  $\delta$ ，首尾总幅角差  $N\delta$ 。

$A_{10}$ —单缝在  $\theta=0$  时的振幅

$I_{10}$ —单缝在  $\theta=0$  时的光强

$I_{1\theta}$ —单缝在衍射角  $\theta$  时的光强



各矢量大小相同,  $F(\theta)$  亦同，盘曲时并不收缩。

当缝间总光程差为  $N\lambda$  时，总矢量共转了  $N$  圈，

每一矢量比前一矢量多转一圈，又同向排列，强度为  $N^2 I_{1\theta_1}$ ，是一级主极强点。

同理当缝间总光程差为  $2N\lambda$  时，共转了  $2N$  圈，

又同向排列，强度为  $N^2 I_{1\theta_2}$ ，是二级主极强点。



## 二. 光强分布曲线作图法

$\theta = 0$ , 最大,  $N^2 I_{10}$

$a \sin \theta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  零点

$d \sin \theta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  主极大

$Nd \sin \theta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  零点

如右图示, 以  $\sin \theta$  为轴

1. 作包络线: **一级分点**  $\frac{\lambda}{a}, 2\frac{\lambda}{a}, 3\frac{\lambda}{a}, \dots$

**零点**, 以单缝光强的  $N^2$  倍作包络线.

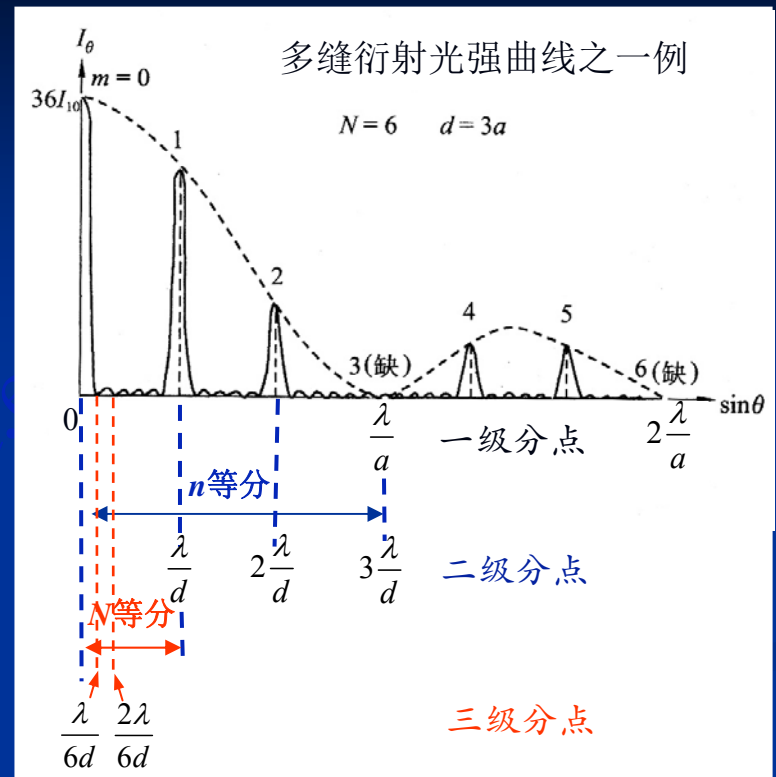
2. 将每一  $\frac{\lambda}{a}$  区间  $n$  等分,  $n = \frac{d}{a}$ ,

得**二级分点**  $\frac{\lambda}{d}, 2\frac{\lambda}{d}, 3\frac{\lambda}{d}, \dots$  共  $(n-1)$  个, 相应于**主极强**.

3. 相邻主极强之间再  $N$  等分, 得**三级分点**  $\frac{\lambda}{Nd}, 2\frac{\lambda}{Nd}, 3\frac{\lambda}{Nd}, \dots$

共  $(N-1)$  个分点, 这些点为**零点**, 中间夹着  $(N-2)$  个**次极强**.

图例中**3, 6, 9...**级主极强与单缝衍射**0**点位置重合: **缺级**.







## 三. 衍射光强公式的推导

## 1. 矢量图解法

单缝衍射： $\theta = 0$ ,  $A_{10}$ .

$\theta$ :  $A_{1\theta} = A_{10} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ .  $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$  为单缝边缘相位差的一半

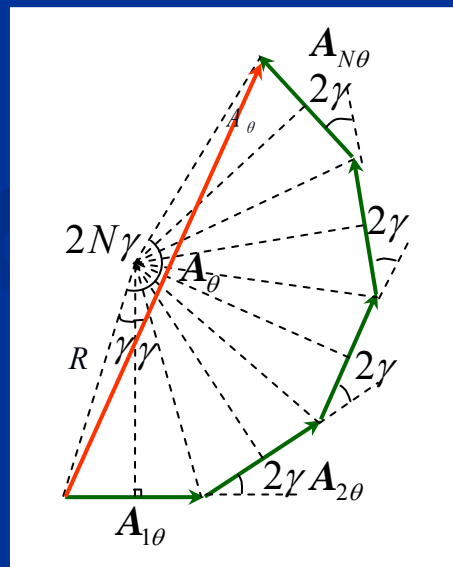
缝间干涉： $A_{1\theta}, A_{2\theta}, \dots, A_{N\theta}$  大小相等 ( $a, \theta$  都相同)

相位依次落后  $\delta$

缝间相位差  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

记  $\gamma = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$ , 为缝间相位差之半

各矢量首尾相接, 幅角依次增大  $\delta = 2\gamma$ ,  
矢量图是正多边形的一部分. 如右图示.







计算合矢量

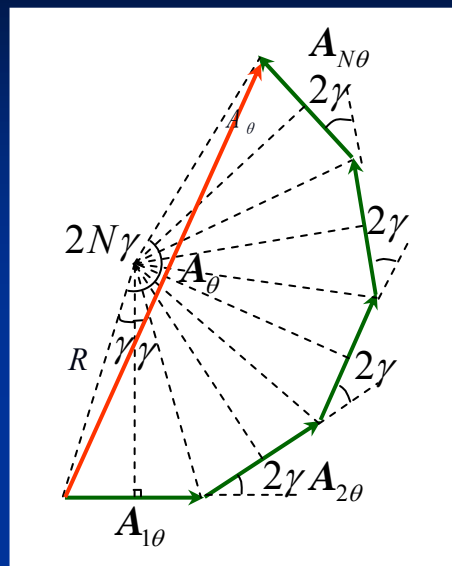
$$A_{\theta} = 2R \sin N\gamma,$$

$$A_{1\theta} = 2R \sin \gamma.$$

合矢量

$$A_{\theta} = A_{1\theta} \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma}$$

$$= A_{10} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma}$$



相应光强

$$I_{\theta} = I_{10} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

相邻缝相位差之半

↑                      ↑  
单缝衍射因子    缝间干涉因子



## 2. 复振幅叠加法

取  $\tilde{E}_{1\theta}$  初相为零, 则有  $\tilde{E}_{1\theta} = A_{1\theta} = A_{10} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

$\tilde{E}_{2\theta}, \tilde{E}_{3\theta}, \dots, \tilde{E}_{N\theta}$

振幅相同,  
相位依次滞后  $\delta$ , 故有

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{2\theta} = \tilde{E}_{1\theta} e^{i\delta}, \\ \tilde{E}_{3\theta} = \tilde{E}_{1\theta} e^{i2\delta}, \\ \dots\dots \\ \tilde{E}_{N\theta} = \tilde{E}_{1\theta} e^{i(N-1)\delta}. \end{array} \right.$$

场点光场复振幅为:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\theta} &= \sum_{n=1}^N \tilde{E}_{n\theta} = \tilde{E}_{1\theta} \left[ 1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} \right] \\ &= \tilde{E}_{1\theta} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \end{aligned}$$

代入  $\delta = 2\gamma$ , 得相应的光强为

$$I_{\theta} = |\tilde{E}_{\theta}|^2 = I_{10} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 \quad \text{其中 } I_{10} = A_{10}^2$$



## 四. 光强分布的特点 (小结)

多缝衍射

单缝衍射因子  $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$

缝间干涉因子  $\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma}\right)^2$

包络线 { 单缝光强的  $N^2$  倍  
**0点位置**:  $\alpha = m\pi, \sin \theta = M \frac{\lambda}{a}$  ( $M = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

**主极强**:  $\gamma = m\pi, \sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
 这些点的  $I_\theta$  等于单缝时的  $N^2$  倍.

**极弱-0点**:  $N\gamma = (mN + K)\pi, \quad (K = 1, 2, \dots, N-1)$   
 $\sin \theta = \left(m + \frac{K}{N}\right) \frac{\lambda}{d}$  相邻主极强之间有  $N-1$  个.

**次极强**: 相邻主极强之间有  $N-2$  个,  
 求极值可得精确位置, 粗略可认为在两**0点**中间,  
 可用矢量图解法求此光强.

**主极强半角宽**: 从中心到一侧**0点**的角宽度

$$\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd} \Rightarrow \Delta \theta_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_m}$$



## 4.5.1 多缝衍射

### 缺级现象

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{缝间干涉主极大 } \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \\ \text{单缝衍射0点 } \sin \theta = m' \frac{\lambda}{a} \end{array} \right.$$

若  $\frac{m\lambda}{d} = \frac{m'\lambda}{a}$ ,

则第  $m$  级主极大缺失.

或设  $d = na$ ,  $m = m' \frac{d}{a} = m'n$ , ( $m' = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

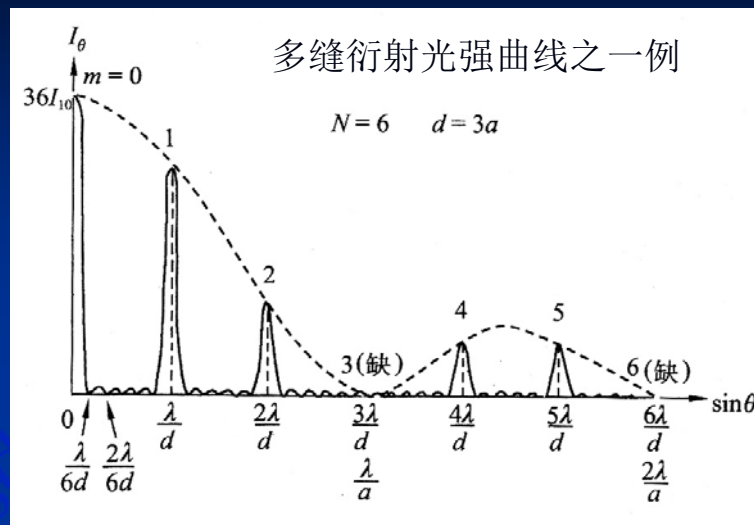
若  $m$  为整数, 则该级主极大缺失.

