文章编号: 1000-5013(2011)01-0022-08

# 部分相干电磁光束在湍流大气中传输的交叉偏振度

张国文, 蒲继雄

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 推导部分相干电磁高斯-谢尔模型光束在湍流大气中的交叉谱密度矩阵. 根据交叉偏振度的理论,研究部分相干电磁光束在湍流大气中的交叉偏振度的变化情况. 研究表明,部分相干电磁光束的交叉偏振度由大气折射率结构常数、光源相关长度、光束初始偏振度和观察点位置决定. 交叉偏振度不同于一般偏振度,它的值不再仅仅局限在 0~1,而是可以取任何非负值. 同时也发现,与一般偏振度的分布趋势截然不同,交叉偏振度在湍流大气中会呈先扩散,后压缩的分布趋势. 同时,当相关长度取值相等时,部分相干电磁光束在湍流大气中传输的交叉偏振度不再发生变化.

**关键词:** 部分相干; 电磁光束; 高斯-谢尔模型; 湍流大气; 交叉偏振度

**中图分类号:** O 436.3 **文献标识码:** A

1994 年,James 首次提出了光束在自由空间传播时偏振会发生变化以来[1]. 其后,光束在传输过程中的偏振变化逐渐成为研究热点[2-9]. Wolf 等[10-11]提出了相干偏振统一理论. 基于此理论,电磁高斯-谢尔模型(EGSM)光束在自由空间的光谱和偏振特性得到了进一步的研究[12]. 相关的研究[13-18]表明,部分相干电磁光束在自由空间中,经过足够的传输距离后,轴上偏振度趋向一个固定的值,不再发生变化;而在湍流大气中,经过足够的传输距离,轴上偏振度趋近源初始偏振度. 同时,研究发现轴上偏振度的变化和源的初始偏振度密切相关. Shirai 等[19]在研究部分相干电磁光束的光强涨落时引入了交叉偏振度的概念,这与 Ellis 等[20]介绍的复偏振度的概念是一致的. 基于此,本文研究部分相干光束经过大气湍流的交叉偏振度的变化情况,以及交叉偏振度随传输距离的变化和受大气结构常数、光源相关长度、光源初始偏振度等的影响.

## 1 理论模型

假设一束准单色部分相干电磁高斯-谢尔模型(EGSM)光束,在湍流大气中沿着 $z$ 轴正方向传输. 在 $z=0$ 平面,频率为 $\omega$ 的该光束可用一个 $2\times2$ 交叉谱密度矩阵来描述[10],即

$$\boldsymbol{W}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)=\begin{bmatrix}W_{x,x}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega) & W_{x,y}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\\ W_{y,x}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega) & W_{y,y}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\end{bmatrix}. \tag{1}$$

$$W_{i,j}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)=\langle E_i^*(\boldsymbol{\rho}_1,\omega)E_j(\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\rangle=$$
$$\left[S_i^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\omega)S_j^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\right]^{1/2}\mu_{i,j}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2,\omega),\quad i=x,y,\ j=x,y, \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{\rho}_1$,$\boldsymbol{\rho}_2$ 均为位置矢量;$E_x$,$E_y$ 分别为两正交并与 $z$ 轴方向相垂直的场分量;$*$ 为共轭量;$\langle\rangle$ 为系综平均;$S_i^{(0)}$ 和 $S_j^{(0)}$ 分别表示 $i$ 和 $j$ 分量的光谱密度,$\mu_{i,j}^{(0)}$ 表示 $i$ 和 $j$ 分量之间的相干度,它们可表示为[21]

$$S_i^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\omega)=I_i\exp\left[-\boldsymbol{\rho}^2/(2\sigma^2)\right],\quad i=x,y; \tag{3}$$

$$\mu_{i,j}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)=B_{i,j}\exp\left[-(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)^2/(2\delta_{i,j}^2)\right],\quad i=x,y;\quad j=x,y. \tag{4}$$

收稿日期: 2009-02-23

通信作者: 蒲继雄(1962-),男,教授,主要从事光学与光子学的研究. E-mail:jixiong@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省科技计划重点项目(2007H0027)

