

文章编号:1001-5132(2007)02-0147-04

# 地质建模中的 B 样条曲面拟合

陈效奕<sup>1</sup>, 张 彝<sup>2</sup>

(1. 宁波大学 信息科学与工程学院, 浙江 宁波 315211; 2. 宁波大学 图书馆, 浙江 宁波 315211)

摘要: Pigel 和 Tiller 提出了简明、灵活的 B 样条曲面拟合方法. 本文在 Pigel 和 Tiller 的方法的基础上, 提出了适用于地质建模的基于重采样的 B 样条曲面拟合方法. 该方法首先用重心坐标对原始的数据点进行重采样, 然后对重采样得到的数据点进行拟合. 拟合的误差可以通过修改控制顶点的个数来控制. 结果表明: 拟合得到的 B 样条曲面是光顺的.

关键词: B 样条曲面; 参数化; 重心坐标; 重采样; 拟合

中图分类号: TP391

文献标识码: A

B样条曲面在科学计算可视化、计算机动画和计算机辅助设计等领域得到了广泛的应用. Pigel和Tiller提出了通过依次在 $u$ 方向和 $v$ 方向进行B样条曲线拟合来实现B样条曲面拟合的方法<sup>[1]</sup>, 该方法具有简明、灵活的特点<sup>[2]</sup>. 然而, 在地质建模问题中, 用来拟合的数据点往往不均匀, 也就是 $u$ 方向或 $v$ 方向上各排数据点个数不相等, 这导致了Pigel和Tiller的方法无法直接应用. 为此, 本文提出了一种适用于地质建模的基于重采样的B样条曲面拟合方法.

## 1 数据点的重采样

数据点的重采样就是根据已有的数据点, 通过采样算法, 得到用来拟合的数据点.

### 1.1 找到数据点的边界线

记空间数据点  $P = \{P_i = \{x_i, y_i, z_i\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ . 数据点的边界线的定义为: 在满足角度约束下, 包含数据点最多的折线. 其中, 角度约束指任

意两条相邻折线段之间的有向转角(外角)不能小于给定角度阈值. 找  $P$  的边界线步骤如下:

(1)通过 PCA 分析, 求得点集  $P$  的主方向, 从而确定  $P$  的拟合平面, 得到  $P$  的投影点集, 记为  $P_{\text{project}}$ . (2)查找  $P_{\text{project}}$  的 4 个角点, 确定 4 个跟踪方向. (3)在各个方向上分别生成从起点到终点的满足角度约束的边界线段, 并最终连成闭合折线即为  $P_{\text{project}}$  的边界线. (4)由  $P_{\text{project}}$  的边界线根据(1)中投影过程中的对应关系得到  $P$  的边界线. 图 1 表示了原始的数据点, 图 2 表示了对应的边界线.



图 1 原始的数据点

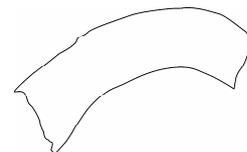


图 2 原始数据点的边界线

边界线确定后,可把数据点分为3类:角点、除角点外的边界点以及内点.

1.2 数据点的三角化

基于边界约束的空间数据点三角化算法是计算几何中一个比较热门的问题.根据地质建模中的实际情况,对问题进行简化.首先将三维空间中的数据点通过最小二乘投影方法投影到二维平面上.接着,对平面的离散点进行Delaunay三角化,产生比较合适的三角网格.然后,根据所得到的数据点的边界,将上述基于边界约束的平面三角化结果映射回三维空间中,得到三维空间中点与点之间的拓扑关系.

1.3 调和映射的参数化

参数化实际上是建立在三维网格曲面到参数域(平面或球面)之间的一一映射,本文采用的是基于调和映射的参数化方法<sup>[3]</sup>.该方法的优点是计算简单,速度快,满足保形的要求,适合用于曲面的拟合.在这个方法中,主要用到了图论的相关理论.可以利用累加弦长法计算边界线上的点(即角点、不是角点的边界点)的参数,然后,再根据边界线上点的参数和上述拓扑关系,通过迭代计算内点的参数.

1.4 重采样用来拟合的数据点

将参数域均匀划分,如分为 $N_u \times N_v$ 份,其中 $N_u$ 为 $u$ 方向的等分数, $N_v$ 为 $v$ 方向的等分数,如图3所示,对于参数网格上的某一个给定的参数为 $(u, v)$ 的点 $P'$ ,总存在3个数据点 $A, B, C$ ,使得它们的参数 $(u_A, v_A), (u_B, v_B), (u_C, v_C)$ 对应的参数域中的点 $A', B', C'$ 构成的三角形恰好包含 $P'$ .

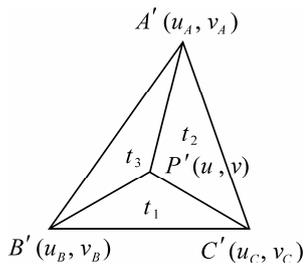


图3 参数域

这样,可以根据重心坐标的定义计算出 $(u, v)$ 对应的参数域中的点 $P'$ 的重心坐标 $(t_1, t_2, t_3)$ .然后根据这个重心坐标计算 $(u, v)$ 所对应的空间上的点 $P$ 的坐标,如图4所示.