当  $n$  为整数,  $\pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots$  级主极大缺级;

当  $n$  为非整数, 则  $m'n$  为整数的级主极大缺级.

练习:  $n=3$  时, 缺?

$n=1.6$  时, 缺?





## 多缝衍射与单缝衍射区别

1. 亮纹增多 (间距  $\frac{\lambda}{a} \rightarrow \frac{\lambda}{d}$ ) , — 更密.

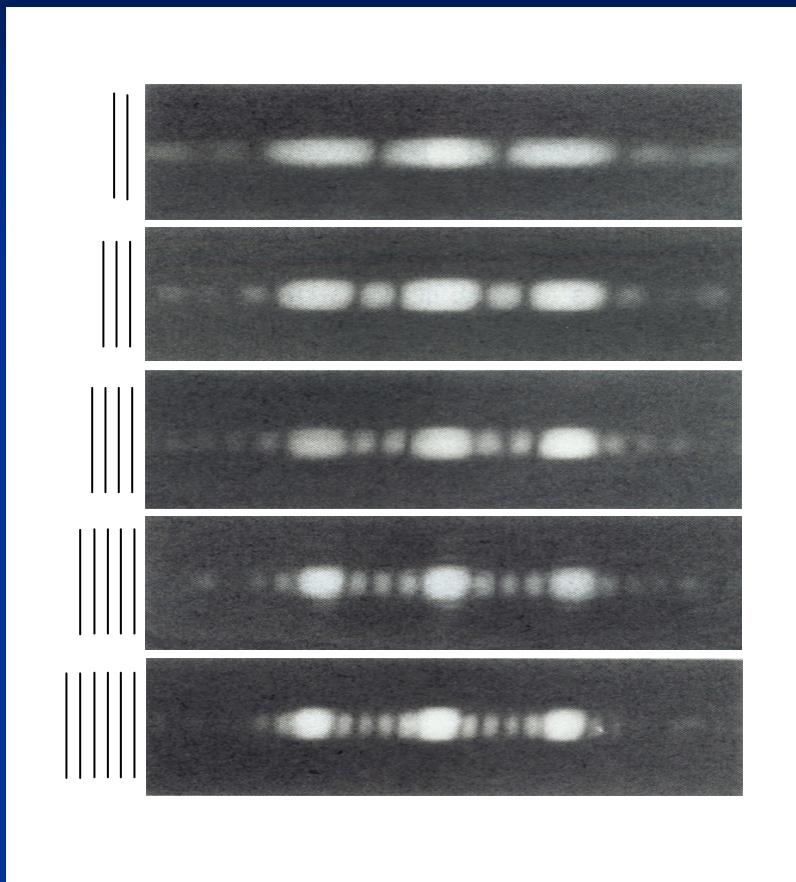
2. 光能向主极强集中,  $N^2$  倍, — 更亮.

3. 主极强宽度变窄,

中心条纹半宽度 (在  $\sin \theta$  轴上)  $\frac{\lambda}{a} \rightarrow \frac{\lambda}{Nd}$  , — 更细.



