第5章

抛物型方程的差分法

§3 Fourier方法

直接法虽然具有通用性，但是在实际应用时，要遇到一些困难。此方法需要计算高阶矩阵的特征值或 $\|C(\tau)\|$，这只能在一些特殊矩阵才能实现。

本节仅限于讨论常系数线性非驻定方程的纯初值问题和带周期边值条件的混合问题。

Fourier方法：将空间变量和时间变量分离，从而将偏微分方程化为常微分方程后再讨论解的适定性。

本节是将**Fourier**方法用于相应的差分方程，得到若干便于应用的判别稳定性的代数准则。

3.1 差分方程的**Fourier**方法

先考虑线性常系数一阶方程抛物型方程，具有周期(周期为l)边值条件。 逼近它的二层差分方程的一般形式为：

$$\sum_{m\in N_1} a_m u_{j+m}^k = \sum_{m\in N_0} b_m u_{j+m}^k \quad j=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (3.1)$$

（只考虑按初值稳定，故可设右端为零）这是在空间网点x_j处的差分方程，N_0和N_1是包含0及其附近的正负整数的有限集合，a_m和b_m不依赖于j但和τ有关。

例如，对向前差分格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k$$

其中$N_0=\{-1,0,1\}$，$N_1=\{0\}$，$a_0=1$, $b_{-1}=b_1=r$,$b_0=1-2r$。

例如，对向后差分格式

$$-ru_{j+1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k$$

其中$N_1=\{-1, 0, 1\}$，$N_0=\{0\}$，$b_0=1, a_{-1}=a_1=r, a_0=1+2r$。

对六点对称差分格式

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j+1}^k+(1-r)u_j^k+\frac{r}{2}u_{j-1}^k$$

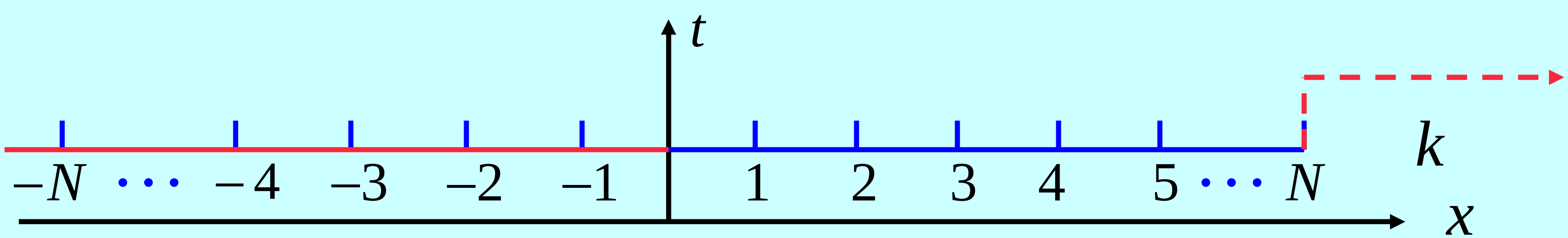
其中$N_1=\{-1, 0, 1\}, N_0=\{-1, 0, 1\}$;

$b_0=1-r$，$b_{-1}=b_1=r/2$，$a_{-1}=a_1=-r/2$，$a_0=1+r$。

下面我们将 u_j^k 开拓成为一个以l为周期的周期函数 $u^k(x)$。

（一）由于$u_0^k = u_N^k$ 为周期边值条件，故可将 u_j^k（固定k）周期开拓，使其对一切 $j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ，有意义，且方程（3. 1）对所有整数 j成立, 即

$$u_j^k = u\left(x_j\right), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

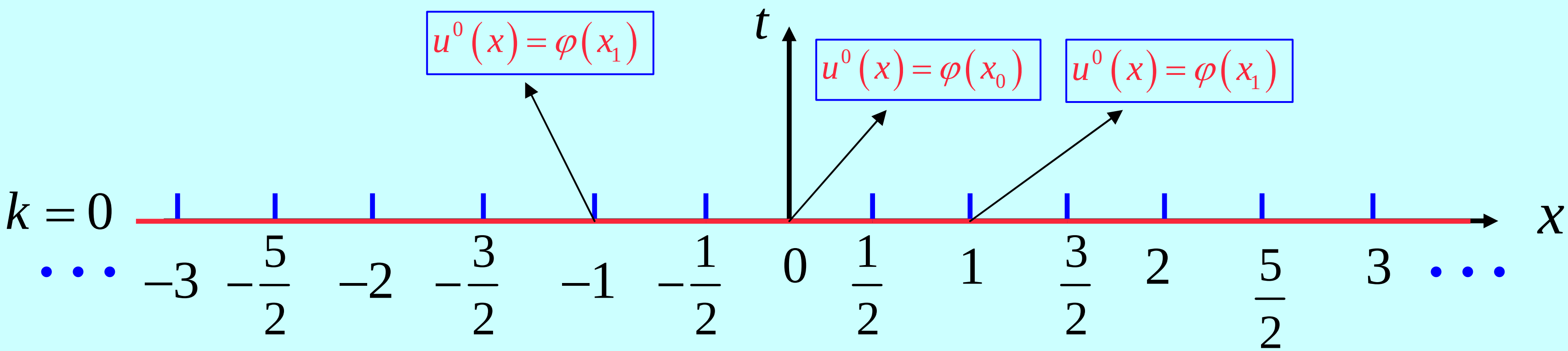


（二）再将$u_j^k=u\left(x_j\right)$开拓为$(-\infty,\ \infty)$上的函数$\boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{x})$。为此,取半整点

$$x_{j+\frac{1}{2}}=x_j+\frac{1}{2}h,\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

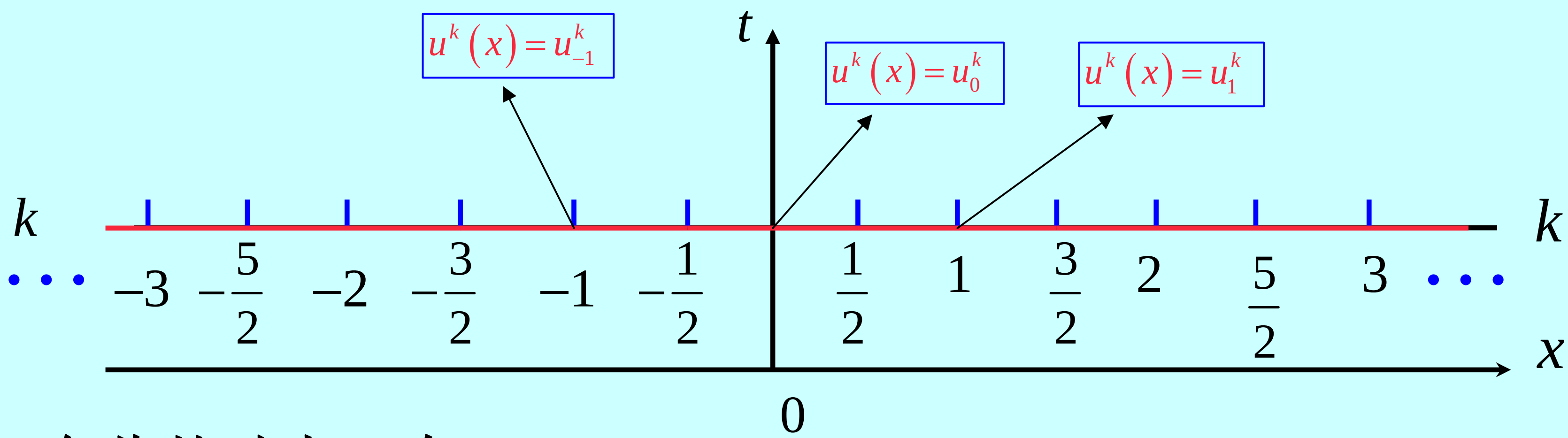
并用如下阶梯函数逼近初始函数$\varphi(\boldsymbol{x})$

$$u^0(x)=\varphi\left(x_j\right),\ x_{j-\frac{1}{2}}<x_j<x_{j+\frac{1}{2}},\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



（三）再将(3.1)看成在任一$x_j=x\in(-\infty,\ \infty)$上成立，则得具有连续变量的差分解$u^k(x)$。 显然，$u^k(x)$是一个关于$x$的以$l$为周期的周期函数，且

$$u^k(x)=u_j^k\ ,\quad x_{j-\frac{1}{2}}<x_j<x_{j+\frac{1}{2}}\ ,\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



在此基础上，有

$$\|U^k\|^2=\sum_{j=1}^{N-1}h(u_j^k)^2=\sum_{j=1}^{N-1}h(u_j^k)^2+\frac{h}{2}\left\{\left(u_0^k\right)^2+\left(u_N^k\right)^2\right\}=\int_0^l\left|u^k(x)\right|^2dx=\left\|u^k(x)\right\|_{L^2}^2$$

这样，我们就可将**Fourier**方法用于具有连续空间变量的差分方程：

$$\sum_{m\in N_1} a_m u^{k+1}\left(x+x_m\right)=\sum_{m\in N_0} b_m u^k\left(x+x_m\right) \qquad (3.2)$$

