

文章编号:1001-5132(2009)04-0454-05

# 一种基于新型小波包阈值的图像去噪方法

胡波, 陈 愚\*, 徐建瑜

(宁波大学 信息科学与工程学院, 浙江 宁波 315211)

**摘要:** 提出了一种基于小波包理论去除图像噪声的方法, 用小波包把图像分解为高频分量和低频分量, 根据高频分量估计噪声的标准差, 并利用该标准差以及 Birge-Massart 惩罚函数计算阈值. 鉴于传统软硬阈值的缺陷, 采用一种新型阈值量化方法, 用三次多项式在硬阈值的基础上插值, 使新的阈值函数保持了连续性和可导性. 通过这种方法既消除了图像的振铃现象, 又保留了细节成分. 实验表明: 与传统方法相比, 新方法使图像视觉效果和峰值信噪比均获得提高.

**关键词:** 图像去噪; 小波包; 惩罚函数; 新型阈值; 三次多项式

中图分类号: TP391

文献标识码: A

一幅图像在获取或者传输过程中会受到噪声的污染, 图像的噪声会对图像后期处理产生很大影响, 因此图像去噪是图像处理过程中一个重要环节. 传统的去噪方法如中值滤波<sup>[1]</sup>、维纳线性滤波和 LP 正则化等在滤除噪声的同时也在不同程度上破坏了图像细节. 小波分析是近十几年发展起来的一种新的数学理论和方法, 由于小波变换使信号在时域和频域都具有良好的局部化特征, 可以对信号进行多分辨率分析, 使其在图像去噪中得到广泛地应用. 文献[2-3]分别在小波域结合中值滤波和高斯混合模型对信号去噪, 取得了良好的效果. 但是小波存在不能对高频分量进一步细分的缺陷, 小波包则提供了一种更加精细的分析方法, 在处理信号时将频带进行多层次划分, 对多分辨率分析没有细分的高频部分进一步分解, 并能根据被分析信号的特征, 自适应地选择相应频带,

使之与信号频谱相匹配, 从而提高时频分辨率.

笔者采用小波包理论为基础, 对去噪中起关键作用的阈值<sup>[4-5]</sup>进行改进, 用三次样条函数进行插值, 使量化后的小波包系数保持了连续性和可导性, 从而弥补了传统阈值去噪过程中产生的振铃现象和细节丢失等缺陷, 并通过实验验证了新方法的有效性.

## 1 基于小波包的图像去噪

### 1.1 小波包图像去噪原理

在小波包框架中, 其信号去噪的思想与在小波框架<sup>[6]</sup>中的基本一致, 对 1 个信号进行小波包分解可以采用很多种小波包基, 根据分析信号的要求从中选择最好的 1 种小波包基——最优基, 最优基的选择是根据熵标准而定. 利用小波包进行图

收稿日期: 2009-02-24.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://3xb.nbu.edu.cn>

基金项目: 浙江省教育厅科研项目(20070869).

第一作者: 胡波(1982-), 男, 浙江舟山人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 机器视觉及视频压缩. E-mail: hubo9511@163.com

\*通讯作者: 陈愚(1962-), 男, 重庆人, 博士/副教授, 主要研究方向: 图像处理及智能控制. E-mail: chenken@nbu.edu.cn

像去噪一般按照如下步骤进行:

(1) 图像的小波包分解. 选择 1 个小波并确定小波包分解的层次  $N$ , 然后对图像进行  $N$  层小波包分解.

(2) 确定最优小波包基. 即对于 1 个给定的熵标准计算最优树.

(3) 小波包分解系数的阈值量化. 对于每个小波包分解系数, 选择 1 个适当的阈值并对其系数进行量化.

(4) 小波包重构. 根据经过量化处理后的低层和高层小波包系数进行小波包重构.

在上述 4 个步骤之中, 最关键的是如何选取阈值和如何进行阈值量化, 因为量化和选取目的是为滤掉噪声的小波包系数, 保留原图像小波包系数, 因此它直接关系到图像去噪的质量.

