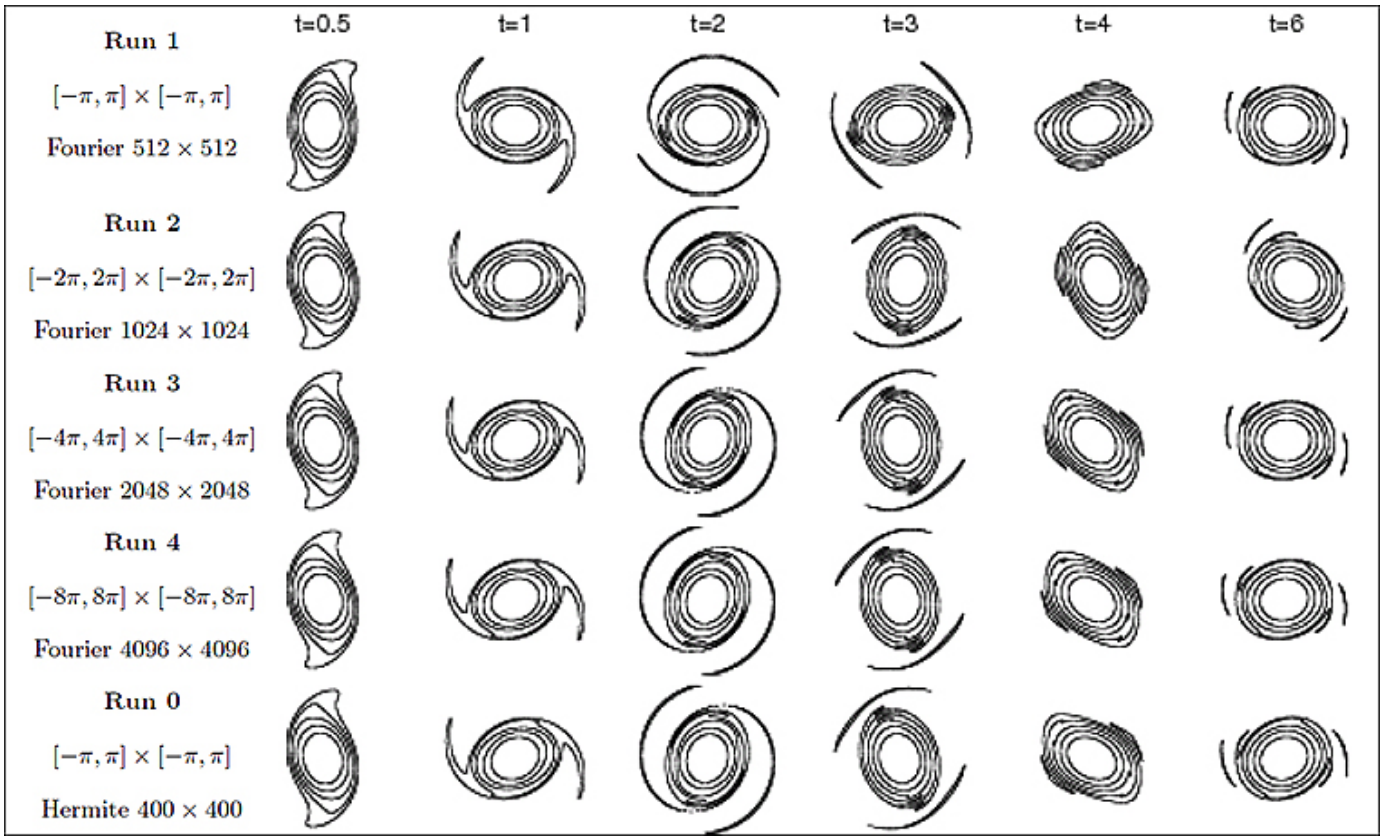
求解HERMITE标准型的新算法研究进展

发布时间：2018-12-03 | 来源：数学机械化重点实验室



任意一个整数矩阵都可以通过初等变换约化为Hermite标准型。Hermite标准型在计算数论、公钥密码学等领域有十分广泛的应用。已有的计算Hermite标准型算法大致可分为两类，一类算法通过在某剩余类环中做三角化，然后再提升到整数环中得到Hermite标准型；另一类则是通过求解初等变换矩阵，然后通过矩阵乘积来得到Hermite标准型。

在2019年的符号与代数计算国际研讨会（ISSAC）上，信息技术部潘彦斌等[1]提出了一种求解整数矩阵Hermite标准型的新算法。与之前进行初等变换或通过求解初等变换矩阵来计算Hermite标准型的方法不同，新算法通过求解带模线性方程组来计算Hermite标准型，其基本观察在于，整数矩阵前k列按行生成的格与其Hermite标准型前k列按行生成的格完全相同，因此，整数矩阵前k列的任一行均可以写成其Hermite标准型的k阶主子矩阵行的整系数线性组合，从而Hermite标准型的非对角线元素满足一个模其对角元的线性方程组，因此如果对角元已知，则可以通过求解该方程组得到相应的非对角线元素，从而可以更有效地控制中间变量的膨胀；另外，注意到对“随机”整矩阵而言，其Hermite标准型的对角线上最后一个元素，相对于其它对角线元素往往非常大，因此利用已有算法计算Hermite标准型前面的列，然后再利用新算法计算Hermite标准型的最后一列，往往更快，在合理假设下面，新算法的期望时间复杂度是同规模矩阵乘法复杂度的常数倍。

这项研究有助于在实践中加速已有的Hermite标准型求解算法，另外，对假设的研究，也为从理论上加速Hermite标准型求解算法的时间复杂性提供了可行的途径。

[1] Renzhang Liu, Yanbin Pan.Computing Hermite Normal Form Faster via Solving System of Linear Equations. In Proc. Of ISSAC 2019.