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式(3)，(4)中：$\sigma$ 为光源光斑半径；$\delta$ 为光束的相关长度；$I$ 和 $B$ 分别为光谱密度和相关系数．一般来讲，$I$ 和 $B$ 都与位置无关，而与频率有关，满足：$B_{x,x}=B_{y,y}\equiv 1$，$B_{x,y}=B_{y,x}=B$，$\delta_{x,y}=\delta_{y,x}$，$\max\{\delta_{x,x},\delta_{y,y}\}\leqslant\delta_{x,y}\leqslant\min\{\delta_{x,x}/\sqrt{B},\ \delta_{y,y}/\sqrt{B}\}$.

根据广义惠更斯-菲涅耳原理，式(1)所表征的部分相干电磁高斯-谢尔模型光束中的各交叉谱密度矩阵元，通过湍流大气传输应满足[22]

$$W_{i,j}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2\iint \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_1\iint \mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_2 W_{i,j}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0,\omega)\times$$

$$\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\rho}_1)^2-(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{\rho}_2)^2}{2z}\right]\times\langle\exp[\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\rho}_1,z,\omega)+\Psi^*(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{\rho}_2,z,\omega)]\rangle_m. \tag{5}$$

式(5)中：$k=\omega/c$，$c$ 为真空中的光速；$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\rho},z,\omega)$ 为大气湍流对球面波的随机相位因子．采用 Rytov 相位结构函数并进行近似[23]，可得

$$\langle\exp[\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\rho}_1,z,\omega)+\Psi^*(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{\rho}_2,z,\omega)]\rangle_m\cong$$

$$\exp\left\{-\frac{\pi^2k^2z}{3}[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2+(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)+(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)^2]\int_0^\infty\boldsymbol{\kappa}^3\Phi_n(\boldsymbol{\kappa})\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\right\}. \tag{6}$$

式(6)中：$\Phi_n(\boldsymbol{\kappa})$ 为大气介质中的折射率函数的空间功率谱．

把式(2)，(3)和式(4)代入式(5)中，经过一系列复杂的积分运算，可得部分相干电磁高斯-谢尔模型光束经湍流大气后的交叉谱密度函数，其表达式为

$$W_{i,j}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\frac{\sqrt{I_iI_j}B_{i,j}}{\Delta_{i,j}^2(z)}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)^2}{8\sigma^2\Delta_{i,j}^2(z)}\right)\times$$

$$\exp\left\{-\left[\frac{1}{2\Delta_{i,j}^2(z)}\left(\frac{1}{4\sigma^2}+\frac{1}{\delta_{i,j}^2}\right)+M(1+\sigma^2)-\frac{M^2z^2}{2k^2\sigma^2\Delta_{i,j}^2(z)}\right](\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2\right\}\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}_2^2-\boldsymbol{r}_1^2)}{2R_{i,j}(z)}\right], \tag{7}$$

$$\Delta_{i,j}^2(z)=1+\frac{z^2}{(k\sigma)^2}\left(\frac{1}{4\sigma^2}+\frac{1}{\delta_{i,j}^2}\right)+\frac{2Mz^2}{k^2\sigma^2}, \tag{8}$$

$$R_{i,j}(z)=\frac{k^2\sigma^2\Delta_{i,j}^2(z)z}{k^2\sigma^2\Delta_{i,j}^2(z)+Mz^2-k^2\sigma^2}. \tag{9}$$

在式(8)，(9)中，$M$ 的取值有两种情况：当 $M=0.546\ 5C_n^2l_0^{-1/3}k^2z$ 表示的是 Tatarskii 模型谱(文中的数值计算均采用 Tatarskii 模型谱)；而当 $M=0.49(C_n^2)^{6/5}k^{12/5}z^{6/5}$ 表示的是 Kolmogorov 模型谱．其中：$C_n^2$ 表示湍流大气折射率结构常数，表征湍流的强弱；$l_0$ 表示湍流的内尺寸大小．

根据交叉偏振度的定义[19]，有

$$P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\sqrt{1-\frac{4\det\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)}{[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)]^2}}, \tag{10}$$

