第4章 插值与逼近

4.3 三次样条插值

4．3　三次样条插值

4.3.1 样条函数

样条函数是一个重要的逼近工具，在插值、数值微分、曲线拟合等方面有着广泛的应用。

定义4. 3 对区间$(-\infty, +\infty)$的一个分割：

$$\Delta: -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty,$$

若分段函数$s(x)$满足条件：

（1）在每个区间$(-\infty, x_1]$，$[x_j, x_{j+1}]$，（$j=1, 2, \cdots, n-1$）和$[x_n, +\infty)$上，$s(x)$是一个次数不超过m的实系数代数多项式；

（2）$s(x)$在对区间$(-\infty, +\infty)$上具有直至$m-1$阶的连续微商，

则称$y=s(x)$为对应于分割Δ的m次样条函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为样条节点，以$x_1, x_2, \ldots, x_n$为节点的m次样条函数的全体记为：

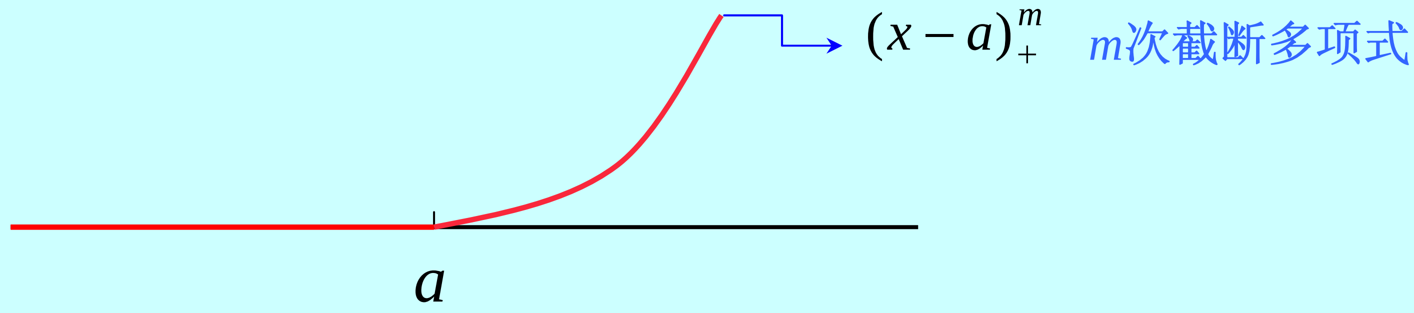
$\mathbf{S}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。

m=1时，样条函数是分段线性函数；m=2时，是分段二次函数。显然，m次样条函数比一般的m次分段插值多项式的光滑性好。

下面介绍样条函数的表示方法。引进截断多项式：

$$(x-a)_+^m = \begin{cases} (x-a)^m, & x \ge a, \\ 0, & x < a, \end{cases} \qquad (4\text{-}30)$$

易见 $(x-a)_+^m$ 是 $\mathbf{C}^{m-1}(-\infty,+\infty)$ （表示$(-\infty,+\infty)$上$m-1$次连续可微函数的集合）类的分段m次多项式。



可以证明

定理4. 4 任意$s(x)\in \mathbf{S}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$均可唯一地表示为

$$s(x)=p_m(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)_+^m,\quad -\infty<x<+\infty \qquad \textbf{(4-31)}$$

其中$p_m(x)\in \mathbf{P}_m$，$c_j(j=1, 2, \cdots, n)$为实数。

定理4. 5 为使$s(x)\in \mathbf{S}_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，必须且只须存在$p_m(x)\in \mathbf{P}_m$和$n$个实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$s(x)=p_m(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)_+^m,\qquad -\infty<x+\infty$$

由上面的定理可知，$s(x)$在两个相邻区间$[x_{j-1}, x_j]$和$[x_j, x_{j+1}]$上的表达式只相差一项，$c_j(x-x_j)_+^m$。 即

$$S(x)=\begin{cases}\left(Q_{j-1}\right)_+ & x\in\left[x_j\ x_{j+1}\right]\\ \left(Q_{j-1}\right)_+ +C_j\left(x-x_j\right)_+^m & x\in\left[x_j\ x_{j+1}\right]\end{cases}$$

