文章编号:1001-5132（2008）03-0358-06

关于不完全 r-自正交拉丁方的存在性

余　伟，徐允庆

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：如果 2 个 n 阶不完全拉丁方重叠后正好产生 r 个不同的有序对，则称它们是 r -正交的，记作 r -IMOLS (n,u)，其中 u 为缺少的子拉丁方的阶数. 进一步，如果第 2 个拉丁方是第 1 个拉丁方的转置，则称它们是 r -自正交的，记作 r -ISOLS (n,u). 本文给出当 $u\in\{1,2,3,4\}$ 时，r -ISOLS $(4m+u,u)$ 的存在性.

关键词：r -自正交；拉丁方；截态

中图分类号：O157.2　　　　文献标识码：A

2 个 n 阶拉丁方，$L=(l_{ij})$ 和 $M=(m_{ij})$，称为 r -正交的，如果它们重叠后正好产生 r 个有序对，即

$$|\{(l_{ij},m_{ij}):0\le i,\ j\le n-1\}|=r.$$

Belyavskaya[1-3]最先系统地考虑了如下问题：对于哪些整数 n 和 r，n 阶 r -正交拉丁方是存在的？显然 $n\le r\le n^2$，而且容易确定 $r\notin\{n+1,n^2-1\}$. 在文献[4-6]中，这个问题已经被完全解决，最终结果如定理 1.

定理 1[6]　对于任意整数 $n\ge 2$，存在 n 阶 r -正交拉丁方当且仅当 $n\le r\le n^2$，且 $r\{n+1,n^2-1\}$，除表 1 中的 n 和 r 值例外.

在一对 n 阶 r -正交拉丁方中，如果第 2 个拉丁方是第 1 个拉丁方的转置，则称他们是 r -自正交的，记作 r -SOLS (n). 对于此问题，已有定理 2.

表 1　r -MOLS(n)

阶数 n	例外的 r 值
2	4
3	5，6，7
4	7，10，11，13，14
5	8，9，20，22，23
6	36，33

定理 2[7]　对任意整数 $n\ge 2$，存在 r -SOLS (n) 当且仅当 $n\le r\le n^2$，且 $r\notin\{n+1,n^2-1\}$. 除表 2 中的 n 和 r 值例外或可能例外.

本文给出一些关于 r -ISOLS (n,u) 的存在性问题的结果. 设 L 是元素基于有限集 S 上的拉丁方，L 的截态 T 是指由 $|S|$ 个来自拉丁方不同行不同列的位置组成，且 S 中的每个元素在各个位置中恰好出现 1 次. 若 $(i,j)\in T$ 当且仅当 $(i,j)\in T$，称截态 T 是对称的；若截态之间没有公共位置，则称他们是不相交的，DOP 集是指 2 个拉丁方重叠后产生的互不相同的有序对的集合.

1　定理及引理

定理 3[8]　若 n 和 u 的值满足 $n\ge 3u+1$，那么 ISOLS (n,u) 存在，除 $(n,u)=(6,1),(8,2)$ 例外以及

收稿日期：2007-04-23.　　　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：浙江省自然科学基金（Y607026）；宁波市自然科学基金（2006A610094）.
第一作者：余　伟（1982－），男，浙江杭州人，在读硕士研究生，主要研究方向：组合数学. E-mail: yw1234www@sina.com

表 2　r -SOLS(n)

阶数 n	例外的 r 值	可能例外的 r 值
2	4	
3	5，6，7，9	
4	6，7，8，10，11，12，13，14	
5	8，9，12，16，18，20，22，23	
6	32，33，34，36	
7	46	
12，13，14，15		v^2-5，v^2-4，v^2-3
16，17，18，20		v^2-5，v^2-3
19，21，22，23，24，26		v^2-3

$n=3u+2, u\in\{6,8,10\}$. 可能例外.

定理 **4**[9] 假如整数 $m\ge 6$，则存在基于有限集 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 $((m+1)^2-3)$ -ISOLS $(m+1,1), L$，其中有序对 (x,x) 不出现在 DOP 集中.

定理 **5**[9] 假如整数 $m\ge 5$，则存在基于有限集 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 $((m+1)^2-8)$ -ISOLS $(m+1,1), L$，其中有序对 (x,x) 不出现在 DOP 集中.