将$\boldsymbol{u^k(x)}$展成**Fourier**级数：

$$u^k\left(x\right)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p^k e^{i\frac{2p\pi}{l}x} \quad \text{（Fourier级数的指数形式）} \qquad (3.3)$$

$$v_p^k=\frac{1}{l}\int_0^l u^k\left(x\right)\cdot e^{-i\cdot\frac{2p\pi}{l}x}dx, \quad p=0,1,2,\cdots \qquad (3.4)$$

由**Parseval**等式：

$$\left\|u^k(x)\right\|_{L^2}^2=l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|v_p^k\right|^2=\left\|v_p^k\right\|_{l^2}^2 \qquad (3.5)$$

将（3.3）代入（3.2）得

$$\sum_{m\in N_1} a_m\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p^{k+1} e^{i\frac{2p\pi}{l}x+x_m}=\sum_{m\in N_0} b_m\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p^k e^{i\frac{2p\pi}{l}x+x_m}$$

$$\sum_{m\in N_1} a_m \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p^{k+1} \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m} \right) \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x} = \sum_{m\in N_0} b_m \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p^{k} \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m} \right) \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x}$$

比较等式两边系数，得

$$v_p^{k+1}\left(\sum_{m\in N_1} a_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m} \right) = v_p^k \left(\sum_{m\in N0} b_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m} \right)$$

即

$$v_p^{k+1} = G(ph,\tau)\ v_p^k \qquad (3.7)$$

其中

$$= \frac{\sum_{m\in N0} b_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m}}{\sum_{m\in N_1} a_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m}} \qquad (3.8)$$

将（3.7）代入（3.5）得

$$\left\|u^k(x)\right\|_{L^2}^2 = l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|v_p^k\right|^2 = l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|G(ph,\tau)v_p^{k-1}\right|^2 = l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|G^k(ph,\tau)v_p^0\right|^2$$

$$= l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|G^k(ph,\tau)\right|^2\cdot\left|v_p^0\right|^2 \qquad (3.9)$$

若差分格式稳定，则存在常数K>0, 使得

$$\left\|u^k(x)\right\|_{L^2}^2 \le K^2\cdot\left\|u^0(x)\right\|_{L^2}^2$$

Parseval等式：$\left\|u^0(x)\right\|_{L^2}^2 = l\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|v_p^0\right|^2$

由于阶梯函数$\{\boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{x})\}$与$\boldsymbol{L}_2(0,1)$稠密，故由上式可得

$$\left|G^k(ph,\tau)\right|\le K \quad 0<\tau\le\tau_0 \quad 0<k\tau\le T$$

即$G^k(ph,\tau)$一致有界。反之，$G^k(ph,\tau)$一致有界, 由（3.9）

$$\left\|u^{k}(x)\right\|_{L^{2}}^{2} \leq K^{2} l \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|v_{p}^{k}\right|^{2}=K^{2} \cdot\left\|u^{0}(x)\right\|_{L^{2}}^{2}$$

从而差分格式稳定。

我们称 $\boldsymbol{G^{k}(ph,\tau)}$ 为增长因子（**Amplication Factor**）

显然，不等式（3. 10）又等价于

$$\left|G^{k}(ph,\tau)\right| \leq 1+M\tau \qquad (3.12)$$

上式也称为**Von Neumann**条件。综上所述，我们得

命题3. 1　差分格式（3. 1）稳定 $\Leftrightarrow$ $G^{k}(ph,\tau)$ 一致有界。

$\Leftrightarrow$ **Von Neumann**条件（3. 12）成立。

注1：在（3.8）中$ph=x_p$式空间网点，$G(ph,\tau)$关于$\boldsymbol{x_p}$，τ连续，关于$\boldsymbol{x_p}$是以$\boldsymbol{l}$为周期的函数，所以，只需就$\boldsymbol{p}=0, 1, 2, \cdots, \boldsymbol{N}-1$，来研究$\boldsymbol{G^k(ph, \tau)}$一致有界性。此时，

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < l$$

注2：为增长因子的计算方法是：将 $u_j^k = v^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j}$ $\left(\alpha = \dfrac{2p\pi}{l}\right)$

代入（3.1），得

$$v_p^{k+1}\left(\sum_{m\in N_1} a_m \cdot e^{i\cdot\alpha\cdot x_{m+j}}\right) = v_p^k\left(\sum_{m\in N_0} b_m \cdot e^{i\cdot\alpha\cdot x_{m+j}}\right)$$

即

$$v_p^{k+1}\left(\sum_{m\in N_1} a_m \cdot e^{i\alpha\cdot x_m} \cdot e^{i\alpha\cdot x_j}\right) = v_p^k\left(\sum_{m\in N_0} b_m \cdot e^{i\cdot\alpha\cdot x_m} \cdot e^{i\alpha\cdot x_j}\right)$$

消去公因子 $e^{i\alpha\cdot x_j}$

$$v_p^{k+1} = \left(\sum_{m\in N_0} b_m \cdot e^{i\cdot\alpha\cdot x_m}\right)\cdot\left(\sum_{m\in N_1} a_m \cdot e^{i\cdot\alpha\cdot x_m}\right)^{-1} v_p^k$$

v_p^k 前面的因子即是增长因子（3.8）式。

例1 考虑向前差分格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f_j$$

$u_j^k = v^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j} = v^k e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$ 代入，得

$$v^{k+1} \cancel{e^{i\cdot\alpha\cdot jh}} = v^k r e^{i\cdot\alpha\cdot(j+1)h} + (1-2r)v^k r e^{i\cdot\alpha\cdot jh} + v^k r e^{i\cdot\alpha\cdot(j-1)h}$$

$$= v^k \cancel{e^{i\cdot\alpha\cdot jh}}\left[(1-2r) + r\left(e^{i\cdot\alpha\cdot h} + e^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right)\right]$$

消去公共因子$e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$，则可知增长因子

$$G(ph,\pi) = (1-2r) + r\left(e^{i\cdot\alpha\cdot h} + e^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right)$$

$$= (1-2r) + r\left(\cos\alpha h + \cancel{i\sin\alpha h} + \cos\alpha h - \cancel{i\sin\alpha h}\right)$$

$$= 1-2r(1-\cos\alpha h) = 1-4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)$$

为使$G(ph,\tau)$满足**Von Neumann**条件，必须且只需网比$r\leqslant 1/2$,

所以向前差分格式的稳定性条件是$r\leqslant 1/2$。

例2 **向后差分格式**

$$-ru_{j+1}^{k+1}+\left(1+2r\right)u_j^{k+1}+ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k$$

$u_j^k=v^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j}=v^k e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$ 代入，得

$$-re^{i\cdot\alpha\cdot(j+1)h}v^{k+1}+\left(1+2r\right)v^{k+1}re^{i\cdot\alpha\cdot jh}+v^{k+1}re^{i\cdot\alpha\cdot(j-1)h}=e^{i\cdot\alpha\cdot jh}\ v^k$$

$$v^{k+1}\cancel{e^{i\cdot\alpha\cdot jh}}\left[-re^{i\cdot\alpha\cdot h}+\left(1+2r\right)-re^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right]=\cancel{e^{i\cdot\alpha\cdot jh}}\ v^k$$

消去公共因子 $e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$，则可知增长因子

$$\begin{aligned}G\left(ph,\pi\right)&=\left[-re^{i\cdot\alpha\cdot h}+\left(1+2r\right)-re^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right]^{-1}\\&=\left[\left(1+2r\right)-r\left(\cos\alpha h+\cancel{i\sin\alpha h}+\cos\alpha h-\cancel{i\sin\alpha h}\right)\right]^{-1}\\&=\left[1+2r\left(1-\cos\alpha h\right)\right]^{-1}=\left[1+4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)\right]^{-1}\end{aligned}$$

显然 $|\,G(ph,\tau)\,|\leqslant 1$，对任何网比 $r>0$。所以绝对稳定。

例3，用**Fourier**方法分析如下差分格式的稳定性

$$-\sigma r u_{j+1}^{k+1} + (1+2\sigma r) u_j^{k+1} - \sigma r u_{j-1}^{k+1}$$

$$= (1-\sigma) r u_{j+1}^{k} + \left[1-2(1-\sigma) r\right] u_j^{k} + (1-\sigma) r u_{j-1}^{k} \qquad j=0,\pm 1,\cdots$$

其中 $\sigma \in [0,1]$。

解：对上式两端作离散的**Fourier**变换，即将 $u_j^k = v^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j} = v^k e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$ 代入

$$-\sigma r v^{k+1} e^{i\alpha(j+1)h} + (1+2\sigma r) v^{k+1} e^{i\alpha jh} - \sigma r v^{k+1} e^{i\alpha(j-1)h}$$

$$= (1-\sigma) r v^{k} e^{i\alpha(j+1)h} + \left[1-2(1-\sigma) r\right] v^{k} e^{i\alpha jh} + (1-\sigma) r v^{k} e^{i\alpha(j-1)h}$$

$$j=0,\pm 1,\cdots$$

消去公共因子 $e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$， 即

$$\left(-\sigma r e^{i\alpha h} + (1+2\sigma r) - \sigma r e^{-i\alpha h}\right) v^{k+1} = \left(e^{i\alpha h} + \left[1-2(1-\sigma) r\right] + (1-\sigma) r e^{-i\alpha h}\right) v^{k}$$

$$\left(-\sigma r(\cos\alpha h + \cancel{i\sin\alpha h}) + (1+2\sigma r) - \sigma r(\cos\alpha h - \cancel{i\sin\alpha h})\right) v^{k+1} =$$

$$\left[(1-\sigma) r(\cos\alpha h + \cancel{i\sin\alpha h}) + (1-2(1-\sigma) r) + (1-\sigma) r(\cos\alpha h - \cancel{i\sin\alpha h})\right] v^{k}$$

$$\left(-2\sigma r\cos\alpha h+\left(1+2\sigma r\right)\right)v^{k+1}=\left(2\sigma r\cos\alpha h+\left(1-2\left(1-\sigma\right)r\right)\right)v^{k}$$

