文章编号:1001-5132（2009）03-0387-03

一类二阶系统周期解的存在性

朱　玉，鲁世平*

（安徽师范大学 数学系，安徽 芜湖 241000）

摘要: 利用临界点理论中的极大极小方法和 Sobelev's 不等式研究了以下二阶哈密顿系统

$$\begin{cases}(M(t)u')' = \nabla F(t,u(t)),\\ u(0)-u(T)=\dot u(0)-\dot u(T)=0,\end{cases}$$

周期解的存在性，其中 $T>0, M(t)=[m_{ij}(t)]\to$ 为定义在 $[0,T]$ 上的 $N\times N$ 阶正定的对称矩阵值函数；改进了已有文献的相关结论，得到了 3 个新结论，并通过例子说明了结论的有效性.

关键词: 周期解；临界点；Sobolev's 不等式；二阶系统

中图分类号: O175.1　　　　**文献标识码:** A

1　引言及引理

考虑二阶系统

$$\begin{cases}(M(t)u')' = \nabla F(t,u(t)),\\ u(0)-u(T)=\dot u(0)-\dot u(T)=0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $T>0$, $M(t)=[m_{ij}(t)]$ 为定义在 $[0,T]$ 上的 $N\times N$ 阶正定的对称矩阵值函数，$m_{ij}(t)\in L^\infty(0,T;R)$.

$F:[0,T]\times R^N$ 满足假设 A:

$F(t,x)$ 对于每个 $x\in R^N$ 关于 t 可测，对于 a.e. $t\in[0,T]$, 关于 x 是连续可微的，存在 $a\in C(R^+,R^+)$, $b\in L^1(0,T;R^+)$, 使得 $|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$, $|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$，对于 $x\in R^N$ 和 a.e. $t\in[0,T]$ 成立.

$H_T^1=\{u:[0,T]\to R^N \mid u$ 绝对连续，$u(0)=u(T)$, 且 $u'\in L^2(0,T;R^N)\}$.

内积为:

$$\langle u,v\rangle=\int_0^T[(M(t)u'(t),v'(t))+(u(t),v(t))]\mathrm{d}t.$$

范数为:

$$\|u\|=[\int_0^T(M(t)u'(t),u'(t))+|u(t)|^2)\mathrm{d}t]^{1/2}.$$

相应的泛函:

$$\varphi(u)=\int_0^T[(M(t)u'(t),u'(t))+F(t,u(t))/2]\mathrm{d}t,$$

因此有:

$$(\varphi'(u),v)=\int_0^T([M(t)u'(t),v'(t))+ (\nabla F(t,u(t)),v(t))]\mathrm{d}t.$$

对任意 $u,v\in H_T^1$. 令

$$\bar u=\int_0^T u(t)\mathrm{d}t,\ \tilde u=u-\bar u,$$

故有 Sobolev's 不等式:

$$\|\tilde u\|_\infty^2\leqslant T/12\int_0^T|\dot u(t)|^2\mathrm{d}t.$$

Wirtingger's 不等式:

$$\|\tilde u\|_2^2\leqslant T/(4\pi^2)\int_0^T|\dot u(t)|^2\mathrm{d}t.$$

当 $M(t)=E$，在假设 A 和 $F(t,\cdot)$ 是凸函数的情形下，通过使用最小作用和临界点理论中的极大极小方法，人们已经获得了很多存在性的结果；对非凸位势的情形，许多人也对其解的存在性和多

收稿日期：2008-12-12.　　宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：教育部科学技术项目（207047）.
第一作者：朱　玉（1983－），女，安徽宣城人，在读硕士研究生，主要研究方向：常微分方程. E-mail: zhuyu195701@163.com
*通讯作者：鲁世平（1962－），男，安徽无为人，博士/教授，主要研究方向：常微分方程. E-mail: lushiping26@sohu.com

重性进行了研究. 作者使用最小作用原理获得了(1)式的 3 个新的周期解的存在定理, 其中我们的定理 2 是对文献[1]中定理 1 的推广, 而且对其所给例题中的错误予以了纠正; 我们的定理 3 是文献[2]中定理 3 的推广和深入.

2 主要结果及证明

首先, $M(t)=[m_{ij}(t)]$ 是一个定义在 $[0,T]$ 上的 $N\times N$ 阶正定的对称矩阵值函数, 其中 $m_{ij}(t)\in L^{\infty}(0,T;R^N)$, 则存在一个常数 $C>0$, 使 $(M(t)\xi,\xi)\geqslant C|\xi|^2$, 对所有 $\xi\in R^N$, 以及 a.e. $t\in[0,T]$.

定义 1 称 $F:R^N\to R$ 是 (λ,μ)-次凸的, 如果 $\lambda,\mu>0$, 对一切 $x,y\in R^N$, 使得 $F(\lambda(x+y))\leqslant \mu\cdot(F(x)+F(y))$.