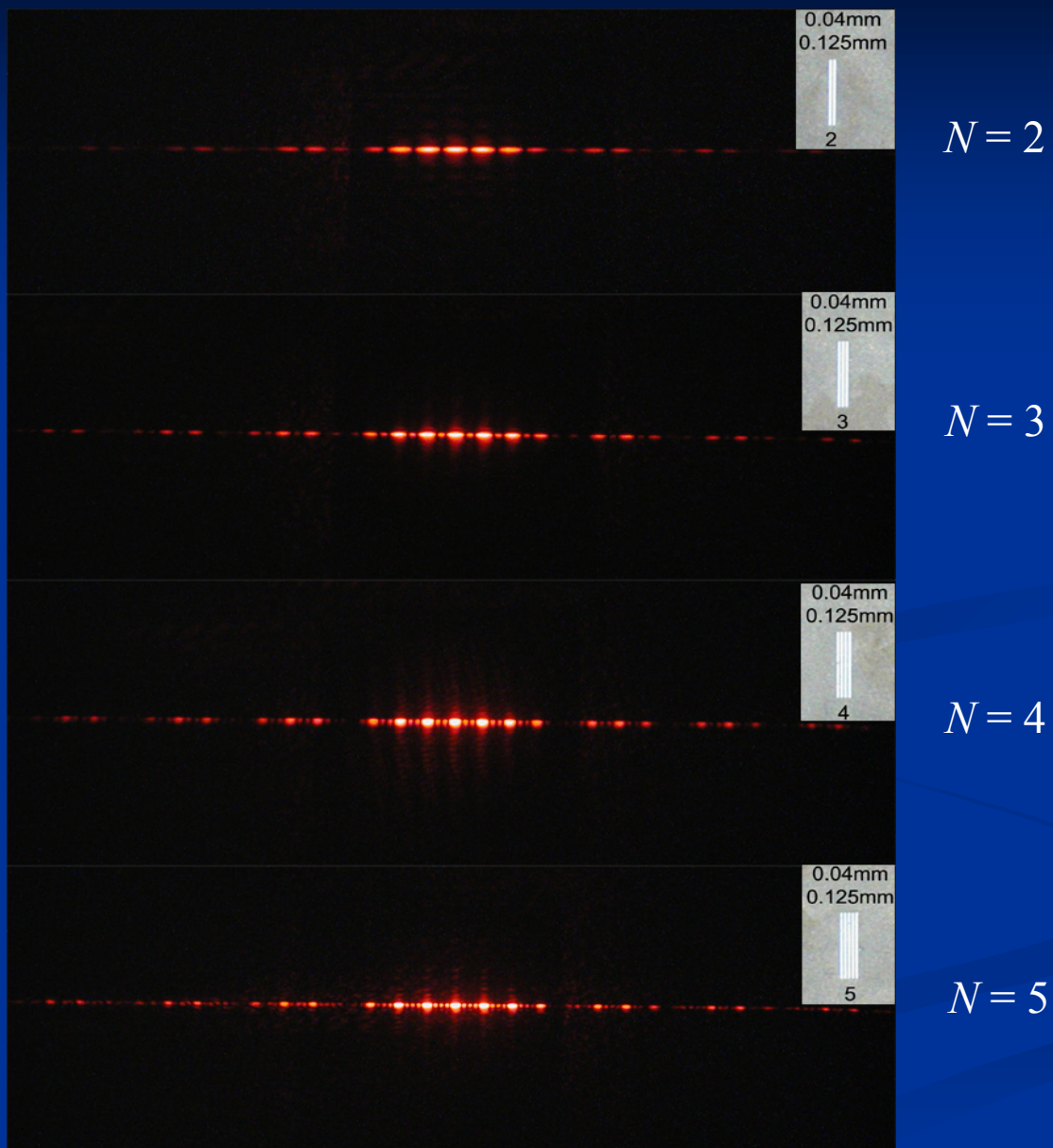
## 4.5.1 多缝衍射



2 ~ 6 缝衍射的照片



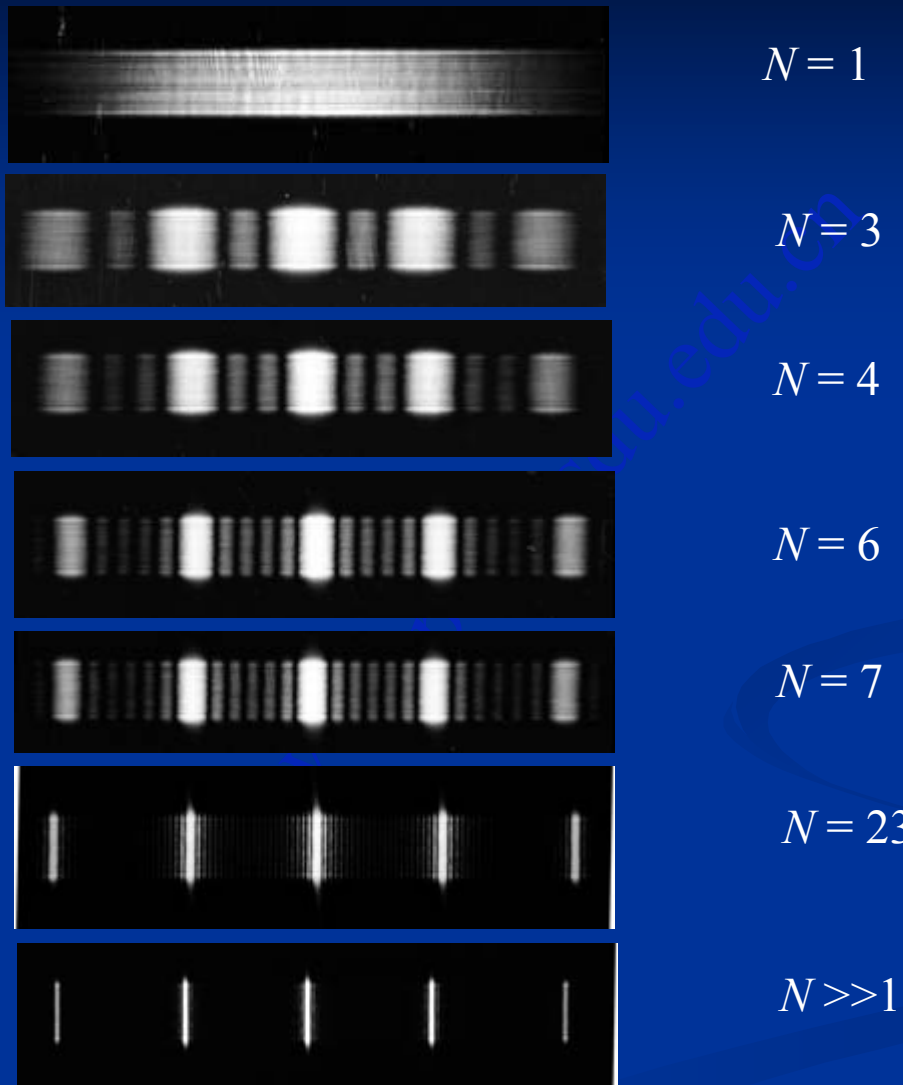
## 4.5.1 多缝衍射





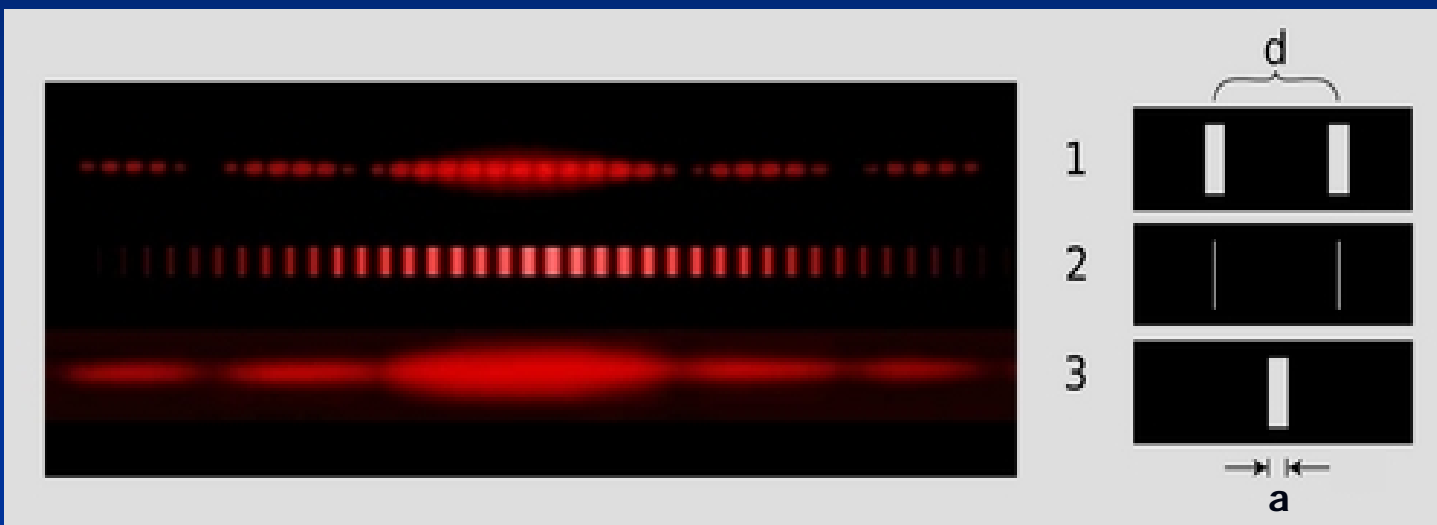


## 4.5.1 多缝衍射





## 4.5.1 多缝衍射



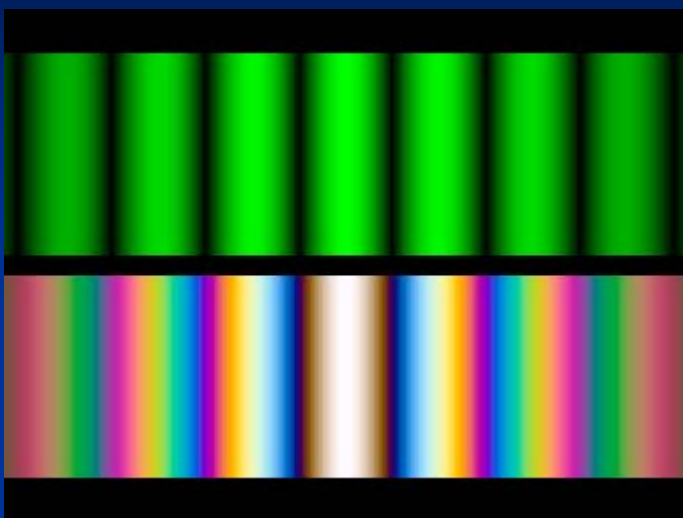
思考题：定量说明以上三种条纹的区别及原因



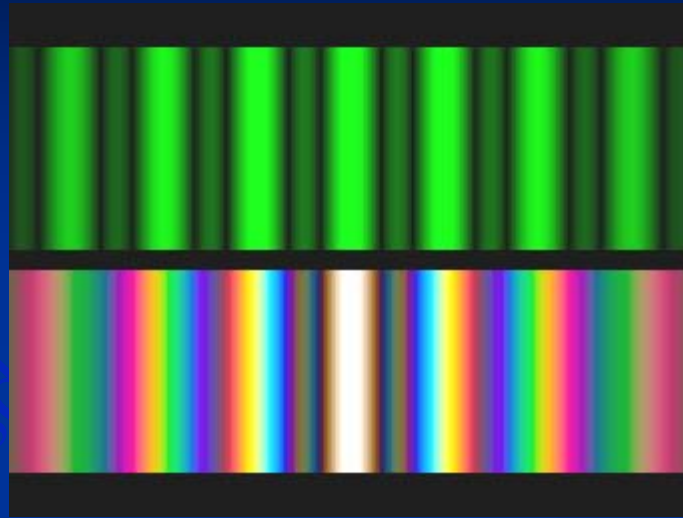
## 4.5.1 多缝衍射

单色光(绿色)和白光照明时多缝夫琅禾费衍射图样

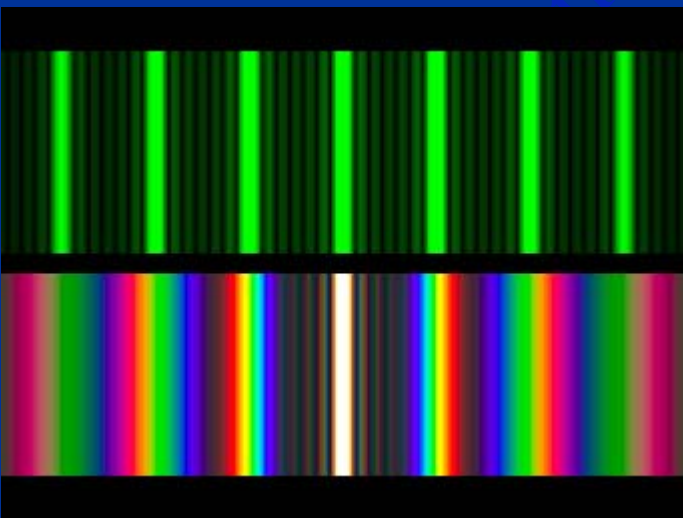
$N=2$



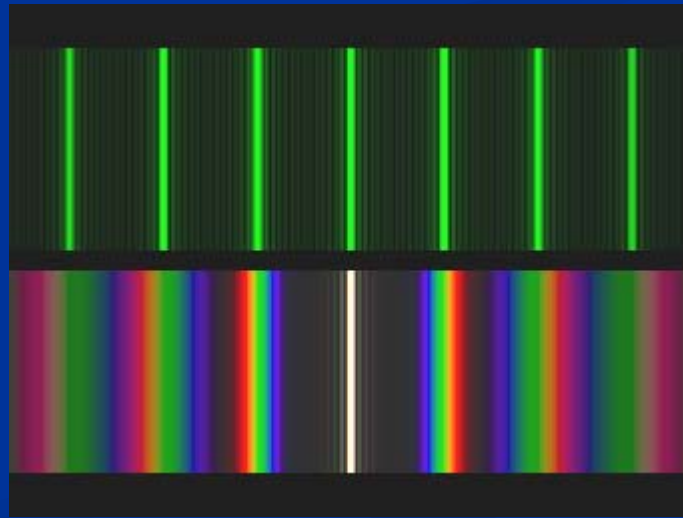
$N=3$



$N=7$



$N=16$





### 4.5.2 夫琅禾费衍射的一般性质及其他孔径的衍射

#### 一. 夫琅禾费衍射的一般性质

(1) 中央主极大恒为光源的几何光学像.

(2) 平移不变性:

衍射孔径在自身平面内平移, 衍射图样的强度分布不变.

(3) 中心对称性:

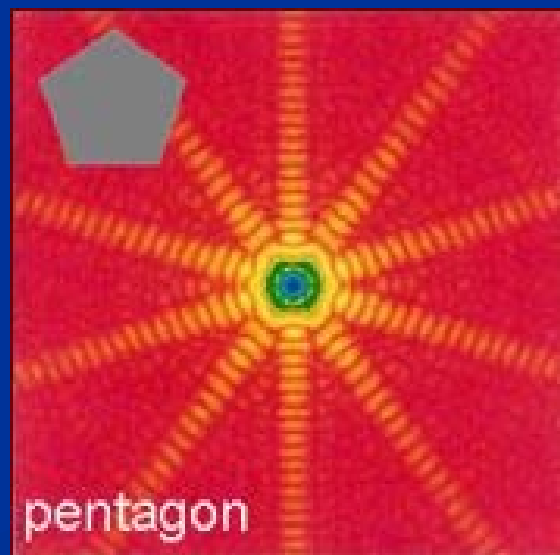
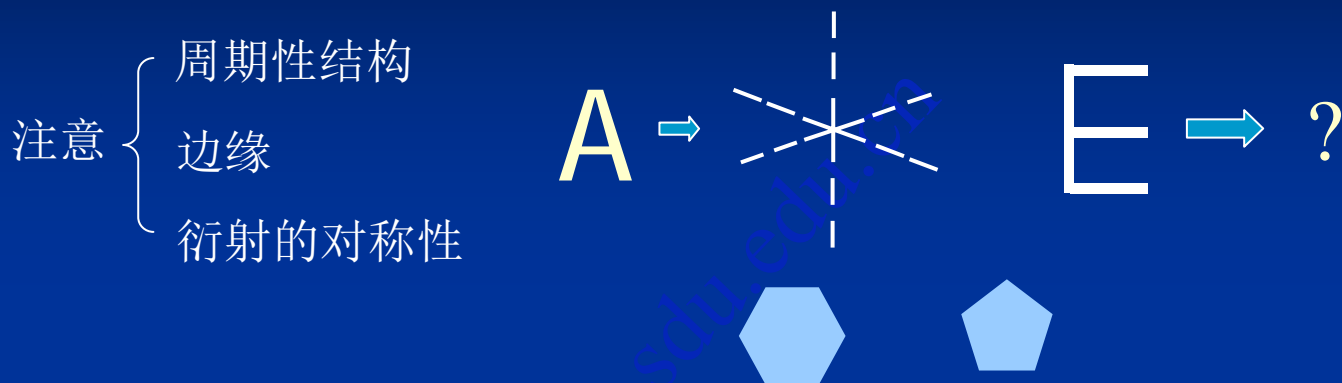
强度分布中心对称, 与孔径形状无关 (即绕中心转 $180^\circ$ 重合).