化简得

$$v^{k+1}=G(\xi)v^{k}$$

其中

$$G(\xi)=\frac{1-4r(1-\sigma)\sin^2\frac{\xi}{2}}{1+4\sigma r\sin^2\frac{\xi}{2}}$$

下面求解不等式｜$G(\xi)$｜≤1。可直接求解，也可用如下方法。

计算$G(\xi)$对ξ的一次导数，并令其为零

$$\frac{dG(\xi)}{d\xi}=\frac{-4r\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}}{\left(1+4\sigma r\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^2}=0$$

从而知道ξ在**0**和$\pm\pi$处可能取得极大值，又注意，$G(0)=1$, 且

$$G(\pm\pi)=\frac{1-4(1-\sigma)r}{1+4\sigma r}$$

易知，$\frac{1-4(1-\sigma)r}{1+4\sigma r}\le 1$ 恒成立，所以只需考虑不等式：$-1\le\frac{1-4(1-\sigma)r}{1+4\sigma r}$。

当$\sigma\geqslant 1/2$，$r>0$时，$\frac{1-4(1-\sigma)r}{1+4\sigma r}=\frac{1+4\sigma r-4r}{1+4\sigma r}=1-\frac{4r}{1+4\sigma r}$ 而

$1+4\sigma r\ge 1+2r$，即有 $1-\frac{4r}{1+4\sigma r}\ge 1-\frac{4r}{1+2r}=\frac{1-2r}{1+2r}\ge -1$ 即 $|G(\xi)|\le 1$

当$\sigma<1/2$，则 $1-2\sigma>0$，当 $r\le\frac{1}{2(1-2\sigma)}$ 时 $2r(1-2\sigma)\le 1$

$\Rightarrow 2r\le 1+4\sigma r$ $\quad \frac{1}{2}\le\frac{1+4\sigma r}{4r}\Rightarrow -2\le\frac{-4r}{1+4\sigma r}$ 进一步，得

$-1\le 1-\frac{4r}{1+4\sigma r}$ 从而 $-1\le\frac{1-4(1-\sigma)r}{1+4\sigma r}$ 成立，即 $|G(\xi)|\le 1$。

因此，当$\sigma\geqslant 1/2$, 此格式无条件稳定；当$\sigma<1/2$, 此格式条件稳定，稳定条件为 $r\le\frac{1}{2(1-2\sigma)}$。

注4：Fourier方法同样可以用来分析差分方程组的稳定性，设差分方程组形如

$$\sum_{m\in N_1} A_m U_{j+m}^k = \sum_{m\in N_0} B_m U_{j+m}^k \qquad (3.15)$$

A_m, B_m, 是$s\times s$阶方阵，一般依赖于步长τ,但与j无关；U_j^k 是s维向量，其分量为：

$$u_{1j}^k,\ u_{2j}^k,\ \cdots,\ u_{sj}^k$$

像方程式的情形一样，即将 U_j^k 开拓为连续变量的周期函数

$U^k(x) = \left(u_1^k(x), u_2^k(x), \cdots, u_s^k(x)\right)^T$，并将它展成Fourier级数

$$U^k(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} V_p^k e^{i\frac{2p\pi}{l}x}$$

将其代入（3.15）比较等式两边系数，得

$$G(ph,\pi) = \left(\sum_{m\in N_1} A_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m}\right)^{-1}\left(\sum_{m\in N0} B_m \cdot e^{i\frac{2p\pi}{l}x_m}\right) \qquad (3.16)$$

计算增长矩阵的方法与前面一样，即以一般项

$$\boldsymbol{U}_j^k = \boldsymbol{V}^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j} = \boldsymbol{V}^k\ e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$$

代到（3.15），消去公共因子 $e^{i\cdot\alpha\cdot x_j}$ 即得

$$\boldsymbol{V}^{K+1} = \boldsymbol{G}\left(ph,\pi\right)\boldsymbol{V}^{K}$$

命题3.2 差分格式（3.15）稳定的充要条件是矩阵族

$$\left\{\ \boldsymbol{G}^k\left(x_p,\tau\right):\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T,\ \ p=0,1,\cdots,N-1\ \right\}$$

一致有界。

命题3.3（必要条件）矩阵族（3.19）一致有界的必要条件是

$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_p,\tau)$的谱半径满足

$$\rho(\boldsymbol{G}(\tau))\le 1+M\tau \qquad \left(\rho(\boldsymbol{G}(\tau))\le 1+O(\tau)\right) \qquad （2.20）$$

即满足**Von Neumann**条件。

Richardson格式写成等价的方程组

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2r\left(u_{j+1}^k + 2u_j^k + u_{j-1}^k\right) + w_j^k \\ w_j^{k+1} = u_j^k \end{cases}$$

将 $u_j^k = v_1^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j}$, $w_j^k = v_2^k e^{i\cdot\alpha\cdot x_j}$ 代入，并消去公因子

$$\begin{cases} v_1^{k+1} e^{i\alpha x_j} = 2r\left(v_1^k e^{i\alpha\left(x_j+h\right)} - 2v_1^k e^{i\alpha x_j} + v_1^k e^{i\alpha\left(x_j-h\right)}\right) + v_2^k e^{i\alpha x_j} \\ v_2^{k+1} e^{i\alpha x_j} = v_1^k e^{i\alpha x_j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1^{k+1} = 2r\left(v_1^k e^{i\alpha h} - 2v_1^k e^{i\alpha x_j} + v_1^k e^{-i\alpha h}\right) + v_2^k \\ v_2^{k+1} = v_1^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1^{k+1} = 2r\left(\left(\cos\alpha h + i\cancel{\sin\alpha h}\right) - 2 + \left(\cos\alpha h - i\cancel{\sin\alpha h}\right)\right)v_1^k + v_2^k \\ v_2^{k+1} = v_1^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1^{k+1} = 4r\left(\cos\alpha h - 1\right)v_1^k + v_2^k = -8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}v_1^k + v_2^k \\ v_2^{k+1} = v_1^k \end{cases}$$

即有

$$\boldsymbol{V}^{k+1} = \begin{pmatrix} v_1^{k+1} \\ v_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^k$$

显然增长矩阵

$$\boldsymbol{G}(\alpha h) = \begin{pmatrix} -8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(\alpha h)\right)=\lambda^2+8r\sin^2\frac{\alpha h}{2}\lambda-1=0$$

故

$$\lambda_1=-4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}+\sqrt{1+16r\sin^4\frac{\alpha h}{2}}$$

$$\lambda_2=-4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}-\sqrt{1+16r\sin^4\frac{\alpha h}{2}}$$

显然，当h充分小时，

$$\sin\frac{(N-1)\pi h}{2}=\cos\frac{\pi h}{2}>\frac{1}{2}$$

从而

$$\rho(\boldsymbol{G})=\left|\lambda_{N-1,2}\right|>r+\sqrt{1+r^2}>1+r$$

Richardson格式不满足**Von Neumann**条件，其绝对不收敛。

注5 **Fourier方法也可用于多维差分格式，求解区域或为全空间（纯初值问题），或为超长方体（周期边值条件）。** 作为例子，考虑二维热传导方程的边值问题：

$$
\begin{cases}
Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x, y < l, \quad (a > 0) \\
u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\
u(0, y, t) = u(l, y, t), \; u(x, 0, t) = u(x, l, t)
\end{cases} \tag{3.22}
$$

取步长 $h=1/N, \tau=T/M$，用两族平行线 $x=x_j=jh, y=y_k=kh$将求解域分划成矩形网格，网点为(x_j, y_k, t_n) $(t_n=n\tau)$。

引进二阶差分算子

$$\delta_x^2 u_{jk}^n = u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n$$

$$\delta_y^2 u_{jk}^n = u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n$$

作逼近（3.22)的向前差分格式

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{a}{h^2}\left(\delta_x^2 u_{jk}^{n}+\delta_y^2 u_{jk}^{n}\right) \qquad (3.23)$$

向后差分格式

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{a}{h^2}\left(\delta_x^2 u_{jk}^{n+1}+\delta_y^2 u_{jk}^{n+1}\right) \qquad (3.24)$$

Crank-Nicolson格式

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{a}{2h^2}\left(\delta_x^2 u_{jk}^{n+1}+\delta_x^2 u_{jk}^{n}+\delta_y^2 u_{jk}^{n+1}+\delta_y^2 u_{jk}^{n}\right) \qquad (3.24)$$