定理 **6**[9] 假如整数 $m\ne 1,2,5$，则存在基于有限集 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 $((m+1)^2-1)$ -ISOLS $(m+1,1), L$，其中有序对 (x,x) 不出现在 DOP 集中.

定理 **7**[9] 假如整数 $m\ge 7$，那么对于 $r\in\{m+2, m+3\}$，基于 Z_m 上的 r -SOLS (m) 存在，其中的 DOP 集记为 P，进一步基于 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 $(r+1)$ -ISOLS $(m+1,1)$ 存在，其中 DOP 集为 $P\cup\{(x,x)\}$，这里 $|P|=r$.

定理 **8**[9] 对于每个正整数 m，基于 Z_m 上的 m-SOLS (m) 存在，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}$；进一步基于 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 $(m+1)$ -ISOLS $(m+1,1)$ 存在，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le n-1\}\cup\{(x,x)\}$.

定理 **9**[9] 若整数 $m\ge 7$ 且 $r\in[m,m^2]\setminus\{m+1, m^2-1\}$. 那么基于 Z_m 上的 r -MOLS (m) 存在，其 DOP 集包含 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}$ 中的每个有序对.

引理 **1** 若 $m\ge 4$，则基于 $Z_m\cup\{x,y\}$ 上的 $(m+2)$ -ISOLS $(m+2,2)$ 存在，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}\cup\{(x,x),(y,y)\}$.

证明　(1)当 $m=2k,(k\ge 1)$ 是偶数时，由定理 8 可知，基于 $Z_k\cup\{x\}$ 上的 $(k+1)$ -ISOLS $(k+1,1)$ 存在，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le k-1\}\cup\{(x,x)\}$. 用 SOLS(2)对其的每一个元素位置膨胀，即可得到：$(2k+2)$ -ISOLS $(2k+2,2)$，将其中的元素置换后可以得到：$(m+2)$ -ISOLS $(m+2,2)$ 存在，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}\cup\{(x,x),(y,y)\}$.

(2) 当 $m\ge 3$ 且为奇数，我们构造一个基于 Z_m 上的对称的 m 阶拉丁方 $L(m)=(l_{ij})$ 如下：$l_{ij}=[i+j \mod m]$. 其中 $T_0=\{(i,i+1):0\le i\le m-1\}$ 和 $T_0=\{(i,i+1):0\le i\le m-1\}$是 2 个成对的截态(其中的 $i+1$ 要模 m)；用元素 x 替换 T_0 中的所有元素，把 T_0 中的元素移至拉丁方的右侧和下侧，用元素 y 替换 T_1 中所有元素，把 T_1 中的元素移至拉丁方的右侧和下侧，于是得到 $(m+2)$ -ISOLS $(m+2,2)$，DOP 集为 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}\cup\{(x,x),(y,y)\}$. 证毕.

引理 **2** 若整数 $m\ge 6$ 且基于 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 r -IMOLS $(m+1,1)$ 存在，其中 DOP 集包含 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}$ 中的每一个有序对.

证明　由定理 9 可知：基于 $Z_m\cup\{x\}$ 上的 r_1 -MOLS $(m+1)$ 存在且其 DOP 集包含 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}\cup\{(x,x)\}$ 中的每一个有序对. 而 r -IMOLS $(m+1,1)$ 的 DOP 集与 r_1 -IMOLS $(m+1)$ 存在且其 DOP 集相比最多缺少一个 (x,x)，所以 r -IMOLS $(m+1,1)$ 的 DOP 集包含 $\{(i,i):0\le i\le$

$m-1\}$ 中的每一个有序对. 证毕.

2 主要结果

引理 3 设 $n \ge 28, m=[n/4]$，当 $r\in[4m+k, m+3m^2]\setminus\{4m+k+1\}$，则 r-ISOLS$(4m+k,k)$ 存在，其中 $k=1,2,3$.