(4) 尺度反比关系:

衍射图样大小与孔径大小成反比.



## 二. 其他孔径的夫琅禾费衍射的大致判断

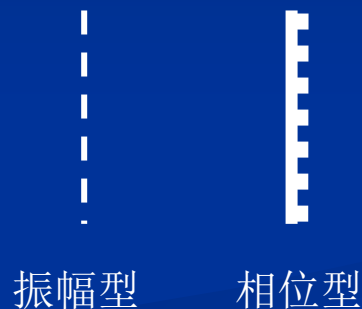




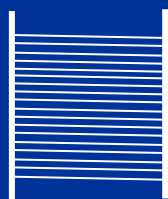
# 4.6 光栅

**光栅** { 狭义—平行等距的多缝屏: Ronchi光栅  
 广义—可对入射光的**振幅**或**相位**作**周期性空间调制**的任何装置.

**分类** { 振幅型和相位型;  
 透射式和反射式;  
 平面光栅和立体(三维)光栅.



最早在1819年, 夫琅禾费



现在已有光刻, 全息法等

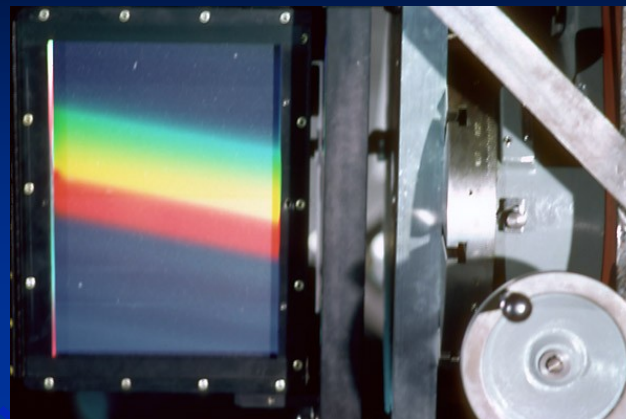
用途:光谱仪, 信息处理等.



## 4.6 光栅



各种商品光栅

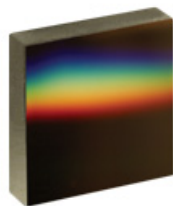


2.7 m天文望远镜摄谱仪所用光栅

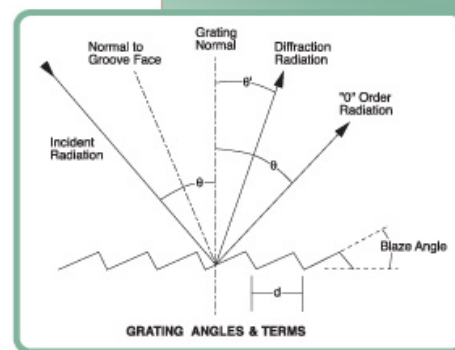
- ▶ Higher Efficiencies than Holographic Gratings
- ▶ Custom Sizes Available on Request
- ▶ 60 to 80% Efficiencies



GR50-0303



GR25-0303



Ruled gratings 闪耀光栅



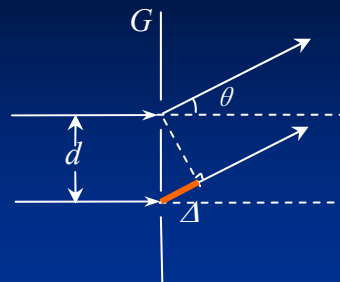


## 4.6.1 光栅的主要性能

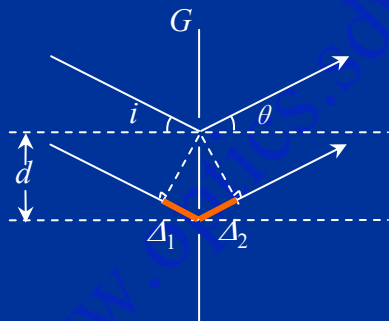
## 一. 光栅方程

以下均以平面透射光栅（Ronchi）为例.

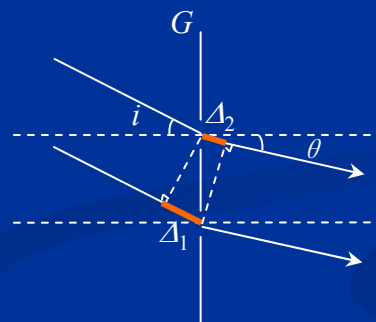
平行光正入射：主极强角位置  $\Delta = d \sin \theta = m\lambda$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )



平行光斜入射：



$$\Delta = d(\sin i + \sin \theta)$$



$$\Delta = d(\sin i - \sin \theta)$$

合并 光栅方程： $d(\sin i + \sin \theta) = m\lambda$

入射、衍射光线在光栅法线同侧  $i, \theta$  皆正，

异侧  $i, \theta$  异号.



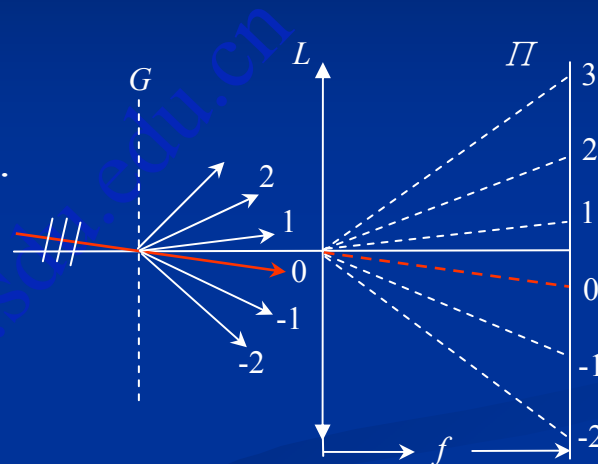
## 4.6.1 光栅的主要性能

讨论:

(1)  $m = 0$ ,  $\theta = -i$ . 0级光即直透方向.

(2)  $i = 0$ , 上下光谱级对称分布.

(3)  $i \neq 0$ , 上下光谱级非对称分布.



在给定入射角  $i$  下所能看到的谱线的最高级次:

由

$$d(\sin i + \sin \theta) = m\lambda$$

$$\theta = \pi/2, \quad m_M = \left[ \frac{(1 + \sin i)d}{\lambda} \right]$$



## 4.6.1 光栅的主要性能



正入射时红光与绿光通过同一光栅的衍射

习题: 27, 28, 31, 32, 33



## 二. 光栅的分光性能

光栅光谱中: 不同波长主极大位置分开,  
0 级混合, 高级有色散,  
级别越高色散越大,  
每级中长波在外侧.

1. 色散本领  $D$ 

把不同波长同级主极大在位置上分开的能力.

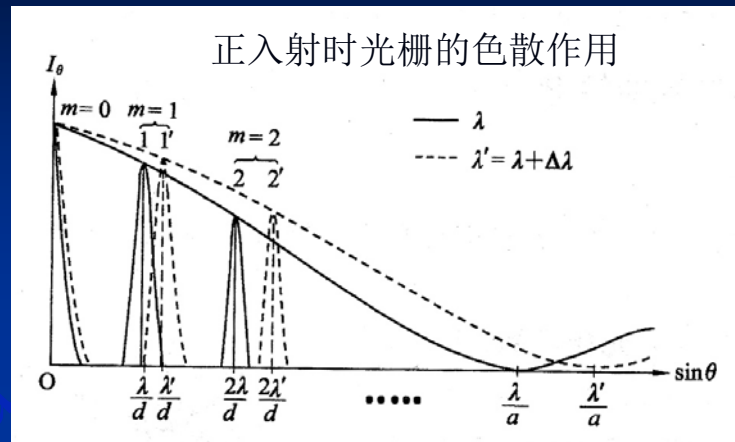
角色散本领  $D_\theta$ :  $D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$

线色散本领  $D_l$ :  $D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$

$$\left. \begin{array}{l} D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} \\ D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} \end{array} \right\} \delta l = f \delta\theta, \quad D_l = f D_\theta.$$

$f$  为透镜焦距

在数值上分别等于在同级谱中单位波长间隔的两个主极大所分开的角距离和接受屏上的线距离.





## 4.6.1 光栅的主要性能

角色散本领  $D_\theta$  :  $D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$

由  $d(\sin i + \sin \theta) = m\lambda$

$m, i$  固定求微分:  $d \cos \theta \delta\theta = m \delta\lambda$

因此有

$$D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m}$$

在正入射时, 利用  $m = \frac{d \sin \theta}{\lambda}$ ,

可以改写为

$$D_\theta = \frac{\tan \theta}{\lambda}$$

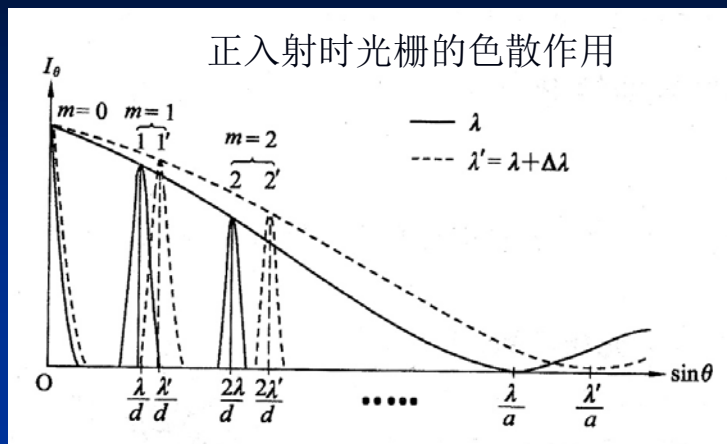


### 4.6.1 光栅的主要性能

$$D_{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m}$$

$$D_{\theta} = \frac{\tan \theta}{\lambda}$$

可见



(1)  $m = 0 \rightarrow D_{\theta} = 0$ ，即零级谱线无色散。

(2) 傍轴区， $\cos \theta \approx 1$ ， $D_{\theta} \approx \frac{m}{d}$ ， $D_l \approx \frac{mf}{d}$ 。