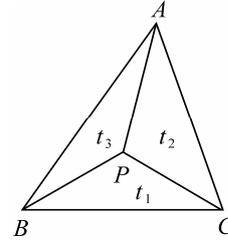


图4 数据点

记 $A, B, C, P$ 的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x, y, z)$ , 则

$$x = \frac{t_1}{(t_1 + t_2 + t_3)} x_1 + \frac{t_2}{(t_1 + t_2 + t_3)} x_2 + \frac{t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)} x_3,$$

$$y = \frac{t_1}{(t_1 + t_2 + t_3)} y_1 + \frac{t_2}{(t_1 + t_2 + t_3)} y_2 + \frac{t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)} y_3,$$

$$z = \frac{t_1}{(t_1 + t_2 + t_3)} z_1 + \frac{t_2}{(t_1 + t_2 + t_3)} z_2 + \frac{t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)} z_3.$$

经过 $N_u \times N_v$ 次上述计算,重采样得到 $N_u \times N_v$ 个用来拟合的数据点.对于图1的数据点,取 $N_u = 30, N_v = 20$ ,重采样得到的数据点如图5所示.



图5 重采样得到的数据点

2 拟合重采样数据,得到B样条曲面

用Pigel和Tiller的方法来实现B样条曲面的拟合<sup>[1]</sup>.方法的实质是通过依次进行 $u$ 方向和 $v$ 方向的曲线拟合来实现曲面拟合.

2.1  $k$ 阶B样条基函数和 $k$ 阶B样条曲线的定义

定义1 给定参数 $t$ 轴的一个分割 $T = \{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ ,  $t_j < t_{j+1}, j = 0, \pm 1, \dots$ ,用下列递推方式所确定的函

数  $N_{j,k}(t)$  称为相应于分割  $T$  的  $k$  阶 B 样条基函数:

$$N_{j,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_j, t_{j+1}), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$N_{j,k}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} N_{j,k-1}(t) + \frac{t_{j+k}-t}{t_{j+k}-t_{j+1}} N_{j+1,k-1}(t), \quad k \geq 2. \quad (1)$$

这里规定, 凡出现  $0/0$  的项均为 0. (1) 式为 de Boor-Cox 公式,  $T$  为节点向量<sup>[4]</sup>.

定义 2 假设  $\{P_j\}_{j=1}^n \in R^3$ ,  $N_{j,k}(t)$  相应于参数  $t$  轴上不均匀分割  $T = \{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ ,  $t_j, t_{j+1}, j=0, \pm 1, \dots$  的  $k$  阶 B 样条基函数, 则称

$$P(t) = \sum_{j=1}^n N_{j,k}(t) P_j, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad n, k,$$

为相应于节点向量  $T$  的  $k$  阶非均匀 B 样条曲线, 称  $P_j$  为控制顶点<sup>[4]</sup>.

### 2.2 B 样条曲线的拟合

B 样条曲线的拟合可以描述为: 给定数据点  $q_1, q_2, \dots, q_m (m > n)$ , 满足条件: (1)  $q_1 = P(0), q_m = P(1)$ ; (2) 其余数据点  $q_i (i = 2, 3, \dots, m-1)$  在最小二乘意义上被逼近, 即目标函数  $f = \sum_{i=2}^{m-1} [q_i - P(\tilde{t}_i)]^2$  是关于  $n-2$  个控制顶点  $P_j (j = 2, 3, \dots, n-1)$  的一个最小值. 这里  $\tilde{t}_i (i = 1, 2, \dots, m)$  是数据点的参数值, 由规范累加弦长法确定. 节点向量为  $[t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}]$ , 根据端点插值与曲线定义域的要求, 采用两端点为  $k$  重节点. 于是  $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0, t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k} = 1$ , 其余节点的确定则由 de Boor 提出的方法确定<sup>[1]</sup>. 设  $c$  为一正实数,  $i = \text{int}(c)$  表示  $i < c$  的最大整数. 令  $c = m/(n-k+1)$ , 则定义域内节点为:  $i = \text{int}(jc), \alpha = jc - i, t_{k+j} = (1-\alpha)\tilde{t}_{i-1} + \alpha\tilde{t}_i (j = 1, 2, \dots, n-k)$ . 经过整理, 可以得到  $f = \sum_{i=2}^{m-1} [r_i - \sum_{j=2}^{n-1} N_{j,k}(\tilde{t}_i) P_j]^2$ . 应用标准的线性最小二乘拟合技术, 根据  $\partial f / \partial P_i = 0$  得:

$$\sum_{j=2}^{n-1} \left( \sum_{i=2}^{m-1} N_{j,k}(\tilde{t}_i) N_{j,k}(\tilde{t}_i) \right) P_j = \sum_{i=2}^{m-1} r_i N_{j,k}(\tilde{t}_i).$$

