序言

随着近代科学的飞速发展，有关流形，张量及外微分形式，Stokes 定理等较现代的知识不仅业已成为数学本身的最基本，最重要且最活跃的研究领域，而且在数学的其他分支中，在力学及物理学（特别是爱因斯坦的广义相对论及规范场论）中，已获得越来越广泛，深刻而富有成效的应用。今天，流形理论象分析和代数学一样，已不只是某些大学数学系的必修课，而且业已成为其他有关学科的入门学科。

本课程属于大范围分析与几何范畴。主要论述与流形有关的最重要，最基本的知识，包括流形、切向量、张量与外微分形式等概念和一些主要定理，以及流形上的积分和 Stokes 定理。

预修课程：数学分析、高等代数、常微分方程、微分几何、点集拓扑学。

基本目的：掌握微分流形的基础知识，学习从局部到整体的数学技巧，为黎曼几何、李群、低维拓扑和非线性分析等课程的进一步学习奠定良好的基础。

主要参考书:

1. 白正国　沈一兵等编《黎曼几何初步》（前二章）（高教版）
2. 米尔诺(Milnor,J.W.)　《从微分观点看拓扑》
3. 陈省身，陈维桓：微分几何讲义
4. Serge Lang: Differential and Riemannian Manifolds, Springer 出版社。

辅导网站：http://teacher.zjnu.cn/csm

E-mail:tiwen2004@163.com　qyh2004@zjnu.cn

点集拓扑相关的预备知识

1. 拓扑空间

定义

设 X 是非空集合，若 X 的一个子集族 τ 它满足：

(1) $\{X,\varnothing\}\subset\tau$；

(2) τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中；

(3) τ 中两个成员的交集仍在 τ 中。

则称 τ 为 X 的一个拓扑，称 (X,τ) 为一个**拓扑空间**，称 τ 中的成员为这个拓扑空间的 τ **开集**，一般都简称为**开集**。(X,τ) 有时也记作 X。

例子

Ex.1 **（离散拓扑）**设 X 是非空集合，拓扑 $\tau = 2^X$ 。

Ex.2 **（平凡拓扑）**设 X 是非空集合，拓扑 $\tau = \{X, \varnothing\}$。

Ex.3 **（余有限拓扑）**设 X 是任意集合，

拓扑 $\tau_f = \{A^c \mid A\text{是}X\text{的有限子集}\} \cup \{\varnothing\}$。

Ex.4 **（余可数拓扑）**设 X 是任意集合，,

拓扑 $\tau_c = \{A^c \mid A\text{是}X\text{的可数子集}\} \cup \{\varnothing\}$，

Ex.5 **（欧氏拓扑）**设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合，

拓扑 $\tau_e = \{U \mid U\text{是若干个开区间的并集}\}$。

注 1 事实上，$\mathbb{R}$ 中开集的是若干个互不相交的开区间的并集。

Ex6 **谢尔宾斯空间**

$X = \{a, b\}$， $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$

注2 若 X 中有三个元素，则 X 上可给出 29 个拓扑，若 X 中有四个元素，则 X 上可给出 355 个拓扑。

2．欧氏拓扑

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$， $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$， $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$。

内积：$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ；

范数：$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ；

距离（度量）：$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ 。

集合 X 上的一个**度量** d 是指映射 $d: X \times X \to R$ 满足

(1) 正定性： $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$，

(2) 对称性：$d(x, y) = d(y, x)$， $\forall x, y \in X$ ；

(3) 三角不等式：

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X 。$$

注 3：$\forall x, y \in X$ 有 $d(x,y) \geq 0$。事实上，取 $z = x$，则由

$$0 = d(x,x) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = 2d(x,y)$$

即知。

球形邻域：设 (X,d) 是一个度量空间，$x \in X, \varepsilon > 0$，称 X 的子集 $B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ 为以 x 为圆心、ε 为半径的**球形邻域**。

拓扑：$\tau_\rho = \{U \mid U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中若干球形邻域的并$\}$。

3．同胚

如果 $f: X \to Y$ 是一一对应，并且 f 和 f^{-1} 都连续，则称 f 是一个同胚。只要存在从 X 到 Y 的一个同胚映射，就称 X 与 Y **同胚**，记作 $X \cong Y$。

4．$Hausdorff$ 空间（T_2 空间）

T_1**公理**：任意两个不同点 x 与 y，x 有邻域不含 y，y 有邻域不含 x。

T_2 **公理**：任意两个不同点有不相交的邻域。

满足 T_2 公理的空间称为 $Hausdorff$ 空间。

性质：$Hausdorff$ 空间中，一个序列不会收敛到两个以上的点。

5．紧致空间

拓扑空间称为**紧致的**，如果它的每个开覆盖有有限的子覆盖。

数学分析相关的预备知识

问题：求 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的导数？

(1) 已知 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，则 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$。

(2) 已知 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$z = f(x,y)$，$(x,y) \mapsto f(x,y) = z$。

则$dz = f_x dx + f_y dy$。

(3) 已知$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$x \mapsto f(x)$，$x=(x_1,x_2)$。$f'(x)=(f_1,f_2)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2})$。

(4) 设$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$，

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 或 $\left(y_1,\cdots,y_m\right)=\left(x_1,\cdots,x_n\right)A$

$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$。