0	1	2	3
2	3	0	1
1	0	3	2
3	2	1	0

图 1 4-SOLS(40)

0	2	3	1
3	1	0	2
1	3	2	0
2	0	1	3

图 2 16-SOLS(4)

证明 图 1 为 4-SOLS(4)，DOP 集为 $\{(0,0),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. 而且有 4 个不相交的截态如下：$T_0=\{(0,0),(1,1),(2,3),(3,2)\}, T_1=\{(0,1),(1,0),(2,2),(3,3)\}, T_2=\{(0,2),(1,3),(2,1),(3,0)\}, T_3=\{(0,3),(1,2),(2,0),(3,1)\}$. 其中 T_0 和 T_1 是对称的，T_2 和 T_3 是一对截态. 下面构造 r-ISOLS$(4m+k,k)(1\le k\le 3)$.

注意到 4-SOLS(4)的 DOP 集 $\{(0,0),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ 中的 4 个不同的有序对各重复出现 4 次，对于有序对 $(0,0)$ 和 $(3,3)$，我们用 t-SOLS(m) 或 t'-ISOLS$(m+1,1)$ (设 DOP 集记为 Q)对每个有序对膨胀，而对于另外与之重复的有序对，用 t_1-SOLS(m) 或 t'_1-ISOLS$(m+1,1)$ (DOP 集记为 P，且 $P\subseteq Q$)对它们进行膨胀. 对于有序对 $(1,2)$ 和 $(2,1)$，我们用 r_1-MOLS(m) 对它们进行膨胀，其中的 DOP 集包含了 $P=\{(i,i):0\le i\le n-1\}$ 中的每一个有序对，用 m-SOLS(m) (DOP 集为 P)或 $(m+1)$-ISLOS$(m+1,1)$ (DOP 集为 $P\cup\{(x,x)\}$)对另外与之重复的有序对进行膨胀. 这些输入设计来自定理 7～9.

下面给出具体的构造方法：假设 $k_1,k_2,s_0,s_{10},s_{11},s_{12},r_1$ 满足下列条件：

(a) $k_1,k_2\in\{0,1\}$；

(b) $s_0\in\{0,2,3\}$；

(c) $s_{10}\in\{0,2,3,m^2-m\}$；

(d) $s_{11}=s_{12}=s_{10}$，当 $s_{10}\in\{0,2,3\}$；

(e) $s_{11}=(m+k_1)^2-(m+k_1)-k_1, s_{12}=(m+k_2)^2-(m+k_2)-k_2$，当 $s_{10}=m^2-m$；

(f) $r_1\in[m,m^2]\setminus\{m+1,m^2-1\}$.

第 1 步：在 T_0 中，用定理 7 和定理 8 中的 $(m+s_0)$-SOLS(m) 对 0 所在的位置膨胀；用定理 6～8 中的 $(m+s_{10})$-SOLS(m) 对 3 所在位置膨胀；用 r_1-MOLS(m) 的一个拉丁方对 1 所在位置膨胀，另一个拉丁方的转置对 2 所在的位置膨胀. 其中 r_1-MOLS(m) 的 DOP 集包含了 $\{(i,i):0\le i\le n-1\}$ 中的所有有序对.

第 2 步：在 T_1 中，用定理 7 和定理 8 中的 $(m+k_1+s_0)$-ISOLS$(m+k_1,k_1)$ 对 0 所在的位置膨胀；用定理 6～8 中的 $(m+k_1+s_{11})$-ISOLS$(m+k_1,k_1)$ 对 3 所在位置膨胀；用定理 8 中的 $(m+k_1)$-ISOLS$(m+k_1,k_1)$ 对 1 和 2 所在位置膨胀.

第 3 步：在 T_2 和 T_3 中，用定理 7 和定理 8 中的 $(m+k_2+s_0)$-ISOLS$(m+k_2,k_2)$ 对 0 所在的 2 个位置膨胀；用定理 6～8 中的 $(m+k_2+s_{12})$-ISOLS$(m+k_2,k_2)$ 对 3 所在的 2 个位置膨胀；用定理 8 中的 $(m+k_2)$-ISOLS$(m+k_2,k_2)$ 对 1 和 2 所在的 4 个位置膨胀.

经上述步骤后，得到 r-ISOLS$(4m+k,k)$，其中 $r=2r_1+2m+s_0+s_1+k, s_1=\max\{s_{11}+k_1,s_{12}+k_2\}, k=k_1+2k_2$.