式(10)中：det，tr 分别为矩阵的秩、迹．当 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 两点重合时，交叉偏振度就变为一般偏振度，则有[10]

$$P(\boldsymbol{r},z,\omega)=\sqrt{1-\frac{4\det\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)}{[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)]^2}}. \tag{11}$$

根据以上的理论推导，可以采用式(7)，(8)，(9)和式(10)来做数值模拟，以分析部分相干电磁高斯-谢尔模型光束在大气湍流中交叉偏振度的变化情况．

## 2　数值模拟

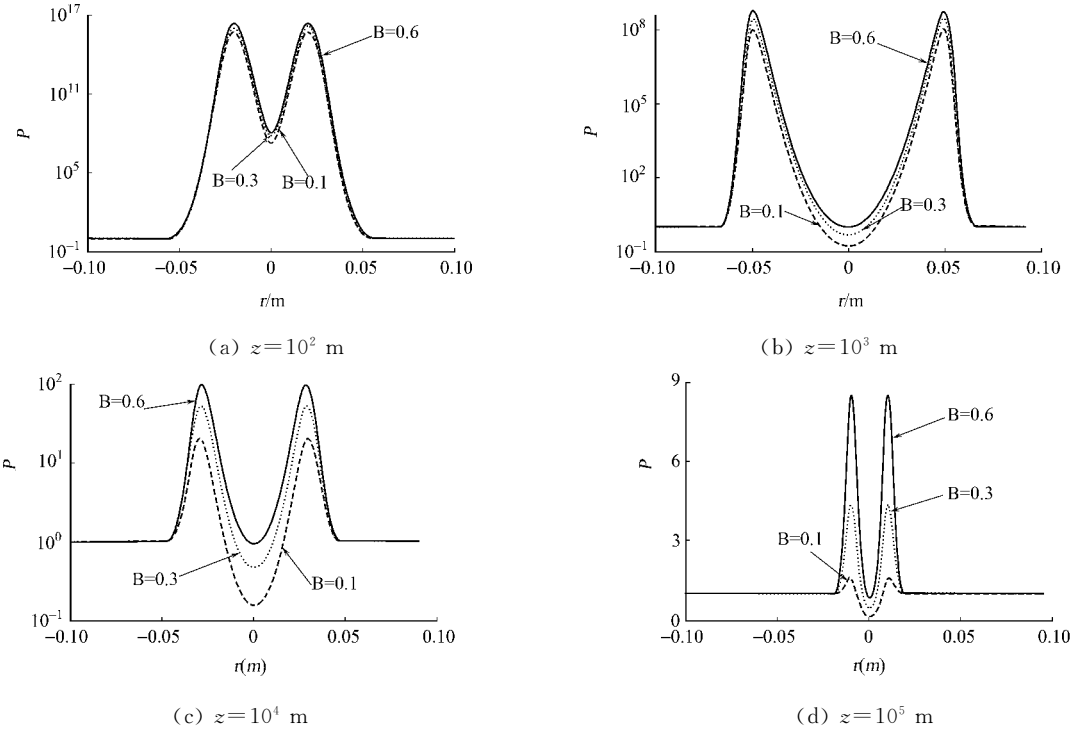
### 2.1　场分量互相关联

首先研究是场分量互相关联的情况．为了简便起见，令 $I_x=I_y$，$\delta_{x,x}=\delta_{y,y}$．根据式(11)，则源处的一般偏振度 $P^{(0)}=B$．取 $\lambda=632.8$ nm，$\sigma=5$ cm，$l_0=5$ mm，$\delta_{x,x}=\delta_{y,y}=1$ mm，采用式(8)，(9)和(10)对传输场中的交叉偏振度进行数值模拟．通过改变源处的初始偏振度($B$)、源的相关长度($\delta$)和大气折射率结构常数($C_n^2$)，研究它们对部分相干电磁光束在湍流大气中的交叉偏振度的变化的影响．