它们的截断误差的阶依次为：$O(\tau+h^2)$，$O(\tau+h^2)$，$O(\tau^2+h^2)$。

现在研究（3.23)的稳定性

$$u_{jk}^{n+1}=r\left(u_{j+1,k}^{n}-2u_{j,k}^{n}+u_{j-1,k}^{n}\right)+r\left(u_{j,k+1}^{n}-2u_{j,k}^{n}+u_{j,k-1}^{n}\right)+u_{j,k}^{n}$$

$$=r\left(u_{j+1,k}^{n}+u_{j-1,k}^{n}\right)+r\left(u_{j,k+1}^{n}+u_{j,k-1}^{n}\right)+\left(1-4r\right)u_{j,k}^{n}$$

取 $u_{j,k}^{n}=v^{n}e^{i\left(\alpha x_j+\beta y_j\right)},\ \alpha=\dfrac{2\pi p}{l},\quad \beta=\dfrac{2\pi q}{l},$

$$v^{n+1}e^{i\left(\alpha x_j+\beta y_j\right)}=r\left(v^{n}e^{i\left(\alpha\left(x_j+h\right)+\beta y_j\right)}+v^{n}e^{i\left(\alpha\left(x_j-h\right)+\beta y_j\right)}\right)$$

$$+r\left(v^{n}e^{i\left(\alpha x_j+\beta\left(y_j+h\right)\right)}+v^{n}e^{i\left(\alpha x_j+\beta\left(y_j-h\right)\right)}\right)+\left(1-4r\right)v^{n}e^{i\left(\alpha x_j+\beta y_j\right)}$$

$$v^{n+1}=\left[r\left(v^{n}e^{i\alpha h}+v^{n}e^{-i\alpha h}\right)+r\left(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h}\right)+\left(1-4r\right)\right]v^{n}$$

$$v^{n+1}=\Big[\ r\left(\cos\alpha h+\cancel{i\sin\alpha h}+\cos\alpha h-\cancel{i\sin\alpha h}\right)$$

$$+r\left(\cos\beta h+\cancel{i\sin\beta h}+\cos\beta h-\cancel{i\sin\beta h}\right)$$

$$+\left(1-4r\right)\Big]\ v^{n}$$

$$
\begin{aligned}
G(\alpha h, \beta h) &= 1-4r+2r(\cos\alpha h+\cos\beta h) \\
&= 1-2r(1-\cos\alpha h)-2r(1-\cos\beta h) \\
&= 1-4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}-4r\sin^2\frac{\beta h}{2} \\
&= 1-4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}+\sin^2\frac{\beta h}{2}\right)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\left|G(\alpha h, \beta h)\right| \le 1 \Leftrightarrow r \le \frac{1}{4}
$$

由此可见，随着维数的增加，对网比的限制更严了。

3．2判断差分格式稳定性的代数准则

矩阵族

$$\left\{\ \boldsymbol{G}^k\left(x_p,\tau\right):\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T,\ \ p=0,1,\cdots,N-1\ \right\}\quad \textbf{(3.19)}$$

一致有界。

当增长矩阵$\boldsymbol{G}$的阶$\boldsymbol{s}$=1时：

$\boldsymbol{G}^k$一致有界(即稳定) $\Leftrightarrow$ **Von Neumann**条件: $\left|\boldsymbol{G}\left(x_p,\tau\right)\right|=1+O(\tau)$ 成立

当增长矩阵$\boldsymbol{G}$的阶$\boldsymbol{s}$≥2时：

$\boldsymbol{G}^k$一致有界(即稳定） $\Longrightarrow$ **Von Neumann**条件: $\left|\rho\left(\boldsymbol{G}\right)\right|=1+O(\tau)$ 成立

若$\boldsymbol{G}^k(x_p,\tau)$是正规矩阵（特别是对称阵）时，一致有界（即稳定）

$\Leftrightarrow$ **Von Neumann**条件: $\left|\rho\left(\boldsymbol{G}\right)\right|=1+O(\tau)$ 成立

然而增长矩阵$\boldsymbol{G}$一般不是正规矩阵, 因此, 我们要考虑新的充分条件。

定理3.1 矩阵$\boldsymbol{G}(x_p,\tau)$关于τ于$\tau=0$ **Lipschitz**连续，则矩阵族（3.19）一致有界的充分必要条件是矩阵族：

$$\left\{\ \boldsymbol{G}^k\left(x_p,0\right):\ 0<\tau\leq\tau_0,\ 0<k\tau\leq T,\ \ p=0,1,\cdots,N-1\ \right\}$$

一致有界。

证明 只证充分性，因为必要性的证明完全类似。由假设满足**Lipschitz**条件，有常数K使

$\boldsymbol{G}\left(x_p,\tau\right)-\boldsymbol{G}\left(x_p,0\right)=\tau\boldsymbol{G}_1$，而 $\left\|\boldsymbol{G}_1\right\|\leq K$，记 $\boldsymbol{G}_0=\boldsymbol{G}\left(x_p,0\right)$，则$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\left(x_p,\tau\right)=\boldsymbol{G}_0+\tau\boldsymbol{G}_1$。

注意：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}^k&=\left(\boldsymbol{G}_0+\tau\boldsymbol{G}_1\right)\boldsymbol{G}^{k-1}=\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{G}^{k-1}+\tau\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-1}\\&=\boldsymbol{G}_0\left(\boldsymbol{G}_0+\tau\boldsymbol{G}_1\right)\boldsymbol{G}^{k-2}+\tau\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-1}\\&=\boldsymbol{G}_0^2\left(\boldsymbol{G}_0+\tau\boldsymbol{G}_1\right)\boldsymbol{G}^{k-3}+\tau\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-2}+\tau\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-1}\\&=\boldsymbol{G}_0^3\boldsymbol{G}^{k-3}+\tau\left(\boldsymbol{G}_0^2\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-3}+\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-2}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-1}\right)\end{aligned}$$

$$=\cdots = \boldsymbol{G}_0^k + \tau\left(\boldsymbol{G}_0^{k-1}\boldsymbol{G}_1 + \cdots + \boldsymbol{G}_0^2\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-3} + \boldsymbol{G}_0\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-2} + \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-1}\right)$$

$$= \boldsymbol{G}_0^k + \tau\sum_{i=0}^{k-1}\left(\boldsymbol{G}_0^i\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}^{k-i-1}\right)$$

由于 $\boldsymbol{G}_0^k$ 一致有界，可设 $\left\|\boldsymbol{G}_0^i\right\| \le M$，$\left\|\boldsymbol{G}_0^i\boldsymbol{G}_1\right\| \le M$ ，从而得

$$\left\|\boldsymbol{G}^k\right\| \le \left\|\boldsymbol{G}_0^k\right\| + \tau\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\boldsymbol{G}_0^i\boldsymbol{G}_1\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{G}^{k-i-1}\right\| \le M\left(1+\tau\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\boldsymbol{G}^{k-i-1}\right\|\right)$$

由**Gronwall**不等式（见第一章§1引理1.3），得

$$\left\|\boldsymbol{G}^k\right\| \le M\left(1+\tau\cdot M\right)^{k-1}$$

又 $0<k<\dfrac{T}{\tau}$，故不等式右端一致有界。

例3．考虑逼近带低阶项的抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bu$$

的向前差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+bu_j^k$$

则进一步有 $u_j^{k+1}=ru_{j+1}^k+(1-2r+b\tau)u_j^k+ru_{j-1}^k$， 由**Fourier**方法

将 $u_j^k=v^k e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$ 代入，得

$$v^{k+1}e^{i\cdot\alpha\cdot jh}=v^k re^{i\cdot\alpha\cdot(j+1)h}+(1-2r+b\tau)v^k re^{i\cdot\alpha\cdot jh}+v^k re^{i\cdot\alpha\cdot(j-1)h}$$

$$=v^k e^{i\cdot\alpha\cdot jh}\left[(1-2r+b\tau)+r\left(e^{i\cdot\alpha\cdot h}+e^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right)\right]$$

消去公共因子$e^{i\cdot\alpha\cdot jh}$，则可知增长因子

$$\begin{aligned}G(ph,\tau)&=(1-2r+b\tau)+r\left(e^{i\cdot\alpha\cdot h}+e^{-i\cdot\alpha\cdot h}\right)\\&=(1-2r+b\tau)+r\left(\cos\alpha h+\cancel{i\sin\alpha h}+\cos\alpha h-\cancel{i\sin\alpha h}\right)\\&=1-2r(1-\cos\alpha h)+b\tau=1-4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)+b\tau\end{aligned}$$

由定理3.1知，为使$G^k(ph,\tau)$一致有界等价 $G_0^k\left(G_0=1-4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)$ 一致有界。 由例1, G_0^k 一致有界必须且只需网比$r\leqslant 1/2$。

这说明低阶项 bu_j^k 不影响差分格式的稳定性。

或由 $G(ph,\tau)=1-4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)+b\tau$, 当$r\leqslant 1/2$时。

$$\left|1-4r\left(\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)+b\tau\right|\le 1+b\tau\le e^{b\tau}$$

因此，我们得到

$$\left\|u^k\right\|_{l^2}=\left\|u^k(x)\right\|_{L^2}\le e^{b\tau}\left\|u^{k-1}(x)\right\|_{L^2}\le e^{bk\tau}\left\|u^0(x)\right\|_{L^2}\le K\left\|u^0(x)\right\|_{L^2}=K\left\|u^0(x)\right\|_{l^2}$$