函数空间$\mathbf{S}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的维数。由于

$$S(x)=P_m+\sum_{j=1}^{n} C_j\left(x-x_j\right)_+^m$$

则$\mathbf{S}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的一组基底函数应为：

$$1, x, \cdots, x^m,\ (x-x_1)_+^m, (x-x_2)_+^m, \cdots, (x-x_n)_+^m。 \qquad (4\text{-}32)$$

因此函数空间$\mathbf{S}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的维数为$m+n+1$。

现在证明样条函数的性质，设

$$s(x)=p(x) \qquad s(x)=q(x)$$

$$x_{j-1} \qquad\qquad x_j \qquad\qquad x_{j+1}$$

其中$p(x)$, $q(x)$均为m次多项式。

记 $h(x)=q(x)-p(x)\in \mathbf{C}^{m-1}[x_j, x_{j+1}]$，则应有

$$h^{(k)}(x)=p^{(k)}(x)-q^{(k)}(x)\,,\quad k=0,1,2,\cdots,m-1$$

又由样条函数在x_j的性质: $p^{(k)}(x_j)=q^{(k)}(x_j)\,,\quad k=0,1,2,\cdots,m-1$

$$h^{(k)}(x_j)=0,\qquad\qquad k=0,1,2,\cdots,m-1$$

从而必有 $h(x)=C_j\left(x-x_j\right)^m$，即 $q(x)=p\left(x\right)+C_j\left(x-x_j\right)^m$。

例1 验证分片多项式

$$S(x)=\begin{cases} 1-2x & x<-3 \\ 28+25x+9x^2+x^3 & -3\le x<-1 \\ 26+19x+3x^2-x^3 & -1\le x<0 \\ 26+19x+3x^2 & 0\le x \end{cases}$$

是三次样条函数。

解　最直接的方法是利用定义验证，该方法需要计算函数在各个节点处的i阶左右导数(i=0, 1, 2)。 此处我们利用上面的定理验证。 因为

$$(28+25x+9x^2+x^3)-(1-2x)=(x+3)^3,$$

$$(26+19x+3x^2-x^3)-(28+25x+9x^2+x^3)=-2(x+1)^3,$$

$$(26+19x+3x^2)-(26+19x+3x^2-x^3)=x^3,$$

所以由上述定理可知该函数为三次样条函数。

例，设

$$S(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x<1 \\ ax^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

是以0，1，2为节点的三次样条函数，则a=____, b=____, c=____。

解：1）由 $ax^3+bx^2+cx-1-\left(x^3+x^2\right)=\left(x-1\right)^3$，即

$$\left(a-1\right)x^3+\left(b-1\right)x^2+cx-1=x^3-3x^2+3x-1$$

比较$1, x, x^2, x^3$的系数，可得

$a-1=1\Rightarrow a=2$， $b-1=-3\Rightarrow b=-2$， $c=3$。

2）由连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)\Big|_{x=1}$$ 即，

$$a+b+c-1=1^3+1^2=2\ \Rightarrow a+b+c=3$$

由一阶导数连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)'\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)'\Big|_{x=1}$$ 即，

$$\left(3ax^2+2bx+c\right)\Big|_{x=1}=\left(3x^2+2x\right)\Big|_{x=1}$$

$$3a+2b+c=3+2\Rightarrow 3a+2b+c=5$$

由二阶导数连续性，应有

$$\left(ax^3+bx^2+cx-1\right)''\Big|_{x=1}=\left(x^3+x^2\right)''\Big|_{x=1}$$ 即，

$$\left(6ax+2bx\right)\Big|_{x=1}=\left(6x+2\right)\Big|_{x=1}\qquad 6a+2b=6+2\Rightarrow 6a+2b=8$$