2.1.1　初始偏振度　不同的初始偏振度 $B$，交叉偏振度在不同截面的变化趋势，如图 1 所示．图 1 中：$\boldsymbol{r}_1=0$，$\boldsymbol{r}_2=r$，$\delta_{x,y}=\delta_{y,x}=1.2$ mm，$C_n^2=10^{-13}$ m$^{-2/3}$．从图 1 可以看出，交叉偏振度不同于一般偏振度，交叉偏振度的值不再局限在 0～1 之间．图 1(a)交叉偏振度的最大值趋近于 $10^{17}$，随着传输距离的增加，交

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

叉偏振度随之减小;而图1(d)交叉偏振度的最大值只有8.这说明交叉偏振度受传输距离的影响是很剧烈的.同时也可以看出,当参数 $B$ 越大,交叉偏振度也越大.



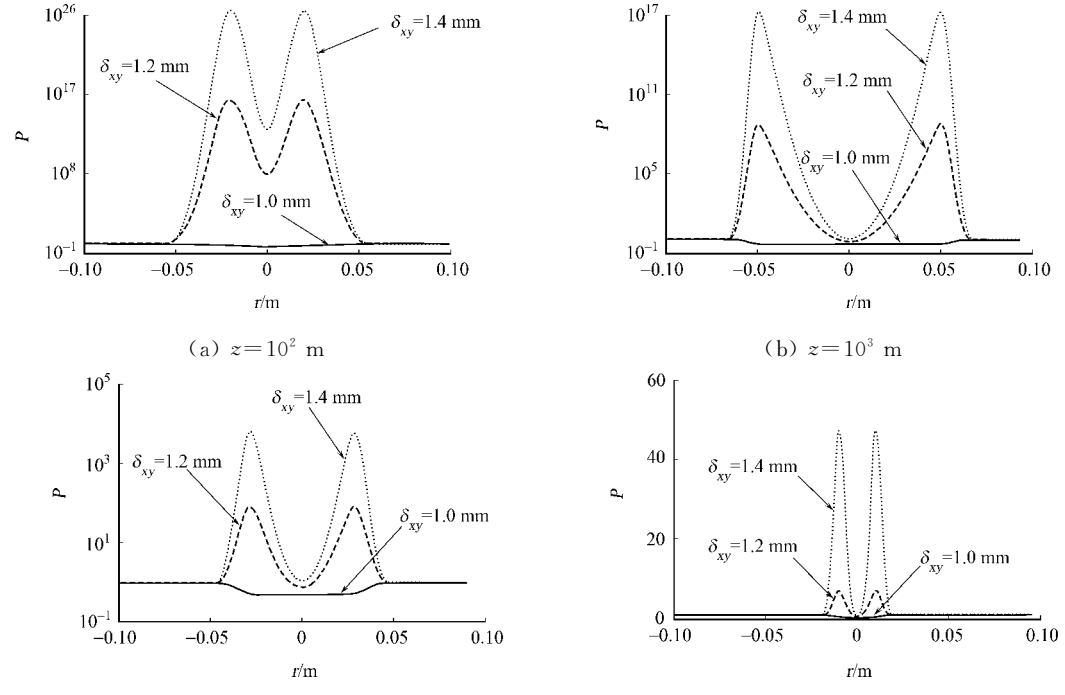

(a) $z=10^2$ m (b) $z=10^3$ m

(c) $z=10^4$ m (d) $z=10^5$ m

**图1 不同初始偏振度下的交叉偏振度**

Fig. 1 Spectral degree of cross-polarization for different values of the initial degree of polarization

2.1.2 **相关长度** 不同相关长度,交叉偏振度在不同截面的变化趋势,如图2所示.图2中:$B=0.5$,$C_n^2=10^{-13}$ m$^{-2/3}$.从图2可看出,$\delta_{x,y}$ 越大,交叉偏振度就越大.当 $\delta_{x,x}=\delta_{y,y}=\delta_{x,y}=\delta_{y,x}$ 时,传输场中交叉偏振度的值不再发生变化,而是一个固定的值.这时,场中交叉偏振度就等于源处的一般偏振度.