其中$K=e^{b\tau}$, $0<k\tau<T$, 即序列在$L^2[0,l]$中稳定条件为：$r\leqslant 1/2$。

今设$G(x_p,\tau)=G(x_p)$与τ无关，现在考虑矩阵族

$$\left\{\ G^k\left(x_p\right):\ x_0=0,<x_1,\cdots,x_{N-1}=l\,,\ 0<\tau\le\tau_0\,,\ 0<k\tau\le T\ \right\}\quad（3.27）$$

我们有：

定理3.2 矩阵族（3.27）一致有界的充分必要条件是矩阵族

$$\left\{ \quad \boldsymbol{G}^k(x): \quad 0 < x \le l, \quad k = 0, 1, \cdots, \right\} \tag{3.28}$$

一致有界。

证明：充分性显然，只证必要性。

假定网格按2等分，4等分,⋯，2^m等分加密，则2等分点$\boldsymbol{x}_j$一旦是$[0, \boldsymbol{l}]$的网点，便永远是网点。 由假设

$$\left\|\boldsymbol{G}^k(x_j)\right\| \le M, \quad 0 < k\tau \le T$$

$\boldsymbol{M}$是与分划无关的常数。令$\boldsymbol{t}\to 0$(从而$\boldsymbol{h}\to 0$),则 $\left(k \le \frac{T}{\tau} \to \infty\right)$

$$\left\|\boldsymbol{G}^k(x_j)\right\| \le M, \quad k = 1, 2, \cdots$$

而二等分点$\{x_j\}$于$[0, 1]$稠密，$G(x)$是连续函数，故

$$\left\|\boldsymbol{G}^k(x)\right\| \le M, \; 0 < x < l, \; k = 1, 2, \cdots$$

一般矩阵 ⊃可对角化阵 ⊃ 正规阵 ⊃ **Hermite**阵 ⊃ 正定对称阵

定理3. 3 （一致对角化）若对任意$\boldsymbol{G}(x_p,\tau)$，有矩阵$\boldsymbol{H}$使

$$\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{H}^{-1}$和$\boldsymbol{H}$关于p和充分小τ的一致有界，则**Von Neumann**条件也是格式稳定的充分条件。

证明： 因 $\boldsymbol{G}^k=\boldsymbol{H}\Lambda\boldsymbol{H}^{-1}$，则

$$\left\|\boldsymbol{G}^k\right\|\le\left\|\boldsymbol{H}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{\Lambda}^k\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{H}^{-1}\right\|\le\left\|\boldsymbol{\Lambda}^k\right\|=\rho^k(\boldsymbol{\Lambda})=\rho^k(\mathbf{G})$$

从而 $\left\|\boldsymbol{G}^k\right\|\le(1+M\tau)^k\le(1+M\tau)^{\frac{T}{\tau}}=(1+M\tau)^{\frac{1}{\tau M}MT}\le e^{TM}\le K<\infty$ #

定理 若二阶矩阵$\boldsymbol{G}(x_p,\tau)$的元素有界，其界与$x_p,\tau\,(0<\tau<\tau_0)$无关，$\boldsymbol{G}(x_p,\tau)$按模较小的特征值$\lambda_2$满足条件，

$$\left|\lambda_2(x)\right|\le\delta<1$$

则**Von Neuman** 条件是矩阵族$\{\boldsymbol{G}^k(\boldsymbol{x}_p,\tau)\}$一致有界的充分条件。

证明：由**Schur**定理，存在酉阵$\boldsymbol{U}$使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}$，为上三角阵，可知，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b(x_p,\tau)\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

由此，$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^H$。 进而$\boldsymbol{G}^k=\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{U}^H$，对于酉阵U而言，$\|\boldsymbol{U}\|_2=\|\boldsymbol{U}^H\|_2=1$
故只需证明矩阵族$\{\boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{x}_p,\tau)\}$，对$0<\tau<\tau_0$，$k\tau\leqslant T$，一切实数$x_p$，一致有界。 由$\boldsymbol{B}$的表达式，易知

$$\boldsymbol{B}^k(x)=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & b^{(k)}\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$$

其中 $b^{(k)}=b\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_2^j\cdot\lambda_1^{k-1-j}$。

当**Von Neuman**条件成立时, 存在常数$\boldsymbol{M}$，使 $\left|\lambda_2(x)\right|^k\le M$,所以

$$\left|b^{(k)}(x)\right|\le|b|\cdot M\sum_{j=0}^{\infty}\left|\lambda_2\right|^j$$

而$\boldsymbol{B}$的元素$b(x_p,\tau)$按模有界，又

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\lambda_2(x)\right|^j\le\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j 。$$

而 $\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j$是公比小于1的几何级数，该级数收敛。即存在常数$\boldsymbol{C}$，使

$$\left|b^{(k)}(x)\right|\le C$$

又$\left|\lambda_1(x)\right|^k$、$\left|\lambda_2(x)\right|^k$ 一致有界。因此，矩阵族

$$\{\boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{x}_p,\tau)\}，对0<\tau<\tau_0，k\tau\leqslant T，一切实数x_p,$$

一致有界。故定理成立 #

推论：若对于$0<\tau\leqslant\tau_0$及$0<x<l$, $G(x,\tau)$有界，且G的所有的特征值都位于单位圆内（可以有一个除外），即

$$\left|\lambda_1(x)\right|\leq 1+M\tau\,,\ \left|\lambda_i(x)\right|\leq\delta<1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

则**Von Neumann**条件是关于矩阵的$\|\cdot\|_2$稳定的充分必要条件。

例题：考虑一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

的五点差分格式

$$\frac{3}{2}\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-\frac{1}{2}\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}$$

的稳定性。

解：该格式是一个三层差分格式。令 $w_j^{k+1}=u_j^k$ ，可将其划为

$$\begin{cases} 3\left(u_j^{k+1}-u_j^k\right)-\left(u_j^k-w_j^k\right)=2r\left(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}\right) \\ w_j^{k+1}=u_j^k \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\tau/\boldsymbol{h}^2$ 。从而可写成

$$\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_{j-1}^{k+1} \\ w_{j-1}^{k+1} \end{bmatrix}+\begin{pmatrix} -4r-3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_j^{k+1} \\ w_j^{k+1} \end{bmatrix}+\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_{j+1}^{k+1} \\ w_{j+1}^{k+1} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_j^k \\ w_j^k \end{bmatrix}$$

设 $\boldsymbol{\omega}_j^k=\begin{pmatrix} u_j^k \\ w_j^k \end{pmatrix}$ ，则上式可写成

$$\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{k+1}+\begin{pmatrix} -4r-3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_j^{k+1}+\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_{j+1}^{k+1}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_j^k$$

令 $\omega_j^k = \tilde{\omega}^k e^{i\alpha x_j}$ ，代入上式得，

$$\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} e^{i\alpha(x_j - h)} + \begin{pmatrix} -4r-3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} e^{i\alpha x_j} + \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} e^{i\alpha(x_j + h)}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^k e^{i\alpha x_j}$$ ，消去公因子 $e^{i\alpha x_j}$ ，

$$\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} e^{-i\alpha h} + \begin{pmatrix} -4r-3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} + \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} e^{i\alpha h} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^k$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2re^{-i\alpha h} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4r-3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2re^{i\alpha h} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\omega}^{k+1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^k$$

$$\begin{pmatrix} 2r\left(e^{-i\alpha h} + e^{i\alpha h}\right) - 4r - 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^{k+1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}^k$$

$$\begin{pmatrix} -3-8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k+1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k}$$

于是

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k+1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}} & -\dfrac{1}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k}$$

因此得增长矩阵

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}} & -\dfrac{1}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G的特征值应满足方程

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0\,,\quad b = \frac{4}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}}\,,\quad c = -\frac{1}{3+8r\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}}\,,$$

欲使两个根按模不大于1且其中一根严格小于1, 应满足 $|b| \le 1 - c < 2$

显然上述不等式对于***r***>0均成立，, 即有$|\lambda_1| \le 1 + M\tau$，$|\lambda_2| \le \delta < 1$。

由schur定理，存在酉阵***U***，使得***G=U^H RU***，其中

,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b(x,\tau) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

由上述定理可知格式是绝对稳定。

§4　变系数抛物型方程

很多物理问题要用变系数抛物型方程来描述，当出现变系数时，处理方法与长系数大致相同，下面考虑几种不同的情况。

1．第一种形式　$$\frac{\partial u}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中$a(x)$是的连续函数。已知向前差分格式是

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a_j\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}$$

其中$a_j=a(x_j)$，其误差为　$O\left(\tau+h^2\right)$

2．第二种形式　$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中$a(x)$为可微的函数，则该式等价于

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial a(x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

差分格式为

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a_j\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+\left(a_x\right)_j\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2h}$$

其中 $a_x=\frac{\partial a(x)}{\partial x}$，其误差为 $O\left(\tau+h^2\right)$

3．第三种形式 $\frac{\partial u}{\partial t}=a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

因 $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

最终可得到差分格式

$$\frac{1}{ra_j^{k+\frac{1}{2}}}\left(u_j^{k+1}-u_j^k\right)=\frac{1}{2}\delta_x^2\left(1-\frac{1}{6ra_j^{k+\frac{1}{2}}}\right)u_j^{k+1}+\frac{1}{2}\delta_x^2\left(1+\frac{1}{6ra_j^{k+\frac{1}{2}}}\right)u_j^k$$