定理 1 设 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x)$, $F(t,x)$ 满足条件 A, 且 $F_1(t,x)$, $F_2(t,x)$ 满足以下条件:

(i) $F_1(t,\cdot)$ 是 (λ,μ)-次凸的, 其中 $\lambda>1/2$, $\mu>2\lambda^2$, 存在 $0<Q<6C/T$, 使 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}F_1(t,x)/|x|^2\leqslant Q$. (ii) 存在 $g(t),h(t)\in L^1(0,T;R^N)$, 使 $F_2(t,x)\geqslant(h(t),x)+g(t)$. (iii)存在 $C_2>0$, $\int_0^T F_1(t,\lambda x)\mathrm{d}t\geqslant C_2$, 当 $|x|\to+\infty$ 时, 则(1)式至少有 1 个解.

证明 由条件(i)和 Sobolev's 不等式, 得:

$$\int_0^T F_1(t,u(t))\mathrm{d}t\geqslant 1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-\int_0^T F_1(t,-\tilde{u}(t))\mathrm{d}t\geqslant 1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-Q\int_0^T|\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant 1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-Q\|\tilde{u}\|_\infty^2\geqslant 1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-Q\|\tilde{u}\|_\infty^2\geqslant 1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-QT\|\dot{u}\|_2^2/12.$$

由条件(ii)和 Sobolev's 不等式, 得:

$$\int_0^T F_2(t,u(t))\mathrm{d}t\geqslant\int_0^T[(h(t),\bar{u}+\tilde{u}(t))+g(t)]\mathrm{d}t\geqslant -|\bar{u}|\int_0^T|h(t)|\mathrm{d}t-\|\tilde{u}\|_\infty\int_0^T|h(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\geqslant -C_1\|\dot{u}\|_2-C_2|\bar{u}|+C_3. \tag{2}$$

其中 C_1,C_2,C_3 为常数.

于是可得:

$$\varphi(u)=\int_0^T[(M(t)u'(t),u'(t))+F(t,u(t))]/2\mathrm{d}t\geqslant C/2\int_0^T|u'(t)|^2\mathrm{d}t+1/\mu\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-QT/12\|\dot{u}\|_2^2-C_1\|\dot{u}\|_2-C_2|\bar{u}|+C_3=(C/2-QT/12)\|\dot{u}\|_2^2+|\bar{u}|(1/\mu|\bar{u}|\cdot\int_0^T F_1(t,\lambda\bar{u})\mathrm{d}t-C_2)-C_1\|\dot{u}\|_2+C_3.$$

对所有 $u\in H_T^1$, 有 $\varphi(u)\to+\infty$, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时. 因 $\|u\|\to+\infty\Leftrightarrow(|\bar{u}|^2+\|\dot{u}\|_2^2)^{1/2}\to+\infty$, 且 $0<Q<6C/T$.

定理 2 设 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x)$, $F(t,x)$ 满足条件 A, 且 $F_1(t,x)$, $F_2(t,x)$ 满足以下条件:

(i)存在 $Q>0$, $\alpha\in(1,2)$, 对于 a.e. $t\in[0,T]$ 使得: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}F_1(t,x)/|x|^\alpha\leqslant Q$. (ii) 存在 $g(t),h(t)\in L^1(0,T;R^N)$, 使 $F_2(t,x)\geqslant(h(t),x)+g(t)$. 则(1)式至少有 1 个解.

证明 由条件(i)和 Wirtingger's 不等式可知:

$$\left|\int_0^T F_1(t,u(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^T|F_1(t,u(t))|\mathrm{d}t\leqslant Q\int_0^T|\bar{u}+\tilde{u}(t)|^\alpha\,\mathrm{d}t\leqslant 2^\alpha Q[\int_0^T|\bar{u}|^\alpha\,\mathrm{d}t+\int_0^T|\tilde{u}(t)|^\alpha]\mathrm{d}t\leqslant 4Q[|\bar{u}|^\alpha T+C_4\|\dot{u}\|_2^\alpha],$$

其中 C_4 为常数. 则由(2)式可得:

$$\varphi(u)=\int_0^T[(M(t)u'(t),u'(t))+F(t,u(t))]/2\mathrm{d}t\geqslant C/2\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+4Q[|\bar{u}|^\alpha T+C_4\|\dot{u}\|_2^\alpha]-C_1\|\dot{u}\|_2-C_2|\bar{u}|+C_3\geqslant C\|\dot{u}\|_2^2/2+4Q[|\bar{u}|^\alpha T+C_4\|\dot{u}\|_2^\alpha]-C_1\|\dot{u}\|_2-C_2|\bar{u}|+C_3,$$

对所有 $u\in H_T^1$, 有 $\varphi(u)\to+\infty$, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时. 因为 $\|u\|\to+\infty\Leftrightarrow(|\bar{u}|^2+\|\dot{u}\|_2^2)^{1/2}\to+\infty$.

定理 3 设 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x)$, $F(t,x)$, $F_1(t,x)$, $F_2(t,x)$ 满足条件 A 和以下条件:

(i)对 a.e. $t\in[0,T]$ $\liminf\limits_{x\to+\infty}F_1(t,x)/|x|^2>0$. (ii) 存在 $g(t),h(t)\in L^1(0,T;R^N)$, 使 $F_2(t,x)\geqslant(h(t),x)+g(t)$, 则(1)式至少有 1 个解.