(a) $z=10^2$ m (b) $z=10^3$ m

(c) $z=10^4$ m (d) $z=10^4$ m

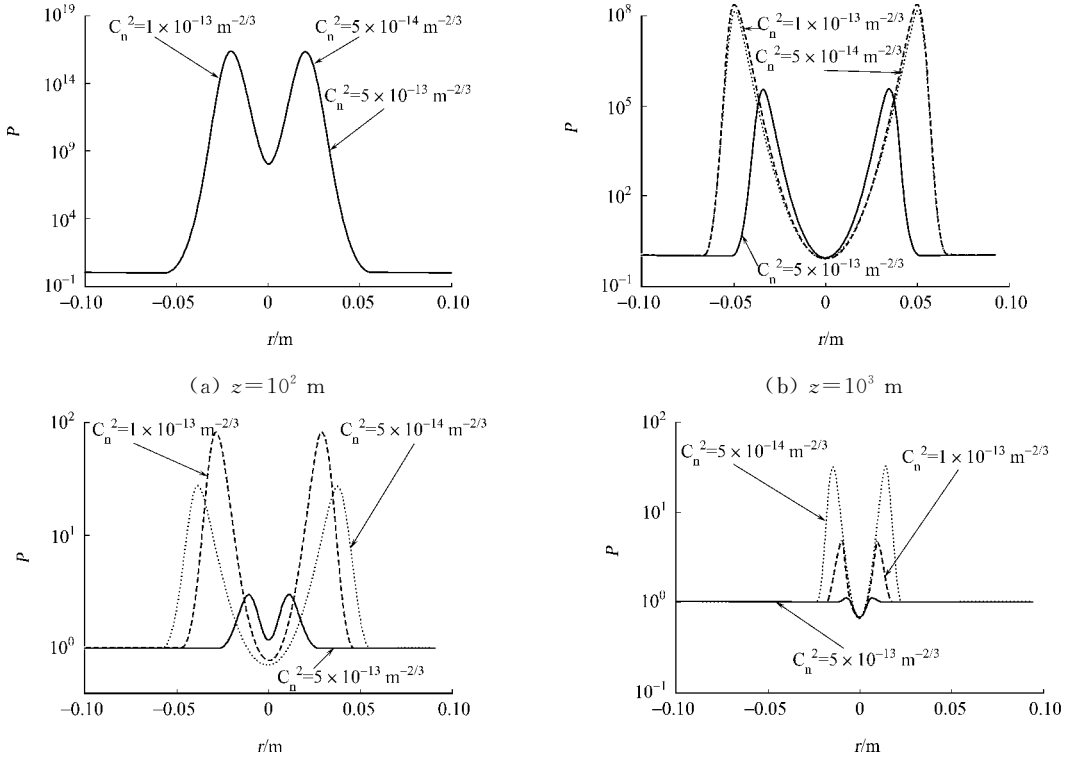
**图2 不同相关长度情况下的交叉偏振度**

Fig. 2 Spectral degree of cross-polarization for different values of the correlation lengths

2.1.3 **大气折射率结构常数** 不同的大气折射率结构常数 $C_n^2$,交叉偏振度在不同截面的变化趋势,如

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图 3 所示. 图 3 中：$\delta_{x,y}=\delta_{y,x}=1.2$ mm，$B=0.5$. 从图 3 可以看出，在传输距离较小的时候，大气折射率结构常数微小的变化对交叉偏振度的影响很小(图 3a). 随着传输距离的增加，大气折射率结构常数对交叉偏振度的影响越来越明显. 从图 3 中还可以看出，大气折射率结构常数除了能抑制光束的强度和一般偏振度的扩散外，对交叉偏振度也有同样的作用.