其中 $r=\frac{\tau}{h^2}$，其误差为 $O\left(\tau+h^2\right)$

现在考虑平面有界域G上的抛物方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla(a\nabla u)+f,\quad (x,y)\in G,\quad 0<t\le T, \tag{4.1}$$

其中a, f都是区域G上给定的光滑函数，$a=a(x,y)\geqslant\delta>0$。

初值条件为： $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$ （4.2）

边值条件之一为下列三种类型之一：

$$u\big|_\Gamma=\alpha(x,y)\quad\text{（第一边值条件）}\qquad (4.3)_1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\beta(x,y)\quad\text{（第二边值条件）}\qquad (4.3)_2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}+\kappa u\right|_\Gamma=\gamma(x,y)\quad\text{（第三边值条件）}\qquad (4.3)_3$$

其中$f(x,y)$, $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$及κ都是连续函数$\kappa>0$。

此二阶偏微分算子为：$\nabla(a\nabla u)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$

用积分插值法构造差分格式

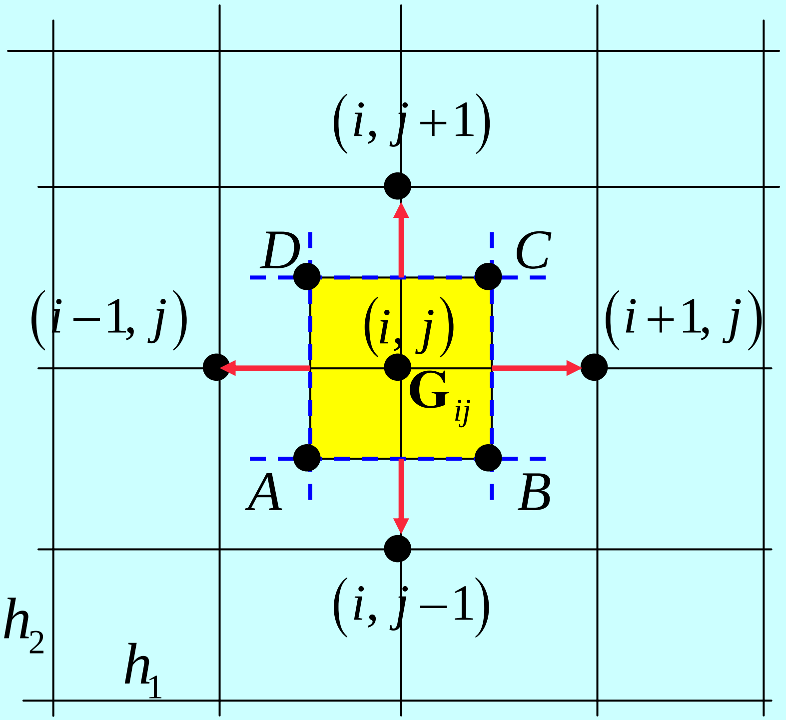
作对偶剖分：

（1）$x_{i-\frac{1}{2}}=\left(i-\frac{1}{2}\right)h_1,\ y_{j-\frac{1}{2}}=\left(j-\frac{1}{2}\right)h_2$

（2）作两组平行于坐标轴的直线

$$x=x_{i-\frac{1}{2}},\quad y=y_{j-\frac{1}{2}},$$

$$i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



那么对于任一正则内点(x_i,y_j)而言

$$A\left(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}}\right),\ B\left(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}}\right),\ C\left(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right),\ D\left(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right),$$

是对偶剖分网点，有它们所的区域记为$\mathbf{G}_{ij}$。

于$\mathbf{G}_{ij}$上积分抛物方程（4.1），并利用**Green**公式。

得到抛物方程（4. 1）的积分守恒形式,

$$\iint\limits_{\mathbf{G}_{ij}} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy = \int\limits_{\overline{ABCDA}} a \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, ds = \iint\limits_{\mathbf{G}_{ij}} f(x, y)\, dx\, dy$$

用中矩形公式代替沿四边的曲线积分，再用中心差商代替外法向导数，并除以h_1,h_2, 则有

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{h_1^2}\left[a_{i+\frac{1}{2},j}\left(u_{i+1,j} - u_{i,j}\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j} - u_{i-1,j}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{h_2^2}\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1} - u_{i,j}\right) - a_{i,j-\frac{1}{2}}\left(u_{i,j} - u_{i,j-1}\right)\right] + f_{ij} \qquad (4.4)$$

取时间步长$\tau>0$, 分别用向前和向后差商代替对t的偏导数，则得如下向前和向后差分格式：

$$u_{ij}^{k+1} = r_1\left[a_{i+\frac{1}{2},j}\left(u_{i+1,j}^{k} - u_{i,j}^{k}\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k} - u_{i-1,j}^{k}\right)\right] + \tag{4.5}$$

$$r_2\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1}^{k} - u_{i,j}^{k}\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k} - u_{i,j-1}^{k}\right)\right] + u_{i,j}^{k} + \tau f_{ij}$$

$$u_{ij}^{k+1} = r_1\left[a_{i+\frac{1}{2},j}\left(u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}\right)\right] + \tag{4.6}$$

$$r_2\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}\right)\right] + u_{i,j}^{k+1} + \tau f_{ij}$$

其中$r_1 = \dfrac{\tau}{h_1^2}$, $r_1 = \dfrac{\tau}{h_1^2}$，其截断误差均为$O\left(\tau + h^2\right)$。

如将向前和向后差分格式作算术平均，则得**Crank-Nicolson**格式其截断误差为$O\left(\tau^2 + h^2\right)$。

对于非正则内点(x_i, y_j)，仍有类似（4.4）的方程，例如设(x_i, y_j) 是形如第四章图5所示的非正则内点“0”，则

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\bar{h}_1}\left[a_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_1}\right) - \bar{a}_{i-\frac{1}{2},j}\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_{\bar{1}}}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{h_2^2}\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1}-u_{i,j}\right) - a_{i,j-\frac{1}{2}}\left(u_{i,j}-u_{i,j-1}\right)\right] + f_{ij} \qquad (4.7)$$

其中 $h_{\bar{1}}$ 是(x_i, y_j)与界点（$x_{i\text{-}1}, y_j$）的距离，$\bar{a}_{i-\frac{1}{2},j}$ 等于a在(x_i, y_j)和（$x_{i\text{-}1}, y_j$）之中间点的值，$\bar{h}_1 = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_{\bar{1}}\right)$。

逼近(4.7)的向前差分格式是

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{\tau}{\bar{h}_1 h_1} a_{i+\frac{1}{2},j}\left(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k\right) - \frac{\tau}{\bar{h}_1 h_{\bar{1}}}\bar{a}_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k\right) +$$

$$r_2\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k\right) - a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k\right)\right] + u_{i,j}^k + \tau f_{ij} \qquad (4.8)$$

逼近(4.7)的向后差分格式是

$$u_{ij}^{k+1}=\frac{\tau}{\bar{h}_1 h_1}a_{i+\frac{1}{2},j}\left(u_{i+1,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1}\right)-\frac{\tau}{\bar{h}_1 h_{\bar{1}}}\bar{a}_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k+1}-u_{i-1,j}^{k+1}\right)+$$

$$r_2\left[a_{i,j+\frac{1}{2}}\left(u_{i,j+1}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1}\right)-a_{i-\frac{1}{2},j}\left(u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j-1}^{k+1}\right)\right]+u_{i,j}^{k}+\tau f_{ij} \quad (4.9)$$

界点$(x_i, y_j)\in\Gamma_h$， 若给的是第一边值条件，则

$$u_{ij}^{k}=\alpha\left(x_i, y_j\right)。 \quad (4.10)$$

若给的是第二、三边值条件，则仍按第四章§3的积分插值法在(x_i, y_j)建立一补充方程。 例如设(x_i, y_j)形如第四章图6中的P_0，边值条件为$(4.3)_3$，则差分方程为（参看第四章(3.16)）

逼近(4.7)的向后差分格式是

$$\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{i,j}^{k}}{\tau}\Delta ABC=\frac{\overline{AB}}{h_2}\left(u_{i,j-1}^{k+l}-u_{i,j}^{k+l}\right)+\frac{\overline{BC}}{h_1}\left(u_{i+1,j}^{k+l}-u_{i,j}^{k+l}\right)+$$

$$\overline{CA}\left(v_{i,j}-\mu_{ij}u_{i,j}^{k+l}\right)+\Delta ABCf_{ij}\,,\quad l=0,1 \tag{4.11}$$

利用正则点、非正则点和界点上的三类方程，可组合成各种计算方案。考虑到非正则点附近的步长 $h_{\bar{1}}$, $\bar{h}_1$ 一般小于h_1，故通常采用向后差分格式，以免破坏正则点上的稳定性。