### 1.2 新型阈值量化方法

图像经过小波包分解后, 低频部分集中了大部分能量, 并且小波包系数较大, 而高频和噪声部分的能量相对分散, 系数较小. 去噪过程实质上就是在小波包重构前以门限值(阈值)为基准, 按一定的规则将小波包系数进行取舍(即量化过程). 通常取舍原则是保留重要的规则小波包系数, 而去除非重要的或受噪声干扰的小波包系数. 传统的阈值量化通常使用的有 Donoho 提出的硬阈值(hard threshold)和软阈值(soft threshold)方法<sup>[7-8]</sup>. 表达式如下:

硬阈值:

$$\hat{d} = \begin{cases} d, & |d| \geq T, \\ 0, & |d| < T. \end{cases} \quad (1)$$

软阈值:

$$\hat{d} = \begin{cases} \text{sgn}(d)(|d| - T), & |d| \geq T, \\ 0, & |d| < T. \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $d$  表示原始小波包分解系数;  $T$  为选取的阈值;  $\hat{d}$  为经过量化后的小波包系数. 量化后的小波包系数和原始小波包系数对应函数关系如图 1 所示, 其中的横纵坐标分别表示原图像的小波包

系数和阈值量化后的小波包系数. 观察图 1 中硬阈值函数曲线, 发现在  $-T$  和  $T$  处发生跳变, 使得量化后的系数并不是连续的, 重构的图像往往产生振铃、伪吉布斯效应等视觉失真; 而软阈值函数曲线在整个小波包系数域内是连续的, 但其导数是不连续的, 而在实际应用中经常要对其导数进行运算处理, 所以具有一定的局限性, 而且软阈值函数对大于阈值的小波包系数采取恒定值减少, 这将会使图像非噪声部分的小波包系数丢失, 且处理后的图像往往细节部分比较模糊.

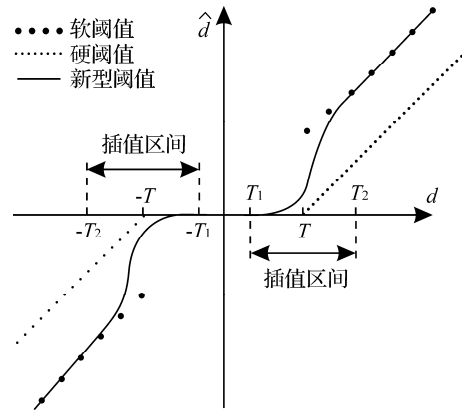


图 1 软硬阈值和新型阈值示意图

为弥补软硬阈值带来的不足, 文献[9]采用三次样条函数在软阈值函数曲线上进行插值, 使插值后函数曲线不仅连续而且可导, 但该方法并没有考虑软阈值量化存在恒定偏差的问题. 而笔者在硬阈值的基础上进行插值, 插值过程如下:

定义  $F(x) \in C^2[a, b]$ , 且每个小区间  $[x_j, x_{j+1}]$  上是三次多项式, 其中  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  是给定节点, 则称  $F(x)$  是节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的三次样条函数, 若在给定节点  $x_j$  上给定函数值  $y_j = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , 并成立  $F(x_j) = y_j, j = 0, 1, \dots, n$ , 则称  $F(x)$  为三次样条插值函数.

这里论述的就是从给定硬阈值函数  $\hat{d} = f(d)$  和节点  $a = T_1, b = T_2$  条件下求取插值函数  $F(x)$  过程.