从而，$a+b+c=3\quad 3a+2b+c=5\quad 6a+2b=8$

$$\Rightarrow a=2,\ b=-2,\ c=3。$$

4.3.2 三次样条插值及其收敛性

有些实际问题中提出的插值问题，要求插值曲线具有较高的光滑性和几何光顺性，样条插值适用于这类问题。 例如，在船体放样时，模线员用压铁压在样条（弹性均匀的窄木条）的一批点上，强迫样条通过这组离散的型值点。 当样条取得合适的形状后，再沿着样条画出所需的曲线。 在小挠度的情形下，该曲线可以由三次样条函数表示。 由于样条函数插值不仅具有较好的收敛性和稳定性，而且其光滑性也较高，因此，样条函数成为了重要的插值工具，其中应用较多的是三次样条插值。

设给定节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 及节点上的函数值 $f(x_i)=y_i$ $i=0,1,\cdots,n$。三次样条插值问题就是构造 $s(x)\in\mathbf{S}_3(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 使

$$s(x_i)=y_i, \quad i=0,1,\cdots,n. \tag{4-33}$$

三次样条插值问题实际上是一种特殊类型的分段三次多项式插值问题：

1）它只在插值区间端点比**Lagarnge**多项式插值问题多两个边界条件，但却在内点处有一阶、二阶连续的导函数，从而要比**Lagarnge**插值更光滑。

2）分段**Hermite**三次多项式插值问题，只有被插值函数在所有插值节点处的函数值和导数值都已知时才能使用，而且在内点处有二阶导函数一般不连续。

下面我们讨论三次样条插值多项式$s_3(\boldsymbol{x})$的构造。

一般来讲，构造三次样条插值多项式$s_3(x)$ ，若用待定系数法，

可写成 $S_3(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i \quad x\in[x_i,x_{i+1}] \quad i=0,1,\cdots,n-1$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i为待定系数，共有4n个。按定义$s_3(x)$应满足：

（1）插值条件n+1个： $S(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$

连续性条件n−1个：$S(x_i-0)=S(x_i+0) \quad i=0,1,\cdots,n-1$

（2）在内点一阶导数连续性条件n−1个：

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \qquad i=0,1,\cdots,n-1$$

（3）在内点二阶导数连续性条件n−1个：

$$S''(x_i-0)=S''(x_i+0) \qquad i=0,1,\cdots,n-1$$

共计个4n−2条件，因此要确定4n个系数，尚需要另外附加2个条件。

通常有如下三种类型的附加条件，称为边界条件：

第一种：固支条件（第一类边界条件）

$$S'(x_0)=f'(x_0),\quad S'(x_n)=f'(x_n)$$

第二种： $S''(x_0)=f''(x_0),\ S''(x_n)=f''(x_n)$，特别地，

$f''(x_0)=f''(x_n)=0$，称为自然边界条件；

第三种：周期条件

$$S(x_0-0)=S(x_n+0),\ S'(x_0-0)=S'(x_n+0),\ S''(x_0-0)=S''(x_n+0),$$

已知 $f(x_0)=f(x_n)$ 确定的周期函数。

例，已知 $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1,$ **求** $f(x)$ **在区间** $[-1,1]$ **上的**三次自然样条插值多项式。

解：这里n=2区间$[-1,1]$分成两个子区间，故设

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & x\in[-1,0] \\ s_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & x\in[0,1] \end{cases}$$

且

$$s_0'(x)=3a_0x^2+2b_0x+c_0\ ,\ s_0''(x)=6a_0x+2b_0$$

$$s_1'(x)=3a_1x^2+2b_1x+c_1\ ,\quad s_1''(x)=6a_1x+2b_1$$

由插值条件和连续性条件：$s_0(-1)=1,\ s_0(0)=s_1(0)=0\ ,\ s_1(1)=1$

由在内点一阶、二阶导数连续性条件：$s_0'(0)=s_1'(0)\ ,\ s_0''(0)=s_1''(0)$

以及由自然边界条件： $s_0''(-1)=0\ ,\ s_1''(1)=0$。

得到如下**8**×**8**阶线性方程组：

$$-a_0+b_0-c_0+d_0=1,\ -6a_0+2b_0=0,\ b_0-b_1=0,\ d_0=0$$

$$a_1+b_1+c_1+d_1=1,\ 6a_1+2b_1=0,\ c_0-c_1=0,\ d_1=0$$

解之,

$$a_0=-a_1=\frac{1}{2},\ b_0=b_1=\frac{3}{2},\ c_0=c_1=b_0=b_1=0。$$

则 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的三次自然样条插值多项式为:

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[-1,0]\\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[0,1]\end{cases}$$

待定系数法过于繁琐，当n充分大时，计算量过大，不实用。

下面我们介绍一种构造三次样条（3-Spline）插值多项式的三转角方程构造法。此方法的特点是：只需求解一个不超过n+1阶线性方程组，而且力学意义明显。 设

$$s'(x_k)=m_k \ (k=0,1,\cdots,n), \quad h_k=x_{k+1}-x_k \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

因为$s(x)$在每一个子区间$[x_k,x_{k+1}]$上都是三次多项式，因此，在$[x_0, \ x_n]$上可以将$s(x)$表示成分段两点三次**Hermite**插值多项式。

由**4.2**中的例**6**， 当$x\in[x_k,x_{k+1}]$时，

$$s(x)=s(x_k)\left(1-2\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k+1}}\right)^2+m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

$$+s(x_{k+1})\left(1-2\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2+m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

(4-34)

即

$$s(x)=\frac{h_k+2(x-x_k)}{h_k^3}(x-x_{k+1})^2 y_k+\frac{h_k-2(x-x_{k+1})}{h_k^3}(x-x_k)^2 y_{k+1}$$

$$+\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})^2}{h_k^2}m_k+\frac{(x-x_{k+1})(x-x_k)^2}{h_k^2}m_{k+1}。\qquad (4\text{-}35)$$

因此，求$s(x)$的关键在于确定$n+1$个常数$m_0, m_1, \ldots, m_n$。

为此，对$s(x)$求二阶导数，得

$$s''(x)=\frac{6x-2x_k-4x_{k+1}}{h_k^2}m_k+\frac{6x-4x_k-2x_{k+1}}{h_k^2}m_{k+1}$$

$$+\frac{6(x_k+x_{k+1}-2x)}{h_k^3}(y_{k+1}-y_k),\quad x\in[x_k, x_{k+1}], \qquad (4\text{-}36)$$

于是，对于 $x \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$\lim_{x\to x_k^+} s''(x) = \frac{6x_k - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x_k - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x_k)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k),$$

$$\lim_{x\to x_k^+} s''(x) = -\frac{4}{h_k} m_k - \frac{2}{h_k} m_{k+1} + \frac{6}{h_k^2}(y_{k+1} - y_k)\text{。} \tag{4-37}$$

在（**4-36**）中以$k-1$取代k，便得$s(x)$在$[x_{k-1}, x_k]$上的表达式，并求得

$$s''(x) = \frac{6x - 2x_{k-1} - 4x_k}{h_{k-1}^2} m_{k-1} + \frac{6x - 4x_{k-1} - 2x_k}{h_{k-1}^2} m_k + \frac{6(x_{k-1} + x_k - 2x)}{h_{k-1}^3}(y_k - y_{k-1}),$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k],$$

$$\lim_{x\to x_k^-} s''(x) = \frac{2}{h_{k-1}} m_{k-1} + \frac{4}{h_{k-1}} m_k - \frac{6}{h_{k-1}^2}(y_k - y_{k-1})\text{。} \tag{4-38}$$

由 $\lim\limits_{x\to x_k^+} s''(x) = \lim\limits_{x\to x_k^-} s''(x) \quad (k = 1,2,\cdots,n-1)$ 得

$$\frac{1}{h_{k-1}}m_{k-1}+2\left(\frac{1}{h_{k-1}}+\frac{1}{h_k}\right)m_k+\frac{1}{h_k}m_{k+1}=3\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k^2}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right)。\quad \textbf{(4-39)}$$