(a) $z=10^2$ m　　(b) $z=10^3$ m

(c) $z=10^4$ m　　(d) $z=10^5$ m

图 3　不同大气折射率结构常数下的交叉偏振

Fig. 3　Spectral degree of cross-polarization for different values of the refractive index structure parameter of turbulence

## 2.2　场分量非关联

在研究光束场分量关联的情况下，发现部分相干高斯-谢尔模型光束在湍流大气中的交叉偏振度的值非常大. 这不方便观察交叉偏振度全貌. 因此，研究光束场分量非关联的情况，即 $B_{x,y}=B_{y,x}=B=0$ 的情况. 根据式(10)，在传输场中的交叉偏振度为

$$P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\sqrt{1-\frac{4\det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)}{[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)]^2}}=\frac{|W_{x,x}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)-W_{y,y}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)|}{W_{x,x}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)+W_{y,y}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)}. \tag{12}$$

把式(2)，(3)，(4)代入式(11)，可得源处的一般偏振度为

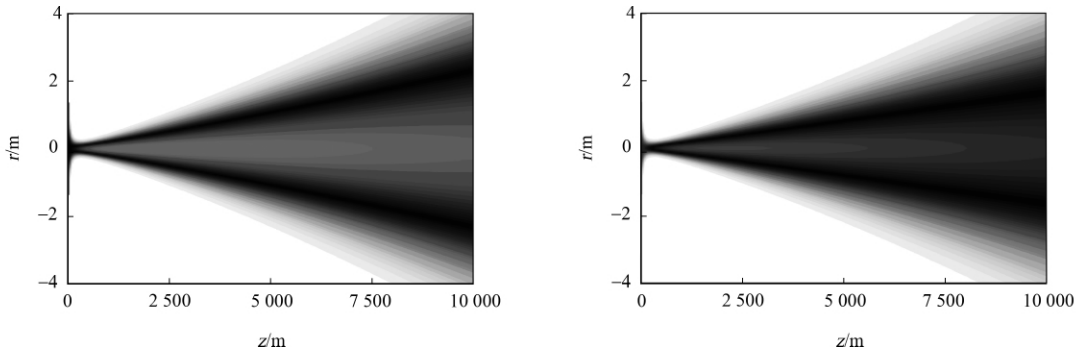
$$P^{(0)}=|I_x-I_y|/(I_x+I_y). \tag{13}$$

2.2.1　初始偏振度　不同的初始偏振度，一般偏振 $P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 和交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的分布图，如图 4，5 所示. 图 4，5 中：$\lambda=632.8$ nm，$\sigma=5$ cm，$l_0=5$ mm，$\delta_{x,x}=0.5$ mm，$\delta_{y,y}=1$ mm，$C_n^2=10^{-13}$ m$^{-2/3}$. 从图 4 可以看出，一般偏振度 $P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 也随传输距离的增加而扩散. 文[16]的研究表明，当部分相干电磁高斯-谢尔模型光束在湍流大气中经过足够长的传输距离后，轴上一般偏振度不再发生变化，其值趋向于源处的初始偏振度. 然而，他们并没有研究横向的一般偏振度.

从图 4(a)，(b)中可以看出，随着 $r$ 的增加，一般偏振度 $P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 先减小，后增加. 但是，图 4(c)，(d)的变化趋势与图 4(a)，(b)并不相同. 这也验证了文[16]中湍流大气场中的偏振度与源处初始偏振度密切相关的结论.

交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的变化规律和一般的偏振度 $P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 有着很明显的差别. 从图 5 中