现在给出几种计算方案

（一）第一边值问题

方案(Ⅰ) 由(4.5)，(4.9)和(4.10)组成的显格式。

首先计算正则点，再计算非正则点，无需求解方程组。

（二）第二、三边值问题

方案(Ⅱ) 由(4.6)，(4.9)和(4.10)组成的隐格式。

（三）第二、三边值问题

方案(Ⅲ) 由(4.5)，(4.9)和(4.11)(l=1)组成的显格式。

首先计算正则点，再利用(4.11)(l=1)消去界点，最后计算非正则点，无需求解方程组。

方案(Ⅳ) 由(4.6)，(4.9)和(4.11)(l=1)组成的隐格式。

最后研究差分格式的稳定性和误差分析

为简便计算，在方案（Ⅰ）中用(4.8)代替(4.9)，并假定

$$h_{\bar{1}} = \bar{h}_1 = h,$$

也就是说在正则和非正则点均用向前差分格式(4.5)。设边值条件及右端项为齐次，将(4.5)改写为

$$u_{ij}^{k+1} = \left[1 - r_1\left(a_{i+\frac{1}{2},j} + a_{i-\frac{1}{2},j}\right) - r_2\left(a_{i,j+\frac{1}{2}} + a_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]u_{i,j}^{k} +$$

$$r_1 a_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}^{k} + r_1 a_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-1,j}^{k} + r_2 a_{i,j+\frac{1}{2}} u_{i,j+1}^{k} + r_2 a_{i,j-\frac{1}{2}} u_{i,j-1}^{k} \qquad (4.12)$$

定义最大模

$$\|U\|_{\infty} = \max_{G_h} |u_{ij}|,$$

其中U是以u_{ij}为分量的向量。 设网比r_1, r_2满足条件

$$1 - r_1\left(a_{i+\frac{1}{2},j} + a_{i-\frac{1}{2},j}\right) - r_2\left(a_{i,j+\frac{1}{2}} + a_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \geq 0$$

或

$$r_1 + r_2 \le \frac{1}{2\max\limits_{G} a(x,\, y)}, \tag{4.13}$$

则由（4.12）得

$$\max_{G_h}\left|u_{ij}^{k+1}\right| \le \left[1 - r_1\left(a_{i+\frac{1}{2},j} + a_{i-\frac{1}{2},j}\right) - r_2\left(a_{i,j+\frac{1}{2}} + a_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]\max_{G_h}\left|u_{ij}^{k}\right|$$

$$+\left(r_1 a_{i+\frac{1}{2},j} + r_1 a_{i-\frac{1}{2},j} + r_2 a_{i,j+\frac{1}{2}} + r_2 a_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\max_{G_h}\left|u_{ij}^{k}\right|$$

即

$$\left\|\boldsymbol{U}^{k+1}\right\|_\infty \le \left\|\boldsymbol{U}^{k}\right\|_\infty \le \cdots \le \left\|\boldsymbol{U}^{0}\right\|_\infty$$

足见（4.12）稳定。

以 $e_{ij}^k = u(x_i, y_j, t_k) - u_{ij}^k$ 表示差分解的误差；

$R_{ij}^k(u)$ 表示差分格式的截断误差； 则 e_{ij}^k 满足

$$e_{ij}^{k+1} = \left[1 - r_1\left(a_{i+\frac{1}{2},j} + a_{i-\frac{1}{2},j}\right) - r_2\left(a_{i,j+\frac{1}{2}} + a_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]e_{i,j}^k +$$

$$r_1 a_{i+\frac{1}{2},j} e_{i+1,j}^k + r_1 a_{i-\frac{1}{2},j} e_{i-1,j}^k + r_2 a_{i,j+\frac{1}{2}} e_{i,j+1}^k + r_2 a_{i,j-\frac{1}{2}} e_{i,j-1}^k + \tau R_{ij}^k(u)$$

设稳定性条件(4.13)成立，又 $\left|R_{ij}^{k}\right| \le K\left(\tau+h^{2}\right)$ 则

$$\left\|\boldsymbol{E}^{k+1}\right\|_{\infty} \le \left\|\boldsymbol{E}^{k}\right\|_{\infty} + K\tau\left(\tau+h^{2}\right)$$

$\boldsymbol{E}^{k}=\left(e_{1}^{k}, e_{2}^{k}, \cdots, e_{N-1}^{k}\right)^{T}$,将上述不等式就k($k\tau\leqslant T$)相加，得

$$\left\|\boldsymbol{E}^{k}\right\|_{\infty} \le \left\|\boldsymbol{E}^{0}\right\|_{\infty} + KT\left(\tau+h^{2}\right) \quad 0<k\tau \le T 。$$

其次讨论方案(II)(隐格式)的稳定性。为简便计算，仍假定

$$h_{\bar{1}}=\bar{h}_{1}=h,$$

也就是说在正则和非正则点均用向后差分格式(4.6)。设边值条件及右端项为齐次，将(4.6)改写为

$$\left[1+r_{1}a_{i+\frac{1}{2},j}+ra_{i-\frac{1}{2},j}+r_{2}a_{i,j+\frac{1}{2}}+r_{2}a_{i,j-\frac{1}{2}}\right]u_{i,j}^{k+1}$$

$$-r_{1}a_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}^{k}-r_{1}a_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-1,j}^{k}-r_{2}a_{i,j+\frac{1}{2}}u_{i,j+1}^{k}-r_{2}a_{i,j-\frac{1}{2}}u_{i,j-1}^{k}=u_{ij}^{k}$$

显然(4.15)满足第四章§5习题2(该题的二维情形)的条件，因此

$$\left\|\boldsymbol{U}^{k+1}\right\|_\infty \le \left\|\boldsymbol{U}^{k}\right\|_\infty \le \cdots \le \left\|\boldsymbol{U}^{0}\right\|_\infty$$

即(4.15)稳定。

若将上述方法用于与(4.6)相应的差分方程，则得误差估计稳定。

$$\left\|\boldsymbol{E}^{k}\right\|_\infty \le \left\|\boldsymbol{E}^{0}\right\|_\infty + K\tau\left(\tau + h^2\right) \qquad \blacksquare$$

考虑二维热传导方程的边值问题：

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x, y < l, \quad 0 < t \le T \\ u(x, y,\ 0) = \varphi(x, y), 0 \le x, y \le l \\ u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l, t) = 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

求解上述问题的向前差分格式的稳定的充要条件为 $r = \dfrac{\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{4}$
向后差分格式仍为无条件稳定。由于稳定条件的限制，当采用显格式时，时间步长τ得取得更小（与一维情形相比），计算量显著增加。在多维情形，上述情形更为突出。

当采用隐格式时，其对应的系数矩阵不再是三对角的，在二维情形是五对角的，在n维情形是$2n+1$对角的，而系数矩阵的阶为$(N+1)^n$

N=1/h。此时，追赶法便不能应用，即使采用各种最佳迭代格式，其计算量也大大高于显格式。因此，隐格式在n维情形下并不比显格式优越。这样，在多维情形，通常的显、隐格式都不方便。

下面介绍的所谓交替方向隐格式（以下简写为ADI格式）及其它相关的格式，就是一种即是无条件稳定又可用追赶法求解的格式。在构造差分格式的方法以及格式的稳定性、收敛性的研究中，当空间变量的格数增加时，并不增加性的困难。 然而，差分格式的实际求解差别甚大。多个空间变量情形的隐格式，其计算量较显格式有实质性增加，因为对隐格式来说，每个时间层需要解一个多维椭圆形差分方程组。

§5 分数步长

本节主要介绍各种分数步长，交替方向隐式方法（**Alternating direct implicit method, ADI**）、预校方法（**Prcditor-Corrector method**）和局部一维法（**Locally one dimensional method LOD**）

5.1 ADI法

考虑模型问题（5.1）我们有向后差分格式

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{u_{j+1k}^{n+1}-2u_{jk}^{n+1}+u_{j-1k}^{n+1}}{h^2}+\frac{u_{jk+1}^{n+1}-2u_{jk}^{n+1}+u_{jk-1}^{n+1}}{h^2}$$

令 $r=\frac{\tau}{h^2}$ ，进一步有，

$$-ru_{j+1,k}^{n+1}-ru_{j-1,k}^{n+1}\left(1+4r\right)u_{j,k}^{n+1}-ru_{j,k+1}^{n+1}-ru_{j,k-1}^{n+1}=u_{j,k}^{n}$$

$$j,k=1,2,\cdots,N-1$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}^{n}\quad n=0,1,\cdots,M-1$$

若取 $\boldsymbol{u}^{n}=\left(u_{11}^{n},u_{21}^{n},u_{12}^{n},u_{22}^{n}\right)^{T}\quad n=0,1,\cdots,M-1$，这方程组的系数矩阵为五对角矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+4r & -r & -r & 0\\ -r & 1+4r & 0 & -r\\ -r & 0 & 1+4r & -r\\ 0 & -r & -r & 1+4r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{B}} & -r\boldsymbol{I}\\ -r\boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{B}}\end{pmatrix}\quad \tilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1+4r & -r\\ -r & 1+4r\end{pmatrix}$$

交替方向隐式方法（**ADI**）是**Peaceman**和**Rachford**（1955）提出的，他们把第n层到第$n+1$层计算分成两步：

引入过渡层$n+\frac{1}{2}$，先由第n层到$n+\frac{1}{2}$层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$用向后差分逼近，再由过渡层$n+\frac{1}{2}$，到第$n+1$层，对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$用向前差分逼近，于是得到如下的**ADI**格式：

$$\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{j+1k}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{j-1k}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{jk+1}^{n}-2u_{jk}^{n}+u_{jk-1}^{n}}{h^2} \qquad (5.2)_a$$