用 $\frac{h_k+h_{k-1}}{h_{k-1}h_k}$ 除等式两端，并化简所得方程，得到基本方程组

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k,\quad (k=1,2,\cdots,n-1)\qquad (4\text{-}40)$$

其中

$$\lambda_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}},\quad \mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}},\quad g_k=3\left(\mu_k\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}+\lambda_k\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right),\quad (k=1,2,\cdots,n-1)\qquad (4\text{-}41)$$

方程组（4−40）中含n−1个方程、n+1个未知数$m_0, m_1, \cdots, m_n$。

为了解出$m_k(k=0, 1, \cdots, n)$，还应补充两个方程。因此，我们通过在插值条件（4-33）上再附加两个边界条件来解决这个问题。

本节我们考虑下面三类边界条件。

一、第一类边界条件是 $$\begin{cases} s'(x_0)=f_0', \\ s'(x_n)=f_n', \end{cases} \tag{4-42}$$

即 $m_0=f_0', m_n=f_n'$。　于是只需求解n−1阶线性方程组

$$\begin{cases} 2m_1+\mu_1 m_2=g_1-\lambda_1 f_0', \\ \lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k, \quad (k=2,3,\cdots,n-2) \\ \lambda_{n-1}m_{n-2}+2m_{n-1}=g_{n-1}-\mu_{n-1}f_n', \end{cases} \tag{4-43}$$

即
$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1-\lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1}-\mu_{n-1}f_n' \end{pmatrix} \tag{4-44}$$

得出$m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$。

二、第二类边界条件是 $\begin{cases} s''(x_0)=f_0'' \\ s''(x_n)=f_n'' \end{cases}$ (4−45)

由（4-37），（4-38）边界条件可得

$$\lim_{x\to x_0^+} s''(x)=f_0''=-\frac{4}{h_0}m_0-\frac{2}{h_0}m_1-\frac{6}{h_0^2}(y_1-y_0)。\qquad 两端\times\frac{h_0}{2}$$

$$\lim_{x\to x_n^-} s''(x)=f_n''=\frac{2}{h_{n-1}}m_{n-1}+\frac{4}{h_{n-1}}m_n-\frac{6}{h_{n-1}^2}(y_n-y_{n-1})。\qquad 两端\times\frac{h_{n-1}}{2}$$

从而边界方程可表示为并与（4-40）联立即得所需方程组：

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0}-\dfrac{h_0}{2}f_0'', \\ m_{n-1}+2m_n=\dfrac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}}+\dfrac{h_{n-1}}{2}f_n''。\end{cases} \qquad (4\text{-}46)$$

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k, \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

于是只需求解n+1阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}47)$$

其中$g_1, g_2, \cdots, g_{n\text{-}1}$如（4−41）定义，而

$$\begin{cases} g_0 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{2} f_0'', \\ g_n = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases} \qquad (4\text{-}48)$$

解得$m_0, m_2, \cdots, m_n$。

三、第三类边界条件是周期性条件

设 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为一个周期的函数，这时 $s(x)$ 也应以 $x_n - x_0$ 为周期。于是 $s(x)$ 在端点处满足条件

$$\lim_{x \to x_0^+} s^{(p)}(x) = \lim_{x \to x_n^-} s^{(p)}(x), \quad (p = 0,1,2) \qquad (4\text{-}49)$$

由（4−37）和（4−38）得

$$\lim_{x \to x_0^+} s''(x) = -\frac{4}{h_0} m_0 - \frac{2}{h_0} m_1 + \frac{6}{h_0^2}(y_1 - y_0),$$

$$\lim_{x \to x_n^-} s''(x) = \frac{2}{h_{n-1}} m_{n-1} + \frac{4}{h_{n-1}} m_n - \frac{6}{h_{n-1}^2}(y_n - y_{n-1}),$$

再注意到， $\lim_{x \to x_0^+} s''(x) = f_0'' = f_n'' = \lim_{x \to x_n^-} s''(x)$ $\quad \lim_{x \to x_0^+} s'(x) = \lim_{x \to x_n^-} s'(x)$