通过解线性标量方程  $(N^T N)P = R$ , 即可得到  $P_i (i = 2, 3, \dots, n-1)$ , 其中

$$N = \begin{bmatrix} N_{2,k}(\tilde{t}_2) & \dots & N_{n-1,k}(\tilde{t}_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{2,k}(\tilde{t}_{m-1}) & \dots & N_{n-1,k}(\tilde{t}_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} r_2 N_{2,k}(\tilde{t}_2) + \dots + r_{m-1} N_{2,k}(\tilde{t}_{m-1}) \\ r_2 N_{3,k}(\tilde{t}_2) + \dots + r_{m-1} N_{3,k}(\tilde{t}_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_2 N_{n-1,k}(\tilde{t}_2) + \dots + r_{m-1} N_{n-1,k}(\tilde{t}_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$r_i = q_i - q_1 N_{1,k}(\tilde{t}_i) - q_m N_{n,k}(\tilde{t}_i), \quad (i = 2, 3, \dots, m-1).$$

### 2.3 B 样条曲面的定义与 B 样条曲面的拟合

定义 3 设有节点向量  $U = \{u_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, V = \{v_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ , 满足  $u_i, u_{i+1}, v_j, v_{j+1}$ . 相应的  $u$  向  $k$  阶 B 样条基函数为  $N_{i,k}(u), v$  向  $h$  阶 B 样条基函数为  $N_{j,h}(v)$ .

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) =$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) P_{ij},$$

$$u_k, u, u_{m+1}, v_h, v, v_{n+1}, m, k, n, h,$$

称为矩形  $[u_k, u_{m+1}; v_h, v_{n+1}]$  上相对于节点向量  $u, v$  的  $k \times h$  阶 B 样条曲面,  $P_{ij}$  称为控制顶点<sup>[4]</sup>.

根据 Pigel 和 Tiller 的方法, 曲面拟合可以分 2 步完成: 首先对数据点进行  $u$  方向的 B 样条曲线拟合, 然后对所得的数据点进行  $v$  方向的 B 样条曲线拟合. 不妨假设数据点的个数为  $r \times s$  个, 曲面在  $u$  方向的阶为  $k$ , 在  $v$  方向的阶为  $h$ . 曲面在  $u$  方向的控制顶点个数为  $m$ , 在  $v$  方向的控制顶点个数为  $n$ . 首先, 在  $u$  方向对每排的  $r$  个点分别进行 B 样条曲线拟合, 得到  $m \times s$  的点云; 然后, 在  $v$  方向对每排的  $s$  个点进行 B 样条曲线拟合, 最后得到  $m \times n$  个控制顶点.

## 3 实验结果与误差分析

### 3.1 实验结果

利用 Visual C++ 6.0 和 Open GL 实现基于重采样的 B 样条曲面拟合方法, 并将此方法用于地质建模问题中. 对于图 1 中的数据点, 取  $u$  方向的控

制顶点个数为 10,  $v$  方向的控制顶点个数为 8, 拟合得到的 B 样条曲面如图 6 所示. 实验结果表明, 拟合得到的曲面比较光滑.

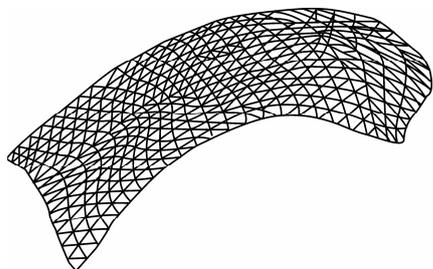


图 6 B 样条曲面

### 3.2 误差分析

曲面拟合的误差可以通过修改控制顶点的个数来控制<sup>[1]</sup>. 控制顶点越多, 拟合的误差越小, 但是, 过多的控制顶点会导致曲面编辑等方面的困难. 记绝对误差为  $e_i = |Q_i - P(u, v)|$ , 相对误差为  $e_{ri} =$

$e_i / |Q_i|$ , 其中  $(u, v)$  为点  $Q_i$  通过 Floater 提出的参数化方法得到的参数<sup>[3]</sup>,  $|Q_i|$  为点  $Q_i$  到坐标原点的距离. 对于图 1 中的 236 个数据点, 经过计算, 可以得到最大的绝对误差为 1.349 766 m, 最大的相对误差为 0.029 113.

### 参考文献:

- [1] Piegl Les, Tiller Wayne. The NURBS book[M]. 2nd edition. New York: Springer Verlag Press, 1997.
- [2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] Floater M S. Parameterization and smooth approximation of surface triangulations[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(3):231-250.
- [4] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

## B-spline Surface Fitting in Geological Modeling

CHEN Xiao-yi<sup>1</sup>, ZHANG Yi<sup>2</sup>

(1. Faculty of Information Science and Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2. Library of Ningbo University, Ningbo 315211, China)

**Abstract:** A concise and intuitive B-spline surface fitting method has been proposed by Piegl and Tiller. A new B-spline surface fitting method is proposed based on geological method. At first the original data points are resampled using barycentric coordinates, followed by fitting the resampled data points. The error of fitting can be manipulated by modifying the number of control points. The experimental results demonstrate that the resulting B-spline surface is adequately smooth.

**Key words:** b-spline surface; parameterization; barycentric coordinates; resample; fit

**CLC number:** TP391

**Document code:** A

(责任编辑 史小丽)