由连续性可知在节点  $T_1, T_2$  处须满足:

$$\begin{aligned} F(T_1) &= F(T_1 + 0) = F(T_1 - 0), \\ F(T_2) &= F(T_2 + 0) = F(T_2 - 0). \end{aligned} \quad (3)$$

由可导性可知:

$$\begin{aligned} F'(T_1) &= F'(T_1 + 0) = F'(T_1 - 0), \\ F'(T_2) &= F'(T_2 + 0) = F'(T_2 - 0). \end{aligned} \quad (4)$$

由给定硬阈值函数  $\hat{d} = f(d)$  可知:

$$F(T_1) = f(T_1 - 0), F(T_2) = f(T_2 + 0), \quad (5)$$

$$F'(T_1) = f'(T_1 - 0), F'(T_2) = f'(T_2 + 0). \quad (6)$$

对于三次样条插值函数而言, 其一般式为:

$$F(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (7)$$

求解(5)式和(6)式可以得到插值函数为:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{T_1 + T_2}{(T_1 - T_2)^3} x^3 - \frac{2T_1^2 + 2T_1T_2 + 2T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} x^2 + \\ &\quad \frac{T_1^3 + T_1^2T_2 + 4T_1T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} x - \frac{2T_1^2T_2^2}{(T_1 - T_2)^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

通过插值处理后小波包系数  $\hat{d}$  与原小波包系数  $d$  的关系式如下:

$$\hat{d} = \begin{cases} d, & |d| > T, \\ \text{sign}(d)F(|d|), & T_1 \leq |d| \leq T_2, \\ 0, & |d| < T. \end{cases} \quad (9)$$

观察图1中新型阈值函数曲线, 在区间  $0 < T_1 < |T| < T_2$  上使用样条函数插值保证了在节点  $T_1, T_2$  处的连续可导性, 从而使小波包系数在较小的情况下(接近  $T_1$  的时候)平滑地降落, 克服了硬阈值阶跃式地下降; 小波包系数在较大的情况下, 通过  $T_2$  大小调整使系数可以很好地保留部分细节, 而不像软阈值那样对大于  $T$  的原小波包系数减去恒定值从而使图像的细节丢失. 而且通过  $T_1, T_2$  的调整使量化过程更为灵活, 既可以满足硬阈值量化方式( $T_1, T_2$  比较接近), 也可以满足软阈值量化方式( $T_1$  接近  $T, T_2$  取较大).

### 1.3 阈值的选取

阈值处理的关键之一是对阈值的选取. 如果阈值太小, 去噪后仍有噪声, 阈值太大, 图像的重要细节会丢失, 引起偏差. 直观上说, 得到噪声的小波包系数越大, 阈值选取也应该越大. 并且阈值的选取是针对1组小波包系数, 并根据这组小波包系数的统计特性, 计算出1个阈值.

目前使用的阈值可以分成全局阈值和局部自

适应阈值<sup>[10]</sup>两类. 其中, 全局阈值对各层所有的小波包系数或同一层内各结点的小波包系数都是统一的, 而局部自适应阈值是根据当前系数周围的情况来确定的.

最著名的阈值去噪方法包括 DJ 阈值、Sure 阈值<sup>[11]</sup>、Penalized 阈值和 Bayesian 阈值方法<sup>[12]</sup>. 其中, DJ 阈值依赖于采样点数目, 其数量通常过大且由于采用单一阈值, 不可避免地会造成各个子带去噪的不平衡. SURE 阈值是一种基于 Stein 无偏似然估计原理的自适应阈值, 其给定1个阈值  $t$ , 得到它的似然估计, 再将估计最小化, 就可得到所选阈值, 可以说该方法是一种软阈值估计器. Bayesian 阈值是通过 Bayesian 似然估计最小化推导出来的, 取得了较好的实验效果.

笔者采用 Penalized 阈值的方法进行实验, 取得了良好的效果. Penalized 阈值是按一种惩罚标准最小化时计算得到, 该惩罚标准  $\text{crit}(t)$  定义如下:

$$\begin{aligned} \text{crit}(t) &= -\text{sum}(d(k)^2, k \leq t) + 2\sigma^2 \times t \times \\ &\quad (ALPHA + \log(n/t)), \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式就是 Birge-Massart 惩罚函数.  $d(k)$  表示小波包系数, 该系数按照绝对值递减的顺序存储;  $n$  代表系数的个数;  $\sigma$  代表降噪模型中估计的高斯白噪声的标准差, 该标准差通过取高频系数绝对值的中值, 再将系数适当扩大得到, 如:

$$\sigma = \text{median}(|W_{h,v,d}|) / 0.6745, \quad (11)$$

其中,  $W_{h,v,d}$  为水平垂直和对角方向上的高频系数,  $\text{median}$  为中值滤波函数. ALPHA 是(10)式中的调整参数, 规定是大于1的实数, 其数值越大表示降噪图像的小波包系数越稀疏, ALPHA 典型值是2. 显然(10)式是关于  $t$  的函数, 设  $t$  为  $t_{\min}$  时  $\text{crit}(t)$  取最小值, 则阈值  $T$  可表示为:  $T = |d(t_{\min})|$ .

## 2 实验结果及分析

对提出的基于小波包理论的图像去噪方法采用 MATLAB 6.5 进行仿真实验. 选用 coif4 小波进

行 3 层小波包分解, 用 Shannon 熵标准计算最佳小波包树<sup>[13]</sup>, 根据不同的噪声方差选取相应的  $T_1, T_2$  达到最佳效果, 并对原始的 belmont 图像添加零均值方差为  $\delta^2$  高斯白噪声进行统计. 对加噪图像采用中值、小波包软阈值、小波包硬阈值、新型小波包阈值(本文方法) 4 种去噪方法进行对比, 对它们的峰值信噪比(*PSNR*)进行统计, 并结合实际去噪效果图像进行分析. *PSNR* 定义如下:

$$PSNR = 10 \lg \frac{255^2}{\frac{1}{M \times N} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i, j) - \hat{f}(i, j))^2}, \quad (12)$$

其中,  $f(i, j), \hat{f}(i, j)$  分别表示原图像和去噪后图像;  $M, N$  表示图像的长度和宽度.

4 种去噪方法的 *PSNR* 见表 1. 分析表 1 中统计的数据发现: 当方差比较小的时候, 中值滤波效果比硬阈值、软阈值要好; 而当噪声方差比较大的时候, 采用小波包阈值的去噪方法比中值滤波有明显的优越性; 而采用新型小波包阈值方法在噪声较大或较小时均保持了较高的峰值信噪比.

表 1 去噪图像的 *PSNR*

$\delta^2$	加噪 /dB	中值 /dB	小波包软 阈值/dB	小波包硬 阈值/dB	本文方 法/dB
0.008	24.000 1	29.059 4	27.297 5	28.554 9	30.320 9
0.012	22.301 6	27.905 0	26.812 4	27.829 3	29.475 8
0.016	21.127 0	27.038 0	26.621 9	27.466 4	28.993 0
0.020	20.263 2	26.326 0	26.445 4	27.182 1	28.519 9
0.040	17.525 1	23.728 3	25.881 6	26.254 9	27.165 1

分别取噪声方差较大  $\delta^2 = 0.04$  和较小的  $\delta^2 = 0.008$  时, 对比 2 种情况下各种方法的去噪效果如图 2 和图 3 所示, 发现中值滤波对噪声去除效果不明显, 尤其是噪声方差比较大时, 还保留了大量的噪声信号. 采用了小波包软阈值的方法使去噪后的图 2 的图像非常模糊, 细节部分几乎很难辨认, 图 3 中头发、嘴巴以及眼睛部分都不够清晰. 而采用小波包硬阈值的方法, 虽然保留了部分高频细节, 但从图 2 中的树枝和房屋以及图 3 中脸部轮廓可以明显地看到振铃现象. 而采用新型小波包阈

值处理后的图像不仅保留了高频细节, 而且图像比较平滑, 具有很好的视觉效果.