同级谱中  $D_{\theta}$ ,  $D_l$  为常数， $\delta\theta, \delta l \propto \delta\lambda$

即波长与谱线位置呈线性关系 — 匀排光谱。

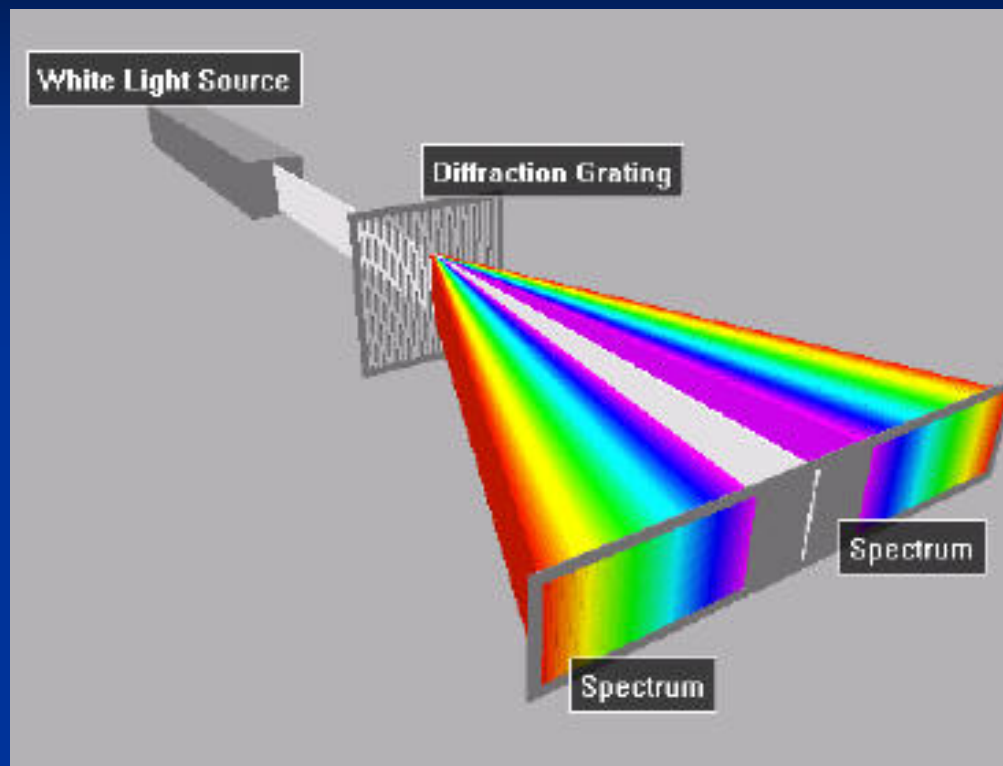
它区别于棱镜，便于用内插法确定  $\lambda$ 。

(3) 不同级  $D \propto m$ ，高级谱色散大。

(4)  $D$  与总刻线数  $N$  无关。(为什么?)



## 4.6.1 光栅的主要性能



白光正入射时光栅色散的示意图 (只画出0,  $\pm 1$ 级)





## 4.6.1 光栅的主要性能



白光通过光栅的衍射



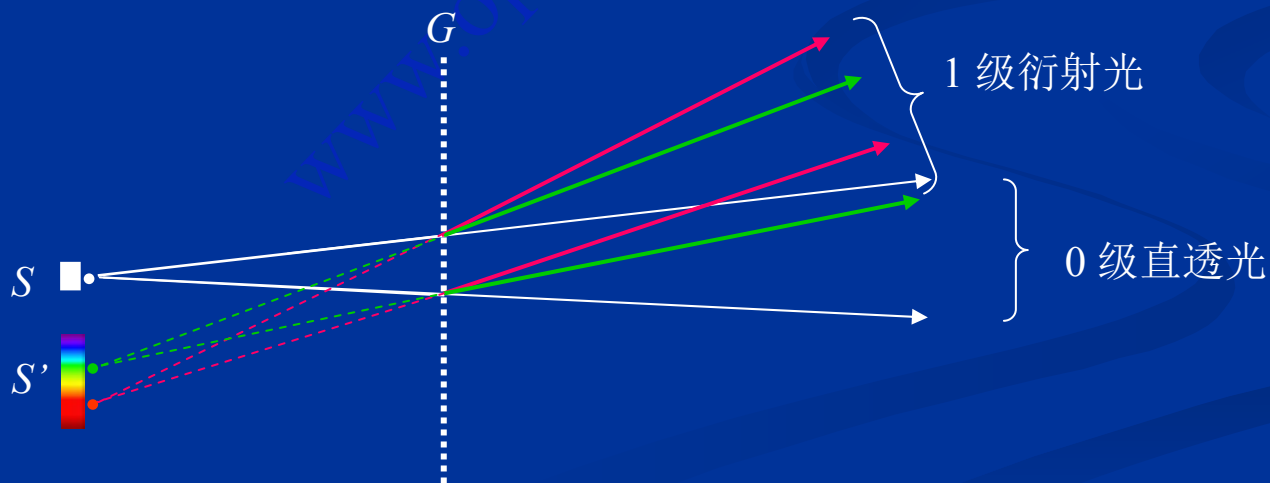
## 4.6.1 光栅的主要性能

通过光栅观察白光源(日光灯管)

思考: 此现象的成因

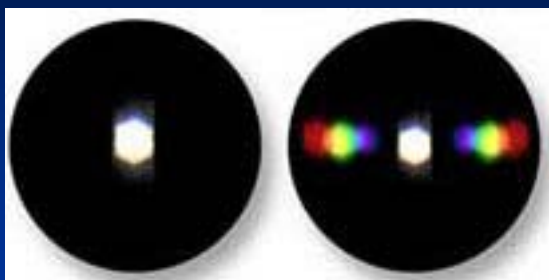
— 光栅的色散与分像作用

- (1) 利用光栅色散说明右图的成因;
- (2) 利用光栅方程证明傍轴下光栅具有分像作用.

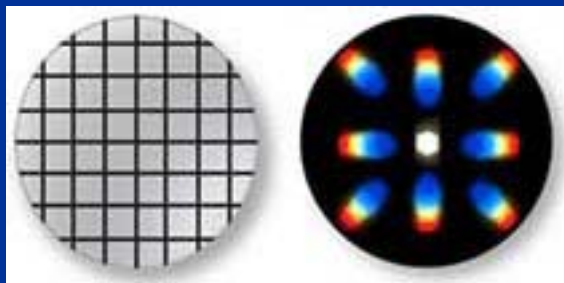




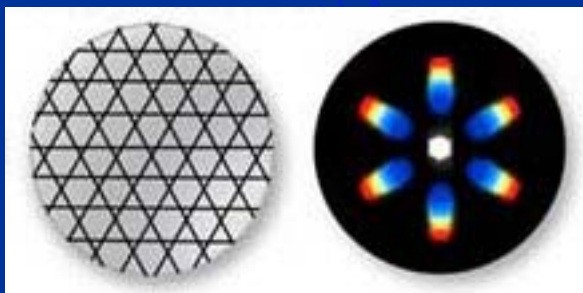
## 4.6.1 光栅的主要性能



一维线光栅的白光衍射



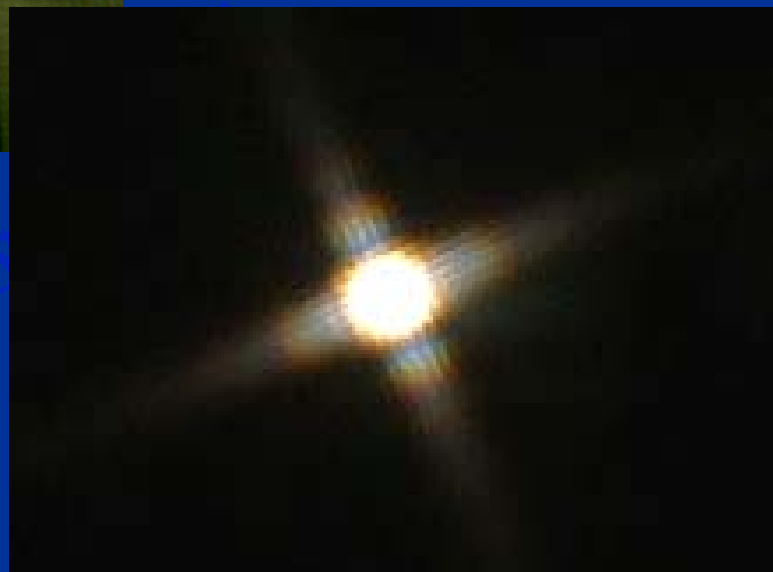
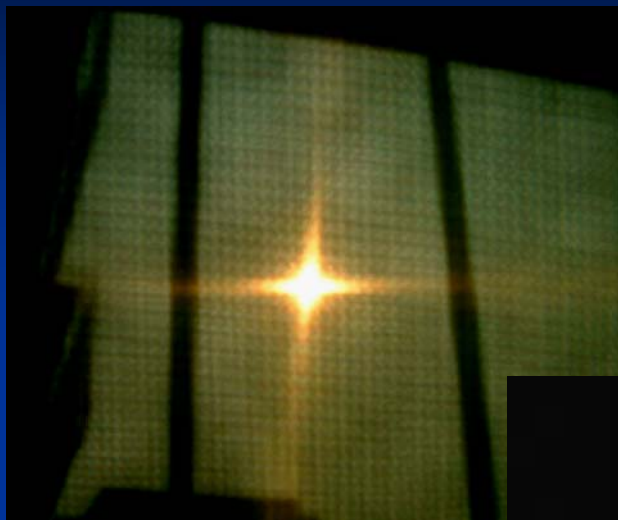
二维正交光栅的白光衍射



二维三角光栅的白光衍射



## 4.6.1 光栅的主要性能

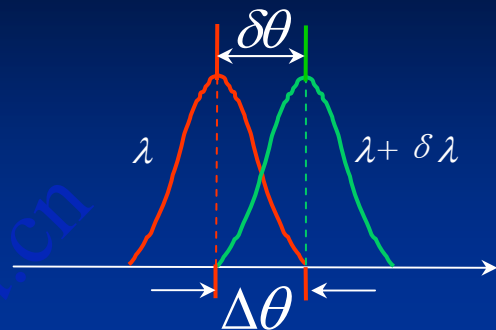


远处灯光经纤维织物的衍射



## 2. 色分辨本领 — 分辨两条相邻谱线的能力

定义  $A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$



其中  $\delta\lambda$  为波长  $\lambda$  附近刚能分辨的两谱线的波长差.