情形 1：$k_1=1,k_2=0$，得到 r-ISOLS$(4m+1,1)$，$r=2r_1+2m+1+s_0+s_{11}+s$，

$$s=\begin{cases}0, & \text{当 } s_{11}\in\{0,2,3\},\\ 1, & \text{当 } s_{11}=(m+1)^2-(m+1)-1.\end{cases}$$

计算后可以得到：$r\in[4m+1,m+3m^2+1]\setminus\{4m+2\}$.

情形 2：$k_1=0,k_2=1$，得到 r-ISOLS$(4m+2,2)$，$r=2r_1+2m+s_0+1+s_{12}+s+1$，

$$s=\begin{cases}0, & \text{当 } s_{12}\in\{0,2,3\},\\ 1, & \text{当 } s_{12}=(m+1)^2-(m+1)-1.\end{cases}$$

计算后可以得到：$r\in[4m+2, m+3m^2+2]\setminus\{4m+3\}$.

情形 3：$k_1=k_2=1$，得到 r-ISOLS$(4m+3,3)$, $r=2r_1+2m+s_0+1+s_{11}+s+1+1$，

$$s=\begin{cases}0, & \text{当 } s_{11}\in\{0,2,3\},\\ 1, & \text{当 } s_{11}=(m+1)^2-(m+1)-1.\end{cases}$$

计算后可以得到：$r\in[4m+3, m+3m^2+3]\setminus\{4m+4\}$，证毕.

引理 **4**　假如整数 $n\geq 28$ 且 $m=\lfloor n/4\rfloor$. 当 $r\in[16m+5,(4m+k)^2-k^2]\setminus\{(4m+k)^2-k^2-5,(4m+k)^2-k^2-3,(4m+k)^2-k^2-1\}$，则 r-ISOLS$(4m+k,k)$ 存在，其中 $k=1,2,3$.

证明　图 2 为 SOLS(4)(16-SOLS(4))，DOP 集中的每个有序对出现且仅出现 1 次；其中有 4 个不相交的对称截态：$T_0=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $T_1=\{(0,1),(1,0),(2,3),(3,2)\}$, $T_2=\{(0,2),(1,3),(2,0),(3,1)\}$, $T_3=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

构造 r-ISOLS$(4m+k,k)$ 如下：

在前 3 个截态 T_0, T_1 和 T_2 中，用 r'-ISOLS$(m+k_i,k_i)$ ($k_i\in\{0,1\}$)对每个位置及其对称位置膨胀，在第 4 个截态 T_3 中，用 r'-MOLS(m) 对每个位置及其对称位置进行膨胀. 具体的构造如下：设 k_0,k_1,k_2, $s_i(0\leq i\leq 7), r_1, r_2$ 满足下列条件：

(a) $k_i\in\{0,1\}, 0\leq i\leq 2$；

(b) $s_i\in\{0,2,3,(m+k_0)^2-(m+k_0)-7-k_0,(m+k_0)^2-(m+k_0)-2-k_0,(m+k_0)^2-(m+k_0)-k_0\}, 0\leq i\leq 3$；

(c) $s_i\in\{0,(m+k_1)^2-(m+k_1)-k_1\}, 4\leq i\leq 5$；

(d) $s_i\in\{0,(m+k_2)^2-(m+k_2)-k_2\}, 6\leq i\leq 7$；

(e) $r_i\in[m,m^2]\setminus\{m+1,m^2-1\}, 1\leq i\leq 2$.

第 1 步：在 T_0 中，用定理 2 及定理 4～8 中的 $(m+k_0+s_i)$-ISOLS$(m+k_0,k_0)$ 对 $i(0\leq i\leq 3)$ 所在的位置膨胀.

第 2 步：在 T_1 中，用定理 6 和定理 8 中的 $(m+k_1+s_4)$-ISOLS$(m+k_1,k_1)$ 对 0 和 1 所在的位置膨胀；用 $(m+k_1+s_5)$-ISOLS$(m+k_1,k_1)$ 对 2 和 3 所在位置膨胀.