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

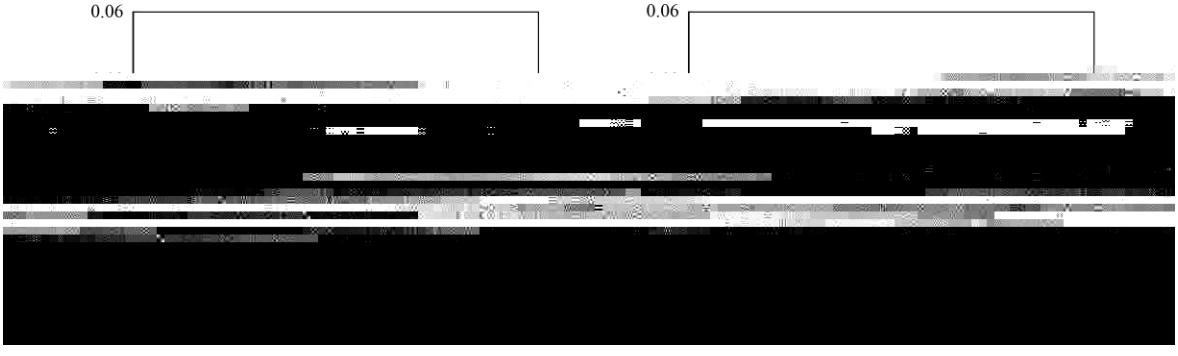



(a) $I_x = I_y$ (b) $I_x = (5/3)I_y$

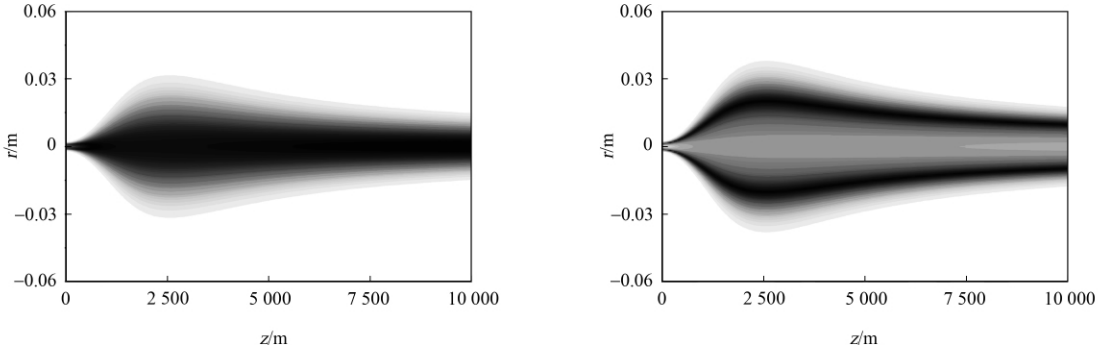
(c) $I_x = 3I_y$ (d) $I_x = 19I_y$

**图4 不同初始偏振度下的一般偏振度分布**

Fig. 4 Spatial distribution of spectral degree of polarization for four different values of the initial degree of polarization