由瑞利判据, 恰能分辨时

两谱线中心角色散  $\delta\theta =$  单谱线的半角宽  $\Delta\theta$

$$\left. \begin{aligned} \text{而 } \delta\theta = D_{\theta}\delta\lambda &= \frac{m\delta\lambda}{d \cos \theta_m} \\ \Delta\theta &= \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_m} \end{aligned} \right\} \delta\lambda = \frac{\lambda}{mN} \Rightarrow A = mN$$



## 4.6.1 光栅的主要性能

$$A = mN$$

$A \propto m, N$ . 提高  $A$   $\begin{cases} m \text{ 大, 用高级谱;} \\ N \text{ 大, 数万.} \end{cases}$

另一形式:  $m = \frac{d(\sin i + \sin \theta)}{\lambda}$ ,  $dN = L$

$\Rightarrow A = \frac{L}{\lambda}(\sin i + \sin \theta)$   $L$  刻线总宽度

思考: 为何  $A$  与  $d$  无关?



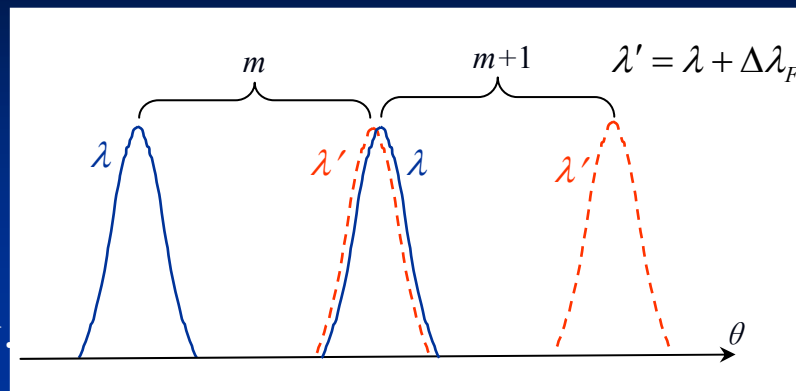
## 4.6.1 光栅的主要性能

### 3. 自由光谱范围 $\Delta\lambda_F$

谱线不发生次级交迭的波长范围

临界情况：

$\lambda'$  的  $m$  级极大与  $\lambda$  的  $m+1$  级极大重合



$$\Delta = m(\lambda + \Delta\lambda_F) = (m+1)\lambda$$

所以有

$$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda}{m}$$

**思考：**为什么  $\Delta\lambda_F$  与光栅本身结构 ( $d, N$  等) 无关而与  $m$  有关？

**数量级：**  $d$ :  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  mm;  $D_\theta$ :  $1 \sim 10'$ /nm; 焦距  $f$ : m;

$D_l$ :  $1 \sim 10$  mm/nm;  $L$ : cm;  $N$ :  $10^4$ ;  $\delta\lambda \sim 0.01$  nm.

$m$  不高,  $\Delta\lambda_F \sim 10^2$  nm.

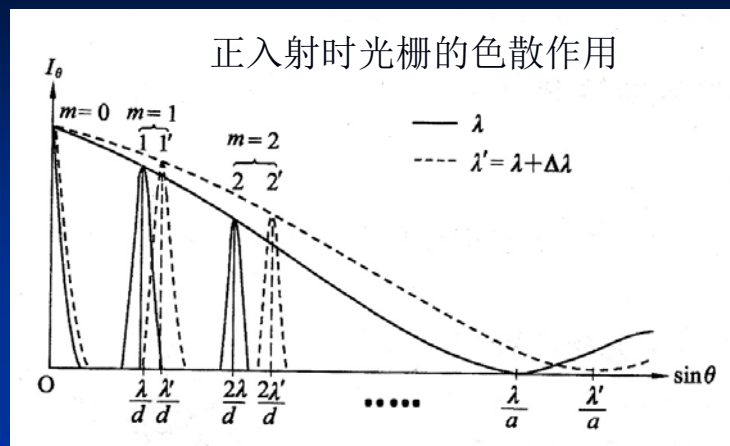




## 4.6.2 两种实际光栅

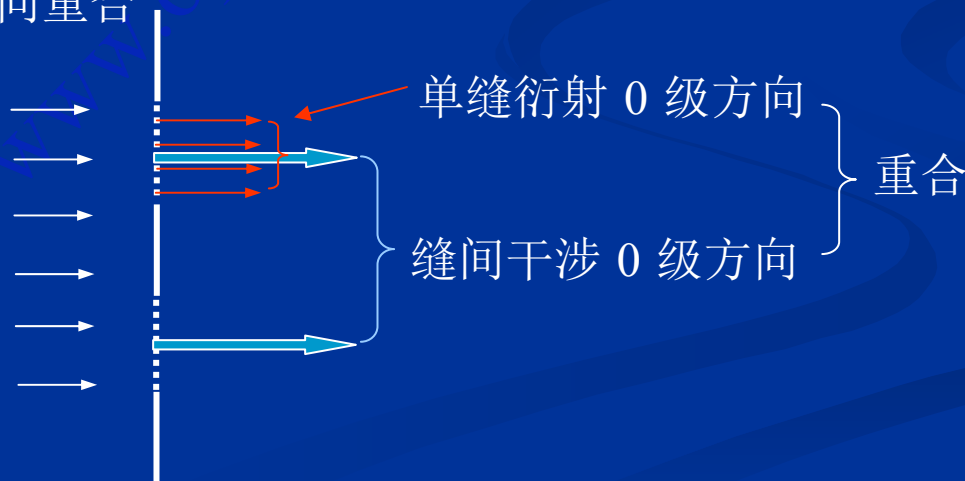
## 一. 阶梯光栅:

普通 (Ronch)光栅缺点:  
大部分能量集中在0级主极强,  
而0级无色散—能量浪费.



- 单缝衍射0级 (包络线中心) — 单缝中各连续点等光程方向;
- 缝间干涉0级 — 各缝光束等光程方向 (以相应点为代表).

一般光栅此两方向重合

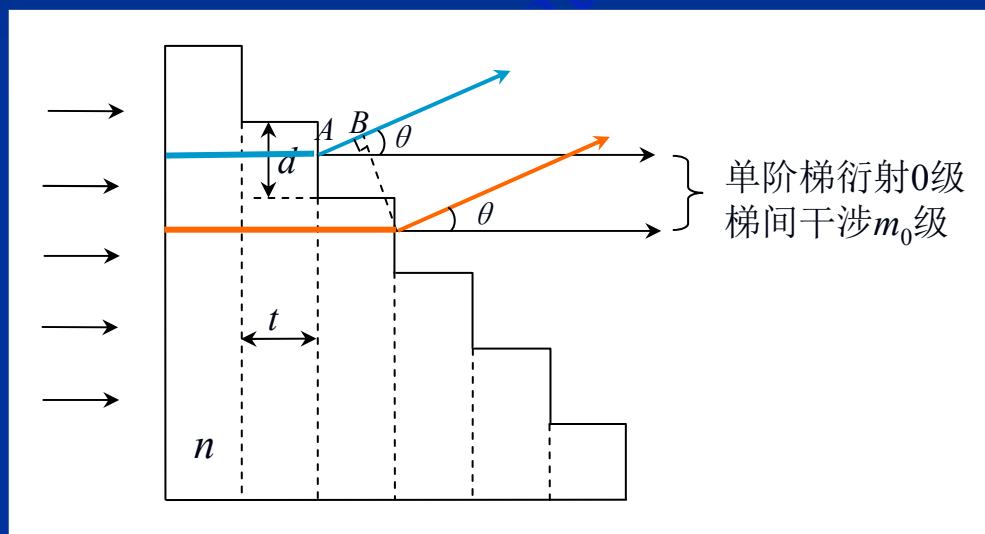




## 4.6.2 两种实际光栅

有没有办法将单缝衍射 0 级 (多缝衍射强度曲线包络线的极大值位置) 移到缝间干涉即光谱线的非 0 级?