第 3 步：在 T_2 中，用定理 6 和定理 8 中的 $(m+k_2+s_6)$-ISOLS$(m+k_2,k_2)$ 对 0 和 2 所在的位置膨胀；用 $(m+k_2+s_7)$-ISOLS$(m+k_2,k_2)$ 对 1 和 3 所在位置膨胀.

第 4 步：在 T_3 中，用定理 9 中的 r_1-MOLS(m) 的一个拉丁方对 0 所在的位置膨胀，另一个拉丁方的转置对 3 所在的位置膨胀；用 r_2-MOLS(m) 的一个拉丁方对 1 所在的位置膨胀，另一个拉丁方的转置对 2 所在的位置膨胀.

在第 1～3 步中，对同一个截态膨胀的不完全拉丁方具有相同的洞集，而对不同的截态膨胀的不完全拉丁方有不同的洞集.

对于输入设计 $(m+1+s_i)$-ISOLS$(m+1,1)$，其 DOP 集记为 Q，由定理 4～8 可知：如果其洞集为 $\{x\}$，那么当 $s_i\in\{0,2,3\}$ 时，有序对 $(x,x)\in Q$；当 $s_i\in\{(m+1)^2-(m+1)-8,(m+1)^2-(m+1)-3,(m+1)^2-(m+1)-1\}$ 时，$(x,x)\notin Q$.

因此，经上述步骤后得到 r-ISOLS$(4m+k,k)$, $k=k_0+k_1+k_2$, $r=2(r_1+r_2)+12m+\sum_{i=0}^{3}(s_i+k_0\times\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=4}^{5}(s_i+k_1\times\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=6}^{7}(s_i+k_2\times\mathrm{sig}(s_i))+\sum_{j=0}^{2}k_j\times\mathrm{sig}(T_j)$，其中：

$$\mathrm{sig}(s_i)=\begin{cases}0, & s_i\in\{0,2,3\}, 0\leq i\leq 7,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\mathrm{sig}(T_0)=\begin{cases}0, & \sum_{i=0}^{3}\mathrm{sig}(s_i)=4,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\mathrm{sig}(T_1)=\begin{cases}0, & \sum_{i=4}^{5}\mathrm{sig}(s_i)=2,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\mathrm{sig}(T_2)=\begin{cases}0, & \sum_{i=6}^{7}\mathrm{sig}(s_i)=2,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

情形 1：$k_0=1, k_1=k_2=0$，得到 r-ISOLS$(4m+1)$, $r=2(r_1+r_2)+12m+\sum_{i=0}^{3}(s_i+\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=4}^{7}s_i+\mathrm{sig}(T_0)$.

计算后可以得到：$r\in[16m+3,(4m+1)^2-1]\setminus$

$\{(4m+1)^2-1-5,(4m+1)^2-1-3,(4m+1)^2-1-1\}$.

情形 2：$k_0=k_1=1, k_2=0$，得到 r-ISOLS$(4m+2,2)$ $r=2(r_1+r_2)+12m+\sum_{i=0}^{3}(s_i+\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=4}^{5}(s_i+\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=6}^{7}s_i+\mathrm{sig}(T_0)+\mathrm{sig}(T_1)$.

计算后可以得到：$r\in[16m+4,(4m+2)^2-4]\setminus S$，其中 $S=\bigcup_{i=1}^{3}\{(m+2)^2-4-(2i-1)\}$.

情形 3：$k_0=k_1=k_2=1$，得到 r-ISOLS$(4m+3,3)$ $r=2(r_1+r_2)+12m+\sum_{i=0}^{3}(s_i+\mathrm{sig}(s_i))+2\sum_{i=4}^{7}(s_i+\mathrm{sig}(s_i))+\sum_{i=0}^{2}(\mathrm{sig}(T_i))$.

计算后可以得到：$r\in[16m+5,(4m+3)^2-9]\setminus S$，其中 $S=(\bigcup_{j=1}^{3}\{(4m+3)^2-9-(2j-1)\})$. 证毕.

引理 5　假如整数 $m\ge 7$，且当 $r\in[4m+4,(4m+4)^2-4^2]\setminus\{4m+5,(4m+4)^2-4^2-5,(4m+4)^2-4^2-3,(4m+4)^2-4^2-1\}$，则 r-ISOLS$(4m+4,4)$ 存在.