证明 由条件(i)得, 存在 $0<\varepsilon<\min\{4\pi^2C/T^2,\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(t,x)/|x|^2\}$, 因而存在 $P>0$, 使对所有 $|x|>P$, a.e. $t\in[0,T]$ 有 $F_1(t,x)>\varepsilon|x|^2/2$, 令 $a_P=\max\limits_{|x|\leqslant P}a(|x|)$.

$$\int_0^T F_1(t,u(t))\mathrm{d}t>\varepsilon/2\int_0^T|\bar{u}+\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t-T\varepsilon P^2/2--a_P\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>T\varepsilon|\bar{u}|^2/2-\varepsilon\|\tilde{u}\|_2^2/2-T\varepsilon P^2/2-a_P\int_0^T b(t)\mathrm{d}t>T\varepsilon|\bar{u}|^2/2-\varepsilon/2\cdot T^2\|\tilde{u}\|_2^2/4\pi^2-T\varepsilon P^2/2-a_P\int_0^T b(t)\mathrm{d}t.$$

由(2)式得:

$$\varphi(u)=\int_0^T[(M(t)u'(t),u'(t))+F(t,u(t))]/2\mathrm{d}t\geqslant$$
$$C\|\tilde{u}\|_2^2/2+T\varepsilon|\bar{u}|^2/2-\varepsilon T^2\|\tilde{u}\|_2^2/8\pi^2-$$
$$C_1\|\tilde{u}\|_2-C_2|\bar{u}|+C_3-T\varepsilon P^2/2-a_P\int_0^T b(t)\mathrm{d}t\geqslant$$
$$(C/2-\varepsilon T^2/(8\pi^2))\|\dot{u}\|_2^2+T\varepsilon|\bar{u}|^2/2-C_1\|\dot{u}\|_2-$$
$$C_2|\bar{u}|+C_3-T\varepsilon P^2/2-a_P\int_0^T b(t)\mathrm{d}t.$$

对所有 $u\in H_T^1$，有 $\varphi(u)\to+\infty$，当 $\|u\|\to+\infty$ 时，因为 $\|u\|\to+\infty\Leftrightarrow(|\bar{u}|^2+\|\dot{u}\|_2^2)^{1/2}\to+\infty$.

注 1　文献[1]中所给的例题 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x)$, $F_1(t,x)=t[e^{|x|^2}+\ln(1+|x|^2)]$, $F_2(x)=|x|^{1+\alpha}+x$，其中 $F_1(t,x)$，当 $\lambda>1/2,\mu<2\lambda^2$ 时，并不满足 (λ,μ)-次凸.

现在我们给出一个新的例题:

$$F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x),$$
$$F_1(t,x)=t[|x|^2+\ln(1+|x|^2)],\quad F_2(x)=|x|^2+t.$$

下面验证 $F_1(t,x)$ 满足 (λ,μ)-次凸.

证明　当 $\lambda>1/2,\mu>2\lambda^2$ 时,

$$F_1(t,\lambda(x+y))=t[\lambda^2(x+y)^2+\ln(1+\lambda^2(x+y)^2)]\leqslant$$
$$t[\mu(x^2+y^2)+\ln(1+\mu(x^2+y^2))]\leqslant$$
$$t[\mu(x^2+y^2)+\mu\ln(1+x^2)(1+y^2)]\leqslant$$
$$t\mu[F_1(t,x)+F_2(t,x)].$$

注 2　定理 2 和定理 3 不要求 $F_1(t,x)$ 是 (λ,μ)-次凸的，显然是对文献[1]和文献[3]中有关定理的推广，而且定理 3 将文献[2]中定理 3 的条件减弱为 $F(t,x)$ 中的一项满足条件(i)即可.

参考文献:

[1] Yang Rigao. Periodic solution of some non-autonomous second order Hamiltonian systems[J]. Non-linear Analysis, 2008, 69:2 333-2 338.

[2] 陈季林. 一类二阶 Hamiltonian 系统的变分原理及周期解的存在性定理[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2008, 31(3):275-279.

[3] Zhang Xingyong, Zhou Yinggao. Periodic solution of non-autonomous second order Hamiltonian systems[J]. J Math Anal Appl, 2008, 345:929-933.

[4] 钟承奎，范先令，陈文原. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1986.

[5] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamitonian systems[M]. New York: Springer-verlag, 1989.

Periodic Solutions for Class of Second Order Systems

ZHU Yu, LU Shi-ping*

(Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: By employing the minimax methods in critical theory and the Sobelev's inequality, the existence of periodic solutions for the second order Hamiltonian systems,

$$\begin{cases}(M(t)u')'=\nabla F(t,u(t)),\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0,\end{cases}$$

where T>0, $M(t)=[m_{ij}]$ is $N\times N$ order positive definite symmetric matrices in $[0,T]$, is investigated. Three new existence theorems of solutions are obtained. An example is given to validate the proposed method.

Key words: periodic solutions; critical point; Sobolev's inequality; second order systems

CLC number: O175.1　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）