方法之一：阶梯光栅

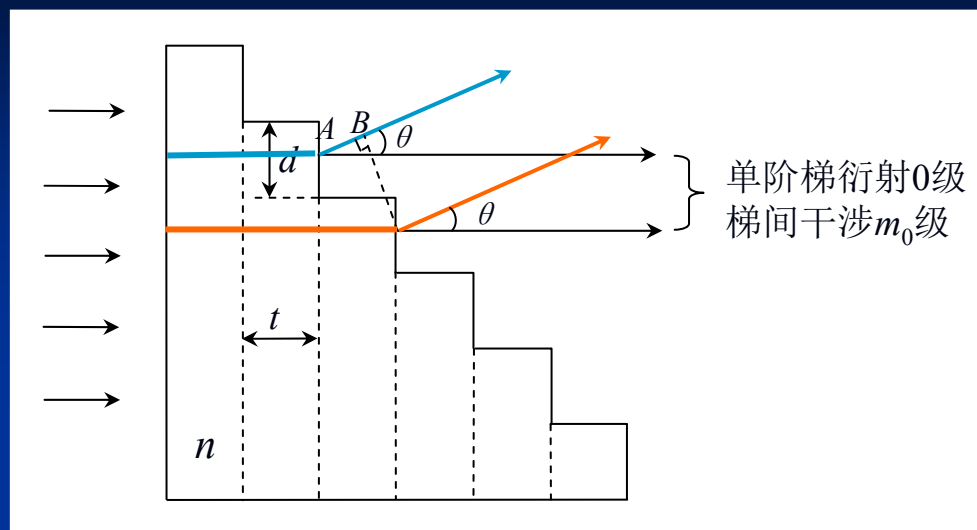


利用玻璃板的阶梯式排列使光能集中于所需光谱级，  
即将包络线的中心（单缝衍射 0 级）从缝间干涉 0 级移到非 0 级。



## 4.6.2 两种实际光栅

### 阶梯光栅的分析



一般  $\Delta = nt - \overline{AB} = (n - \cos \theta)t + d \sin \theta$

傍轴  $\Delta = (n - 1)t + d\theta = m\lambda$

$\theta = 0$  时  $\Delta = (n - 1)t$ ,  $m_0 = \frac{(n - 1)t}{\lambda}$

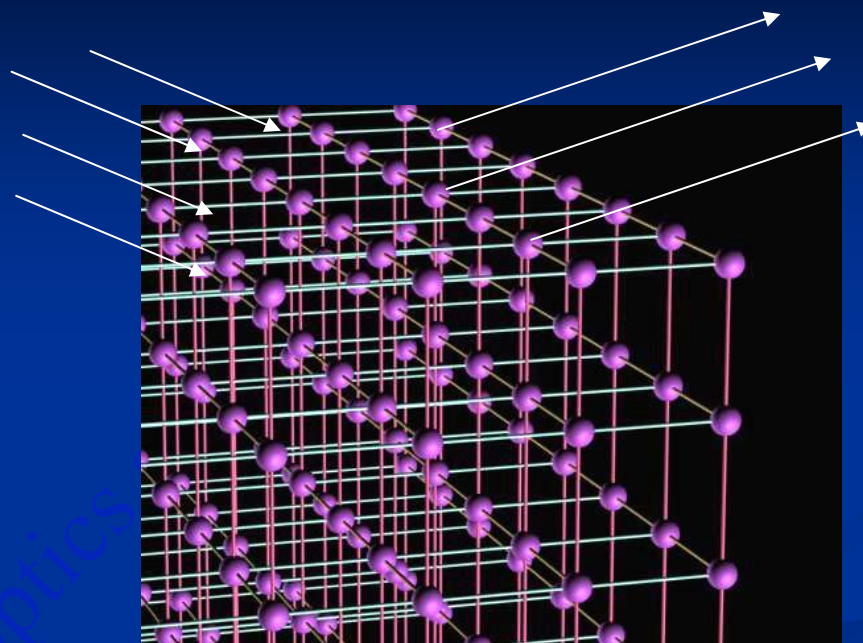
若  $t = 1 \text{ cm}$ , 对于可见光  $m_0 \sim 10^4$ .

$A = mN$ ,  $m$  大,  $A$  大,  $\Delta \lambda_F$  小.



## 二. 三维光栅—晶体衍射

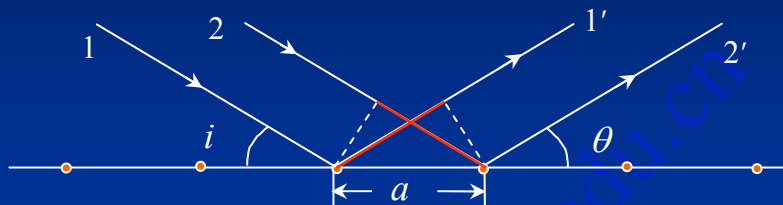
空间点阵—三维光栅



- 各原子对反射光散射, 相当于次波源;
- 各次波源在空间周期排列;
- 各次波相干叠加, 某些方向可形成干涉极大.



## 1. 单层晶面的衍射一点间干涉



一维晶格常数  $a$

$$\Delta = a(\cos \theta - \cos i) = m\lambda$$

若对任意  $a$  值均能满足上式，只有  $m=0$ ,  $\theta=i$ . 此即反射定律.  
即对任意平面，只有一个干涉为极强方向，即为镜面反射方向.  
若结构有周期性，出现高级衍射极大方向，一般平面只有0级.

晶体中有多个晶面族，考虑到多种取向的晶面族时，只计各晶面的0级方向即可.



## 2. 晶体的衍射—晶面干涉

每晶面族衍射极强方向即  
各晶面0级衍射光（镜面反射光）发生相长干涉的方向。

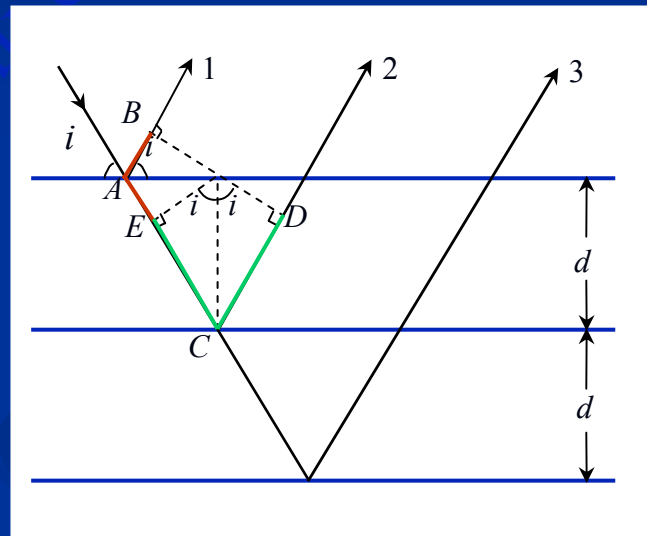
右图示某一晶面族，平行光入射，  
相邻两晶面反射光光程差：

$$\Delta = (\overline{AC} + \overline{CD}) - \overline{AB}, \quad \overline{AE} = \overline{AB}$$

故  $\Delta = \overline{EC} + \overline{CD} = 2d \sin i$

面间干涉相长条件  $2d \sin i = m\lambda$

布拉格(Bragg)条件



讨论：(1) 因为  $d$  很小，只有  $0.1 \text{ nm}$  数量级，  
必须利用波长可与  $d$  相比拟的波长极短的波（ $\lambda \leq 2d$ ），  
如 **X 射线**。



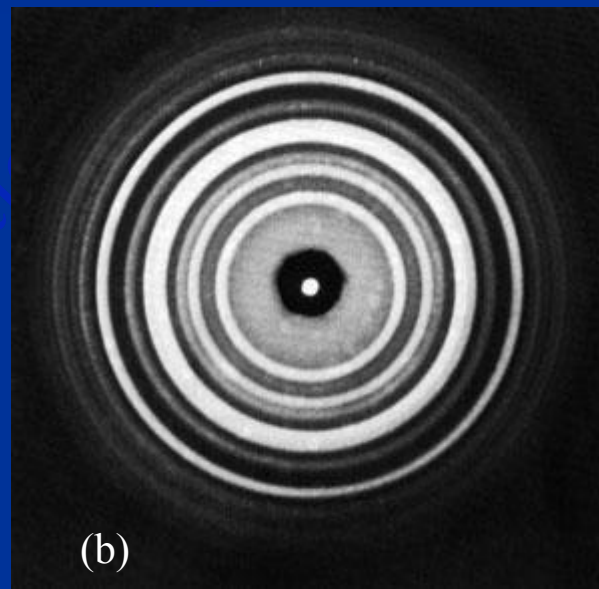
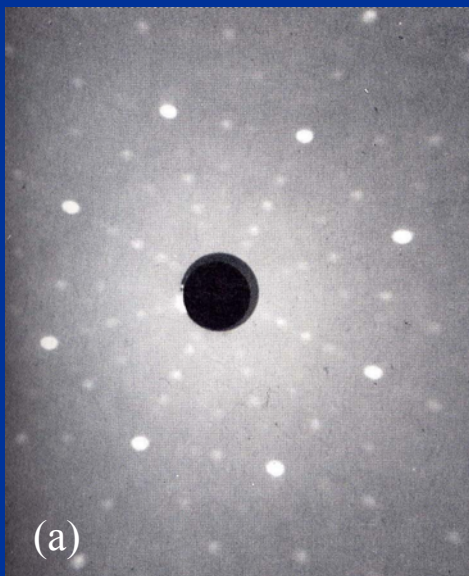
## 4.6.2 两种实际光栅

(2) 一般  $d, i, \lambda$  给定后不一定恰好满足布拉格条件  $2d \sin i = m\lambda$  为观察晶体衍射，常用以下两种方法：

(a) 改变  $\lambda$ ：连续谱入射—**劳厄法**（给定  $d, i$ ，选择适当  $\lambda$ ）。

(b) 改变晶体取向，改变  $i$ ：**粉末法**

（单色光照射， $\lambda$  给定， $i$  随机变化，对确定  $d$  值选择适当  $i$ ）。



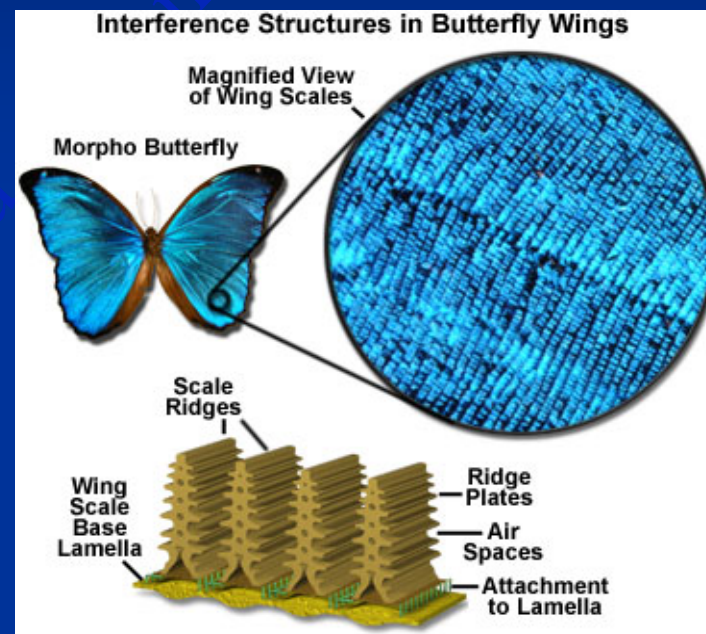
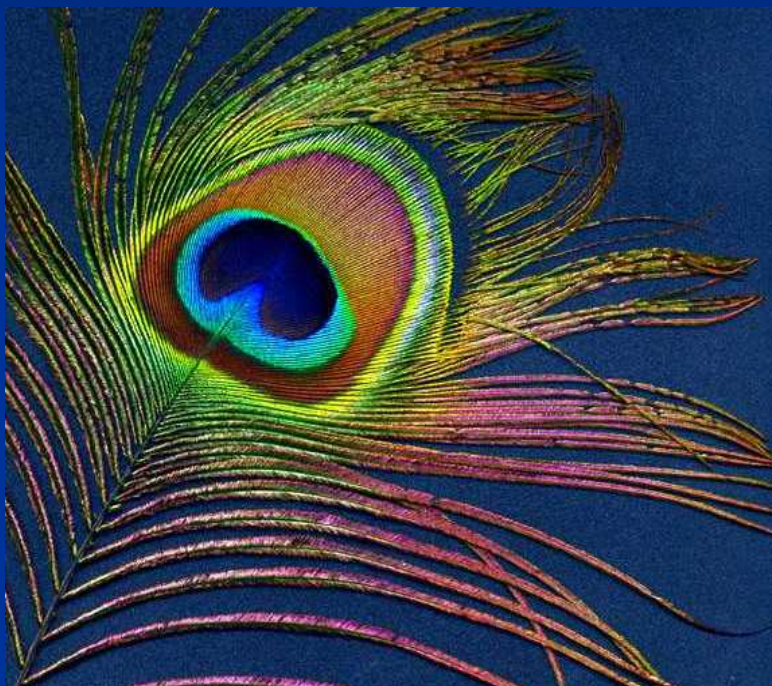
应用：X射线光谱学. 已知波长的X线研究晶体结构，  
或用已知结构的晶体研究X线光谱组成。