(a) $I_x = I_y$ (b) $I_x = (5/3)I_y$




(c) $I_x = 3I_y$ (d) $I_x = 19I_y$

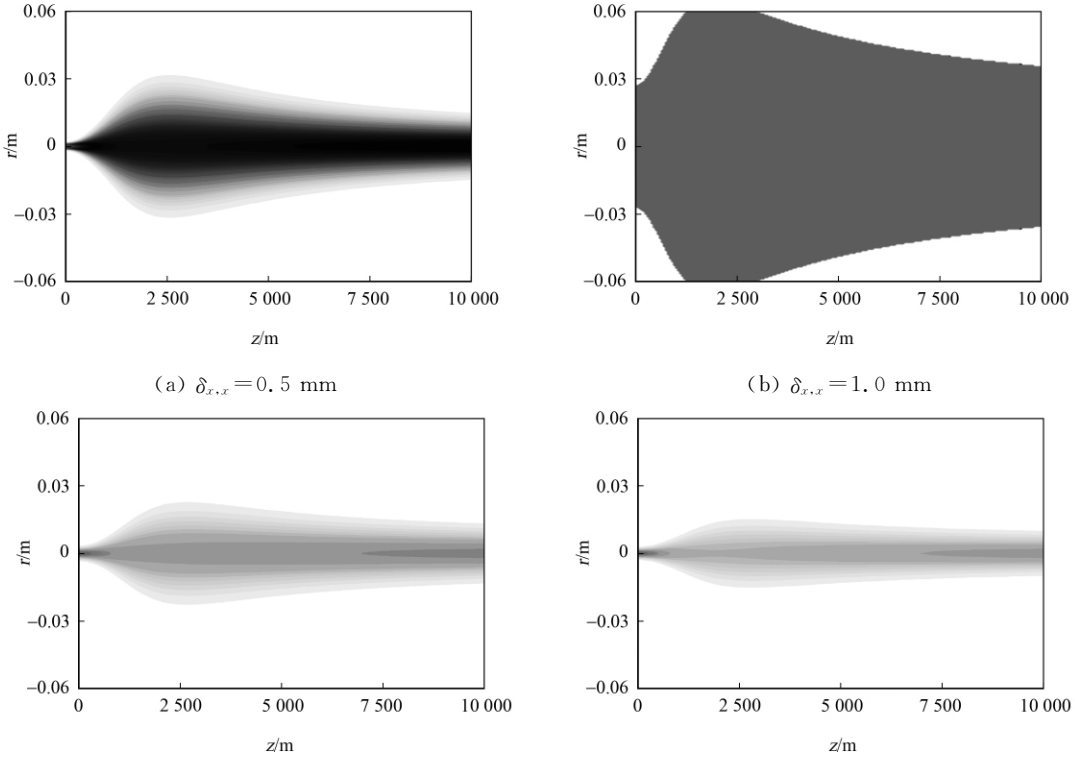
**图5 不同初始偏振度下的交叉偏振度分布**

Fig. 5 Spatial distribution of spectral degree of cross-polarization for different values of the initial degree of polarization

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

可以看出，交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 不再随着传输距离的增加而扩散. 交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的分布呈现先扩散后压缩的趋势. 这表明部分相干电磁高斯-谢尔模型光束的交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的分布趋势，完全不同于其他诸如光强或一般偏振度在湍流大气中的分布.

2.2.2　**相关长度**　不同相关长度，交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 在湍流大气中的分布情况，如图 6 所示. 图 6 中：$I_x=3I_y$，其余参数与图 5 一致. 从图 6 可以看出，相关长度对交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的影响很明显. 随着 $\delta_{x,x}$ 的增加，交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 的值整体也随之增加. 特别在 $\delta_{x,x}=\delta_{y,y}$ 的情况时，交叉偏振度 $P(0,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)$ 和一般偏振度一样，在传输场中的值不再发生变化，其值就等于源处的一般偏振度. 研究表明，当相关长度取值相同时，一般偏振度或者交叉偏振度在传输场中都保持不变，这是保持偏振度不变的恒定条件.



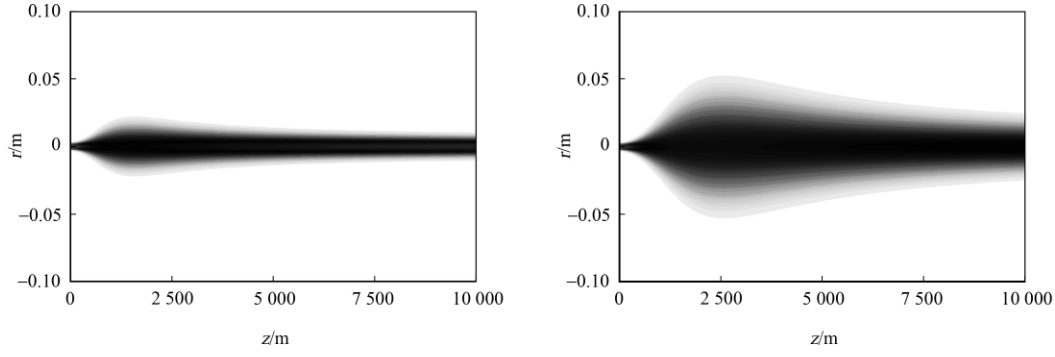

(a) $\delta_{x,x}=0.5$ mm　　(b) $\delta_{x,x}=1.0$ mm

(c) $\delta_{x,x}=1.5$ mm　　(d) $\delta_{x,x}=2.0$ mm

**图 6　不同相关长度下的交叉偏振度分布**

Fig. 6　Spatial distribution of spectral degree of cross-polarization for different values of the correlation lengths

2.2.3　**大气折射率结构常数**　不同大气折射率结构常数 $C_n^2$，交叉偏振度在传输场的分布图，如图 7 所示. 其中：$I_x=3I_y$，其余参数与图 5 一致. 从图 7 中可以看出，大气折射率结构常数 $C_n^2$ 控制部分相干电磁高斯-谢尔模型光束交叉偏振度分布的扩散.




(a) $C_n^2=5\times10^{-13}$ m$^{-2/3}$　　(b) $C_n^2=1\times10^{-13}$ m$^{-2/3}$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net