证明　图 1 为 4-SOLS(4)，DOP 集为 $\{(0,0),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. 而且有 4 个不相交的截态如下：$T_0=\{(0,0),(1,1),(2,3),(3,2)\}$, $T_1=\{(0,1),(1,0),(2,2),(3,3)\}$, $T_2=\{(0,2),(1,3),(2,1),(3,0)\}$, $T_3=\{(0,3),(1,2),(2,0),(3,1)\}$. 其中 T_0 和 T_1 是对称的，T_2 和 T_3 是一对截态.

下面构造 r-ISOLS$(4m+4,4)$ 如下：若 s_0,s_{10},r_1 满足下列条件：

(a) $s_0,s_{10}\in\{0,2,3,(m+1)^2-(m+1)-1\}$；

(b) $r_1\in[(m+1),(m+1)^2]\setminus\{m+1+1,(m+1)^2-1\}$.

第 1 步：在 T_0 中，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 0 所在的位置膨胀，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 3 所在的位置膨胀，用 r'_1-IMOLS$(m+1,1)$ 中的一个不完全拉丁方对 1 所在的位置膨胀，另一个不完全拉丁方的转置对 2 所在的位置膨胀. 由定理 9 可知，其 DOP 集包含 $\{(i,i):0\le i\le m-1\}$ 中的每一个有序对，而且 r'_1 与 r_1 相比，或则 $r'_1=r_1$，或则 $r'_1=r_1-1$.

第 2 步：在 T_1 中，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 0 所在的位置膨胀，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 3 所在的位置膨胀，用 $(m+1)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 1 和 2 所在的 2 个位置膨胀.

第 3 步：在 T_2 和 T_3 中，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 0 所在的 2 个位置膨胀，用 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 3 所在的 2 个位置膨胀，用 $(m+1)$-ISOLS$(m+1,1)$ 对 1 和 2 所在的 4 个位置膨胀.

在第 1 步中，可以发现 r'_1-MOLS$(m+1,1)$ 的 DOP 集与 r_1-MOLS$(m+1)$ 的 DOP 集相比，当缺少一个有序对 (x,x) 时，可以由 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 或 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ DOP 集中的 (x,x) 补上，($s_0,s_{10}\in\{0,2,3\}$)，当不缺少有序对 (x,x) 时，$(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ 或 $(m+1+S_0)$-ISOLS$(m+1,1)$ DOP 集中的 (x,x) 与 r'_1-MOLS$(m+1,1)$ DOP 集中的 (x,x) 恰好重复.

于是得到：r-ISOLS$(4m+4,4)$, $r=2(r_1-1)+2m+s_0+s_{10}+4$（当 $s_0,s_{10}\in\{0,2,3\}$）或 $r=2(r_1-1)+m+s_0+m+1+s_{10}+4$（当 $s_0\in\{0,2,3\}, s_{10}=(m+1)^2-(m+1)-1$）.

经计算得到 $r\in[4m+4,3m^2+7m+3]\setminus\{4m+5\}$.

图 2 为 SOLS(4)(16-SOLS(4))，DOP 集中的每个有序对出现且仅出现 1 次；其中有 4 个不相交的对称截态：$T_0=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $T_1=\{(0,1),(1,0),(2,3),(3,2)\}$, $T_2=\{(0,2),(1,3),(2,0),(3,1)\}$, $T_3=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

构造 r-ISOLS$(4m+4,4)$ 如下：设 $s_i(0\le i\le 3),r_1,r_2$ 满足下列条件：

(a) $s_i\in\{0,2,3,m^2-m-7,m^2-m-2,m^2-m\}$；

(b) $r_i\in[m,m^2]\setminus\{m+1,m^2-1\}, 1\le i\le 2$.

第 1 步：在 T_0 中，用定理 1 及定理 4～8 中的 $(m+s_i)$-SOLS(m) 对 $i(0\le i\le 3)$ 所在的位置膨胀.

第 2 步：在 T_1 中，用定理 3 及引理 1 中的 $(m+2)$-ISOLS$(m+2,2)$ 或 ISOSL$(m+2,2)$ 对 0 和 1 所在的位置膨胀；用 $(m+2)$-ISOLS$(m+2,2)$ 或 ISOSL$(m+2,2)$ 对 2 和 3 所在位置膨胀.