## 4.6.2 两种实际光栅

### 自然界的衍射现象





## 4.6.2 两种实际光栅





## 4.6.2 两种实际光栅

Spider web



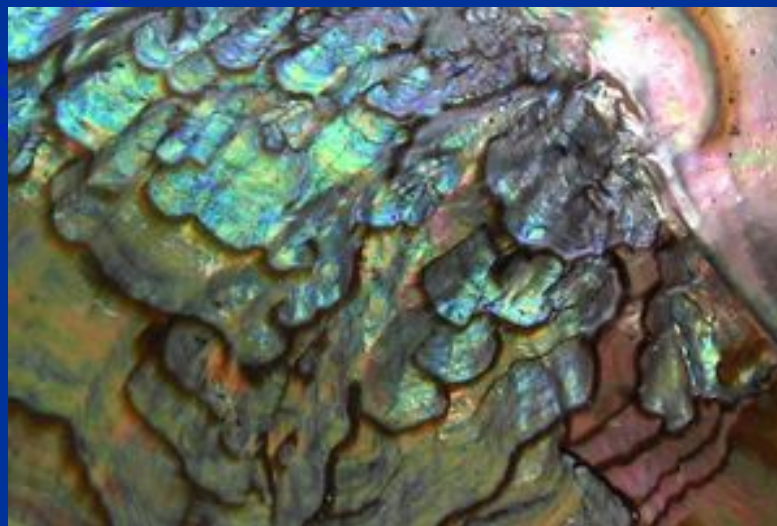




## 4.6.2 两种实际光栅



Shell





## 4.6.3 棱镜、光栅、法一珀干涉仪分光性能的比较

## 一. 棱镜光谱仪

$$1. \text{色散本领 } D_{\theta} = \frac{b}{a} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \text{ 材料的色散率}$$

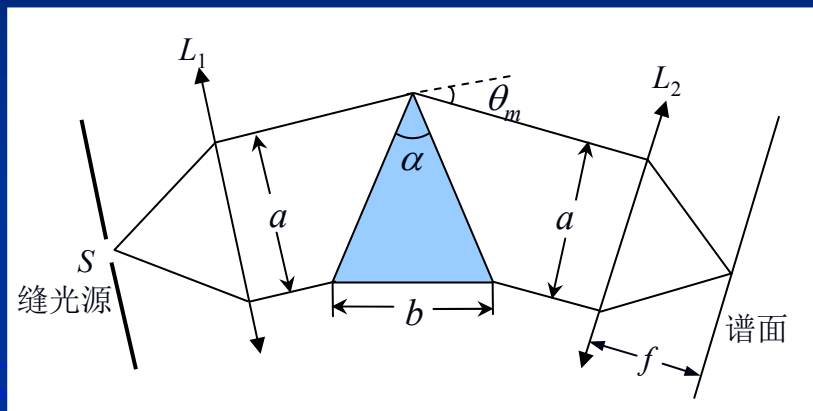
$$D_l = f D_{\theta}$$

$$2. \text{色分辨本领 } A = b \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$$

## 3. 自由光谱范围

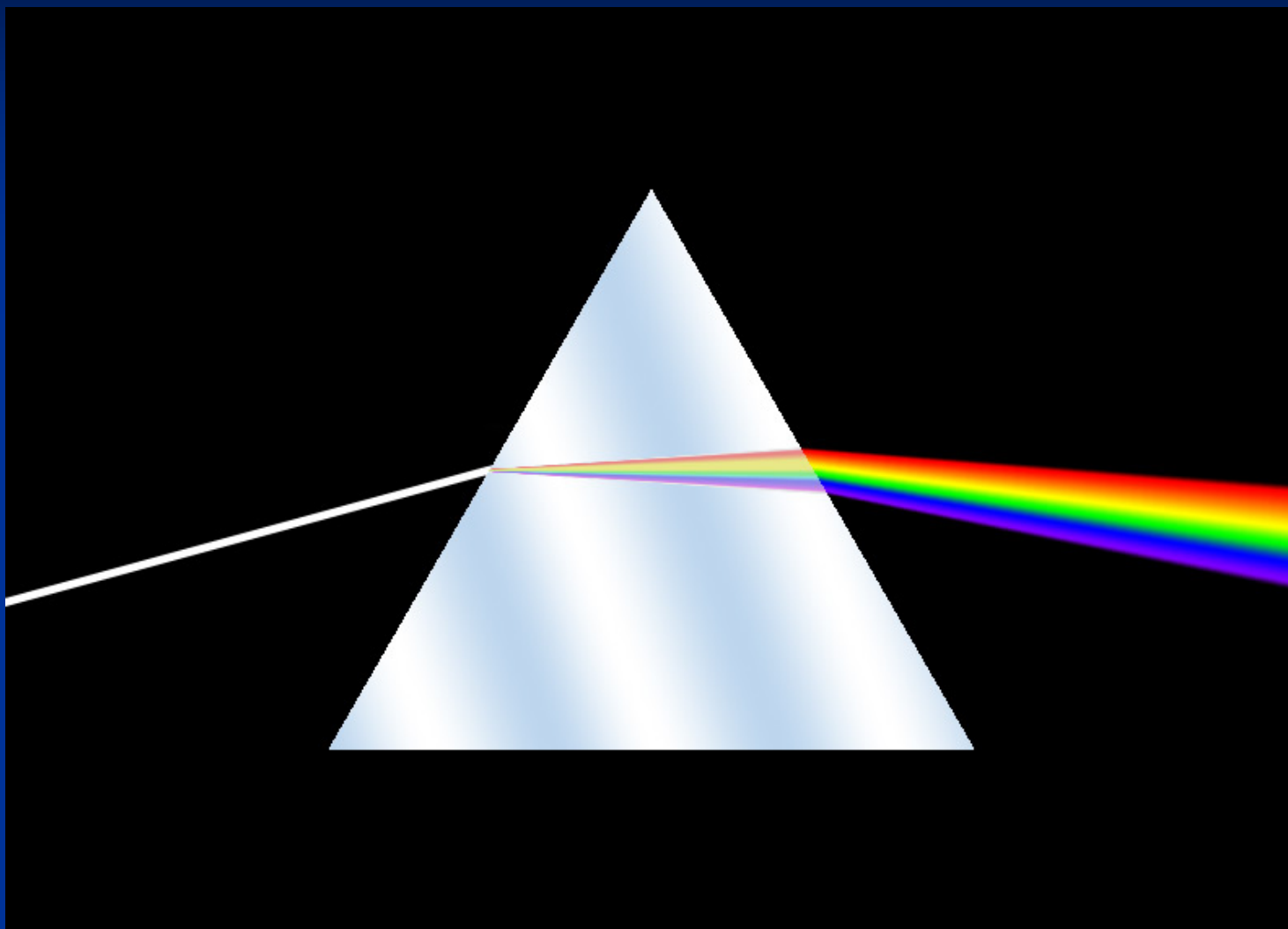
因为没有零级和高级谱，不会发生级次重叠，对理想的无吸收棱镜，不受限制。

实际棱镜材料只受材料光谱透过率限制。





### 4.6.3 棱镜、光栅、法—珀干涉仪分光性能的比较





## 4.6.3 棱镜、光栅、法—珀干涉仪分光性能的比较

### 二. 三种分光装置性能比较

表 4.6.1 三种分光装置性能的比较

	棱 镜	普通(Ronchi)光栅	法—珀干涉仪
角色散本领 $D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$ $D_i = \frac{\delta i}{\delta\lambda}$	$D_\theta = \frac{b}{a} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$ $\frac{b}{a} : 1$ $\left  \frac{dn}{d\lambda} \right  : 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$ $ D_\theta  : 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$	$D_\theta = \frac{m}{d \cos\theta}$ $D_\theta = \frac{\tan\theta}{\lambda}$ (正入射) $d : 10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ mm}$ $m = 1$ 时 $D_\theta : 10^{-4} \sim 10^{-3} \text{ nm}^{-1}$	$D_i = -\frac{1}{\lambda \tan i}$ $i \rightarrow 0$ 时 $D_i \rightarrow \infty$
色分辨本领 $A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$	$A = b \left  \frac{dn}{d\lambda} \right $ $b : 1 \sim 10 \text{ cm}$ $A : 10^3 \sim 10^4$	$A = mN$ $A = \frac{L}{\lambda} \sin\theta$ (正入射) $m$ : 数级 $L : 1 \sim 10 \text{ cm}$ $N : 10^3 \sim 10^5$ $A : 10^3 \sim 10^5$	$A = m\mathcal{F}$ $m : 10^4 \sim 10^6$ $\mathcal{F} : 10 \sim 10^2$ $A : 10^5 \sim 10^7$
自由光谱范围 $\Delta\lambda_F$	$\infty$ 实际上仅受材料 光谱透射率限制	$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda}{m}$ $\sim 10^2 \text{ nm}$	$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda}{m}$ $10^{-3} \sim 10^{-1} \text{ nm}$

F-P:  $A$ 最高,  $\Delta\lambda_F$ 最小, 超精密分析





## 本章小结

### 一. 基本原理

惠更斯—菲涅耳原理：次波相干叠加

- 有限分离次波源—干涉
- 无限连续次波源—衍射

### 二. 基本方法

菲涅耳衍射

- 半波带法
- 矢量图解法

夫琅禾费衍射

- 半波带法
- 矢量图解法
- 复振幅叠加
- 公式法

### 三. 基本内容

衍射分类

菲涅耳衍射：半波带数的计算, 圆, 环, 扇, 波带片

夫琅禾费衍射：单缝, 矩孔

圆孔, 分辨本领

多缝, 光栅, 三个参数.

习题: 34, 35, 39, 40, 41

有奖: 思考题 3, 4, 6, 10