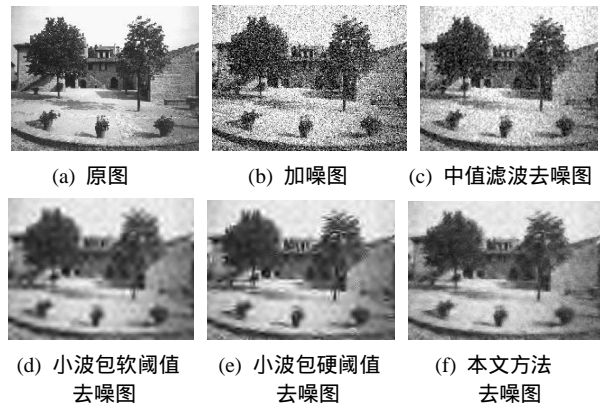


图 2 belmont 图去噪结果(噪声方差 0.04)



图 3 boy 图去噪结果(噪声方差 0.008)

### 3 结语

为弥补传统小波包去噪方法中存在的不足之处, 综合考虑了图像的去噪效果以及对图像高频细节最好的保留效果, 采用一种新型的阈值量化和选取方式, 通过三次多项式在硬阈值函数基础上的插值, 使量化后噪声部分的小波包系数得到有效地滤除, 而细节部分的小波包系数得到很好地保留. 阈值的选取是通过中值滤波器来估计噪声的标准差, 并按照 Birge-Massart 惩罚标准最小化来计算, 使选取的阈值更符合噪声实际分布情

况. 通过上述两方面的改进, 使去噪后的图像能够获得较好的视觉效果和较高的信噪比. 下步工作可以考虑采用自适应方法来计算小波包分解中每层高频部分的阈值, 使对噪声估计更加精确.

#### 参考文献:

- [1] Ding zhuxing, Zhu Rihong, Li Jianxing. An adaptive wavelet transform via lifting for image compression[J]. Acta Photonica Sinica, 2004, 33 (2):225-228.
- [2] 彭云辉, 刘云峰, 杨小冈, 等. 小波域中值滤波在激光陀螺信号处理中的应用[J]. 红外与激光工程, 2007, 36 (1):143-146.
- [3] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, et al. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Trans Image Processing, 2003, 11(12):1 338-1 351.
- [4] Azzalini A, Farge M, Schneider K. Nonlinear wavelet thresholding: A recursive method to determine the optimal denoising threshold[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2005, 18(2):177-185.
- [5] 王娜, 郑德忠. 结点阈值小波包变换语音增强新算法[J]. 仪器仪表学报, 2007, 28(5):952-955.
- [6] 李旭超, 朱善安. 小波域图像降噪概述[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(9):1 201-1 209.
- [7] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425-455.
- [8] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3):613-627.
- [9] 朱锡芳. 一种基于连续小波阈值的图像去噪新算法[J]. 微电子学与计算机, 2007, 24(11):181-183.
- [10] 赵志刚, 万娇娜, 管聪慧. 基于小波包与自适应阈值的图像去噪[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(6):977-980.
- [11] 刘守山, 杨辰龙, 李凌, 等. 基于自适应小波阈值的超声信号消噪[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2007, 41(9): 1 557-1 560.
- [12] Chang S G, Yu Bin, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9):1 532-1 546.
- [13] 杜立志, 殷琨, 张晓培, 等. 基于最优小波包基的降噪方法及其应用[J]. 工程地球物理学报, 2008, 5(2):25-29.

## A Method for Image Denoising Based on New Wavelet Packet Threshold

HU Bo, CHEN Ken\*, XU Jian-yu

(Faculty of Information Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

**Abstract:** An image denosing method based on wavelet packet theory is proposed in this paper. Wavelet packet is first used to decompose the image into the low and high frequency components. The standard deviation of the noise is estimated through high frequency components. Then, the estimated standard deviation is applied together with Birge-Massart penalized function to calculate the threshold. To remedy drawbacks identified in the traditional soft and hard threshold for image denoising, this paper presents a new threshold quantization method, which applies cubic polynomial interpolation to a hard threshold to achieve the continuity and differentiability for the new threshold function. The application of this method not only removes the ring effect from the image, but also keeps the image details. The experiment results show that, in comparison with the conventional denoising approaches, both the visual effect and the PSNR have been further improved using the proposed method.

**Key words:** image denoising; wavelet packet; penalized function; new threshold; cubic polynomial

**CLC number:** TP391

**Document code:** A

(责任编辑 章践立)