从而得 $m_0 = m_n$，所以

$$\frac{1}{h_0} m_1 + \frac{1}{h_{n-1}} m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) m_n = 3\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0^2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^2}\right),$$

简写为 $$\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n, \tag{4-50}$$

其中
$$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \\ g_n = 3\left(\mu_n \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} + \lambda_n \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right). \end{cases} \tag{4-51}$$

将（**4-51**）与（**4-40**）联立，并用m_n取代m_0，得n阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4-52}$$

得出$m_1, m_2, \cdots, m_n$。

注意到，不论采用哪类边界条件，所得方程组的系数矩阵（见（4-44）、（4-47）和（4-52））都是严格对角占优阵，所以非奇异，故方程组有唯一解。

例，给定插值条件

x_i	-1	0	1
y_i	1	0	1

用三转角方程构造法求 $f(x)$ 的三次自然样条插值多项式。

解：由（4-40）和（4-46）可得三转角方程：

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0}-\dfrac{h_0}{2}f_0'' \\ \lambda_1 m_0+2m_1+\mu_1 m_2=3\left(\lambda_1\dfrac{(y_1-y_0)}{h_0}+\mu_1\dfrac{(y_2-y_1)}{h_1}\right) \\ m_1+2m_2=\dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1}-\dfrac{h_1}{2}f_2'' \end{cases}\qquad \lambda_1=\frac{h_1}{h_1+h_0}=\frac{1}{2}=\mu_1=\frac{h_0}{h_1+h_0},$$

其中 $y_1-y_0=-1$, $y_2-y_1=1$, $h_0=h_1=1$，$f_0''=f_2''=0$。从而

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=-3 \\ \dfrac{1}{2}m_0+2m_1+\dfrac{1}{2}m_2=0 \\ m_1+2m_2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&0\\0.5&2&0.5\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_0\\m_1\\m_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$$

解之，

$m_0=-\dfrac{3}{2}$，$m_1=0$，$m_2=\dfrac{3}{2}$，代入（4-35），得

$$s_0(x)=(1+2\cdot(x+1))x^2\cdot 1+(1-2x)(x+1)^2\cdot 0+(x+1)x^2\left(-\frac{3}{2}\right)+x(x+1)^2\cdot 0,$$

$$=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\quad x\in[-1,0]$$

$$s_1(x)=(1+2x)\cdot(x-1)^2\cdot 0+(1-2(x-1))x^2\cdot 1+x(x-1)^2\cdot 0+x^2(x-1)\cdot\frac{3}{2},$$

$$=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\quad x\in[0,1]$$

即满足给定插值条件的 $f(x)$ 的三次自然样条插值多项式为：

。

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[-1,0]\\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & x\in[0,1]\end{cases}$$

例2　给定插值条件

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	0	0

以及第一类边界条件m_0=1, m_3=0, 求三次样条插值函数。

解

$$\lambda_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}=\frac{1}{2},\qquad \mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}=\frac{1}{2},$$

所求方程组为 $\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k,\quad g_k=0,\ k=1,2$。

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}m_0+2m_1+\frac{1}{2}m_2=0\\ \frac{1}{2}m_1+2m_2+\frac{1}{2}m_3=0\end{cases}$ 再由m_0=1, m_3=0, 解得 $m_1=-\frac{4}{15},\ m_2=\frac{1}{15}$。

代入（**4-35**），得

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}x(1-x)(15-11x), & x\in[0,1]\\ \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x), & x\in[1,2]\\ \frac{1}{15}(x-3)^2(x-2), & x\in[2,3].\end{cases}$$

上述结果表明，三次样条插值的逼近效果较好。

下面的定理说明了三次样条插值函数的收敛性。

定理4. 6 **设**$f(x)\in \mathbf{C}^2[a,b]$，$s(x)$ **是以**$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$**为节点，** 满足三种边界条件中的任何一种的三次样条插值函数，记 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$，则当$h\to 0$时，$s(x)$和 $s'(x)$ 在$[a,b]$上分别一致收敛于$f(x)$和 $f'(x)$。