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{j+1k}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{j-1k}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{jk+1}^{n+1}-2u_{jk}^{n+1}+u_{jk-1}^{n+1}}{h^2} \qquad (5.2)_b$$

其中$j,k=1,2,\cdots,N-1$，$n=0,1,\cdots,M-1$，上标$n+\frac{1}{2}$表示在$t=t_{n+\frac{1}{2}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$取值。

假定第n层的u_{jk}^{n}已经求得, 则由(5. 2)$_a$求出$u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$,这只需要按行$(j=1,2,\cdots,N-1)$解一些具三对角系数矩阵的方程组;

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{w}^n \quad n=0,1,\cdots,M-1 \text{ ，其中 } \boldsymbol{w}^n=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}^n$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r \end{pmatrix}$$

再由(5. 2)$_b$求出u_{jk}^{n+1} 这只需要按列 $(k=1,2,\cdots,N-1)$
解一些具三对角系数矩阵的方程组：

$$\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{w}^{n+\frac{1}{2}}\quad n=0,1,\cdots,M-1\text{，其中}\quad \boldsymbol{w}^{n+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r \end{pmatrix}$$

此计算可用追赶法实现。可以容易的估计出**ADI**格式的截断误差为：

$$O\left(\tau^2+h^2\right)$$

现在估计截断误差的阶。将(5.2)$_a$，(5.2)$_b$相加、相减，依次得

$$\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{2}{h^2}\delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{h^2}\delta_y^2\left(u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{jk}^{n}\right)$$

$$4u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}=2\left(u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^{n}\right)-\frac{\tau}{h^2}\delta_y^2\left(u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}\right)$$

消去过渡层 $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$， 则

$$\left(I+\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{h^4}\delta_x^2\delta_y^2\right)\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\frac{u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^{n}}{2} \qquad (5.3)$$

以 $\bar{u}_{jk}^{n}$,表示精确解在节点(x_j, y_k, t_n)的值$u(x_j, y_k, t_n)$，利用**Taylor**展开，易见

$$\left(I+\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{h^4}\delta_x^2\delta_y^2\right)\frac{\bar{u}_{jk}^{n+1}-\bar{u}_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\frac{\bar{u}_{jk}^{n+1}+\bar{u}_{jk}^{n}}{2}+O\left(\tau^2+h^2\right) \qquad (5.4)$$

与(5.4)比较，可见截断误差的阶为：$O\left(\tau^2+h^2\right)$

下面我们检验**ADI**格式的稳定性，为此我们将其改写为：

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}=\left(I+\frac{r}{2}\delta_x^2\right)u_{jk}^{n} \qquad \left(r=\frac{\tau}{h^2}\right)$$

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n+1}=\left(I+\frac{r}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \qquad \left(r=\frac{\tau}{h^2}\right)$$

以I表示恒等算子，注意，$-\delta_x^2$ 和 $-\delta_y^2$ 都是正定算子，故以上两个等式左端的差分算子是可逆的。消去过渡层，即得

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I-\frac{r}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n+1}=\left(I+\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I+\frac{r}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n} \tag{5.5}$$

这是(5.3)的一个等价形式。由**Fouier**方法，取 $u_{jk}^n=v^n e^{i(\alpha x_j+\beta y_k)}$ 代入（5.5），得

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I-\frac{r}{2}\delta_y^2\right)v^{n+1}e^{i(\alpha x_j+\beta y_k)}=\left(I+\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I+\frac{r}{2}\delta_y^2\right)v^{n}e^{i(\alpha x_j+\beta y_k)}$$

$$\left[\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)e^{i\alpha x_j}\left(I-\frac{r}{2}\delta_y^2\right)e^{i\beta y_k}\right]v^{n+1}=\left[\left(I+\frac{r}{2}\delta_x^2\right)e^{i\alpha x_j}\left(I+\frac{r}{2}\delta_y^2\right)e^{i\beta y_k}\right]v^{n}$$

消去公共因子 $e^{i(\alpha x_j+\beta y_k)}$ ，得到增长因子

$$G(\alpha h, \beta h)=\frac{\left(1-2r\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)\left(1-2r\sin^2\frac{\beta h}{2}\right)}{\left(1+2r\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)\left(1+2r\sin^2\frac{\beta h}{2}\right)}$$

显然，对任何 $r>0$， $|G|\leqslant 1$，故**ADI**格式是绝对稳定。

总之，在计算量、截断误差的阶和稳定性方面，**ADI**算法都是令人满意的，因此受到人们的普遍注意。

对于三维的模型问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

如下的**ADI**格式：

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\frac{u_{jkm}^{n+\frac{1}{3}}-u_{jkm}^{n}}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2\right)u_{jkm}^{n} \qquad (5.9)_a$$

$$\frac{u_{jkm}^{n+\frac{2}{3}}-u_{jkm}^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{h^2}\delta_y^2\left(u_{jkm}^{n+\frac{2}{3}}-u_{jkm}^{n}\right) \qquad (5.9)_b$$

$$\frac{u_{jkm}^{n+1}-u_{jkm}^{n+\frac{2}{3}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{h^2}\delta_x^2\left(u_{jkm}^{n+1}-u_{jkm}^{n}\right) \qquad (5.9)_c$$

它是由格式：

$$\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\left(I-\frac{r}{2}\delta_x^2\right)\frac{u_{jkm}^{n+1}-u_{jkm}^{n}}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2\right)u_{jkm}^{n}$$

按(5.9)$_b$和引进过度值得出的。容易验证格式是绝对稳定，其截断误差为 $O\left(\tau^2+h^2\right)$。第n层到第$n+1$层计算分成三步，每一步只需要沿一个坐标方向解一些具三对角系数矩阵的方程组。

5.2 预-校格式

$$\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{4}}-u_{jk}^{n}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{j+1k}^{n+\frac{1}{4}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{4}}+u_{j-1k}^{n+\frac{1}{4}}}{h^2} \qquad (5.13)_a$$

$$\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n+\frac{1}{4}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{u_{jk+1}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{jk-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} \qquad (5.13)_b$$

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{u_{j+1k}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{j-1k}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2}+\frac{u_{jk+1}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{jk-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} \qquad (5.14)$$

上述预-校格式是由Yanenko建立的. 格式是绝对稳定,其截断误差为

$$O\left(\tau^2+h^2\right)$$

5.3 局部一维法（LOD法）

如果用Crank-Nicolson格式直接代替“向后差分格式”(5.13)，则得到更简单的所谓LOD格式：

$$\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{1}{2h^2}\delta_x^2\left(u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{jk}^{n}\right) \qquad (5.15)_a$$

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}=\frac{1}{2h^2}\delta_y^2\left(u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}\right) \qquad (5.15)_b$$

消去过渡层注意$-\delta_x^2$ 和 $-\delta_y^2$ 可换序，又得到(5.6)。可见LOD格式(5.15)是绝对稳定，其截断误差为 $O\left(\tau^2+h^2\right)$

(5.15)可写成如下的更对称的所谓双循环局部一维格式。局部一维格式可直接推广到任意维问题。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{u_{jk}^{n-\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n-1}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2}\delta_x^2\left(u_{jk}^{n-\frac{1}{2}}+u_{jk}^{n-1}\right)\\
\frac{u_{jk}^{n}-u_{jk}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2}\delta_y^2\left(u_{jk}^{n}+u_{jk}^{n-\frac{1}{2}}\right)\\
\frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2}\delta_y^2\left(u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+u_{jk}^{n}\right)\\
\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2h^2}\delta_x^2\left(u_{jk}^{n+1}+u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
\right. \qquad (5.16)
$$

定理 若对任意$G(x_p,\tau)$与一个对称矩阵以$\|H\|$和$\|H^{-1}\|$一致有界的方式相似（H为相似变换），则Von Neumann条件也是关于矩阵2-范数稳定的充分条件。

证明：假如G与Q相似，则G和Q有相同的特征值，所以有相同的谱半径，即$\rho(G)=\rho(Q)$，又

$$G^k=\left(HQH^{-1}\right)^k=HQ^kH^{-1}$$

及Von Neumann条件成立， 于是

$$\begin{aligned}\left\|G^k\right\|_2 &\le \left\|H\right\|_2\cdot\left\|Q^k\right\|_2\cdot\left\|H^{-1}\right\|_2 = \left\|H\right\|_2\cdot\rho^k(Q)\cdot\left\|H^{-1}\right\|_2\\ &\le e^{TM}\left\|H\right\|_2\cdot\left\|H^{-1}\right\|_2\le M\end{aligned}$$

因此，格式稳定。

#

课堂练习题

定理 若$\rho(G)<1$, 则Von Neumann条件也是关于矩阵2-范数稳定的充分条件。

证明：由于$\rho(G)<1$, 则存在G的某种从属矩阵范数$\|\cdot\|_s$, 使得$\|G\|_s<1$，从而$\rho(G)\leqslant\|G\|_s<1$， 于是

$$\rho\left(\mathbf{G}^k\right)\leq\left\|\mathbf{G}^k\right\|_s\leq\|\mathbf{G}\|_s^k<1$$

即 $\left\|G^k\right\|_s<1$。再利用，矩阵范数的等价性，存在某种正常数M，有

$$\left\|\mathbf{Q}^k\right\|_2\leq M\left\|\mathbf{Q}^k\right\|_s\leq K$$

因此，格式稳定。 #

THE END