第 3 步：在 T_2 中，用定理 3 及引理 1 中的 $(m+2)$-ISOLS$(m+2,2)$ 或 ISOLS$(m+2,2)$ 对 0 和 2 所在的位置膨胀；用 $(m+2)$-ISOLS$(m+2,2)$ 或

ISOLS $(m+2, 2)$ 对 1 和 3 所在位置膨胀.

第 4 步：在 T_3 中，用定理 9 中的 r_1-MOLS(m)的一个拉丁方对 0 所在的位置膨胀，另一个拉丁方的转置对 3 所在的位置膨胀；用 r_2-MOLS(m)的一个拉丁方对 1 所在的位置膨胀，另一个拉丁方的转置对 2 所在的位置膨胀.

在第 2、3 步中对同一个截态膨胀的不完全拉丁方具有相同的洞集，而对不同的截态膨胀的不完全拉丁方有不同的洞集.

经上述步骤后得到：r -ISOLS $(4m+4, 4)$，其中 $r=2(r_1+r_2)+12m+\sum_{i=0}^{3}(s_i)+4$ 或 $r=2(r_1+r_2)+4m+\sum_{i=0}^{3}(s_i)+8[(m+2)^2-4]$ 或 $r=2(r_1+r_2)+8m+\sum_{i=0}^{3}(s_i)+4[(m+2)^2-4]+2$.

经计算得 $r\in[16m+6, (4m+4)^2-4^2]\setminus\{(4m+4)^2-4^2-5, (4m+4)^2-4^2-3, (4m+4)^2-4^2-1\}$.

结合引理 3～5，我们得到本文的主要定理：

定理 10　设 $n=4m, m\ge 7$，当 $r\in[4m+k, (4m+k)^2-k^2]\setminus\{4m+k+1, (4m+k)^2-k^2-5, (4m+k)^2-k^2-3, (4m+k)^2-k^2-1\}$，则 r -ISOLS $(n+k, k)$ 存在，其中 $k=1, 2, 3, 4$.

参考文献：

[1] Belyavskaya G B. *r*-orthogonal quasigroups I[J]. Math Issed, 1976, 39:32-39.

[2] Belyavskaya G B. *r*-orthogonal quasigroups II[J]. Math Issed, 1977, 43:39-49.

[3] Belyavskaya G B. *r*-orthogonal Latin squares[C]//Denes J, Keedwell A D. Latin squares: New developments. Amseteram, North-Holland: Elsevier, 1992:169-202.

[4] Colbourn C J, Zhu L. The spectrum of *r*-orthogonal Latin squares[C]//Colbourn C J, Mahmoodian E S. Combinatorics Advances. Boston BA: Liuwer Academic Press, 1995:27-48.

[5] Zhu L, Zhang H. A few more *r*-orthogonal Latin squares[J]. Discrete Math, 2001, 238:183-191.

[6] Zhu L, Zhang H. Completing the spectrum of *r*-orthogonal Latin squares[J]. Discrete Math, 2003, 268:343-349.

[7] Xu Yunqing, Chang Yanxun. Existence of *r*-orthogonal Latin squares[J]. Discrete Math, 2006, 306:124-146.

[8] Abel R J R, Bennett F E, Zhang H, et al. A few more incomplete self-orthogonal Latin squares and related designs[J]. Austral J Combin, 2000, 21:85-94.

[9] Xu Y, Chang Y. On the spectrum of *r*-orthogonal Latin squares[J]. Discrete Math, 2004, 279:479-498.

Study on Existence of Incomplete *r*-self-orthogonal Latin Squares

YU Wei, XU Yun-qing

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Two incomplete Latin squares of order v are r -orthogonal if their superposition produces exactly r distinct ordered pairs, denoted by r-IMOLS (n,u), where u is the order of holey Latin square. In addition, if the second square is the transpose of the first one, then the first square is deemed to be r -self-orthogonal, denoted by r -ISOLS (n,u). In this paper, the existence of r -ISOLS $(4m+u,u)$ is investigated for the case $u\in\{1,2,3,4\}$.

Key words: *r*-orthogonal; Latin square; transversal

CLC number: O157.2　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）