

文章编号:1001-5132 (2010) 04-0101-06

谱方法求解非惯性系中二维不可压缩渠道流

罗雄平

(宁波大学 机械工程与力学学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 用谱方法求解了非惯性系中二维不可压缩渠道流动. 控制方程采用原始变量提法, 外力包括非惯性动系的线加速度以及转动角速度和角加速度引起的惯性力和科氏力. 压强用 Poisson 方程求解. 流向用 Fourier 多项式离散, 竖向用 Chebyshev 多项式离散. 将边界条件用谱多项式展开, 在谱空间用 Chebyshev-tau 方法时间推进求解半隐式离散的速度方程和直接求解压强方程. 利用该算法, 分别计算了动系作匀速转动和加速转动时的二维渠道流动. 并将计算结果与控制体积方程所作的理论分析作了比较, 结果互相符合.

关键词: 谱方法; Chebyshev-tau 方法; 非惯性系; 渠道流

中图分类号: O351

文献标识码: A

在许多情况下物体在作非惯性运动, 例如海洋平台、水下管道、船舶、飞行器以及水力机械等. 研究运动物体周围和内部的流动时, 可采用固连于此物体的非惯性坐标系, 这时内外流动遵循非惯性系下的方程. 以下几个是具有代表性的相关研究. Bearman 等人^[1]研究了放在由均匀来流和横向振荡叠加的流场中振荡圆柱的升力系数. Baranyi^[2]推导得到了固定于运动圆柱体的非惯性系中定义的升力和阻力系数. Pan 等人^[3]计算了槽里运动物体、振荡圆柱以及加速运动的多体水下机器车的绕流. Chon 等人^[4]计算了旋转叶片的绕流. 在运动物体上经常会有错综复杂的润滑、冷却、液压或燃料管道, 叶轮机叶轮及其他许多机械构件的通道也可以看作一种疏导流体的异形管道. 从这个意义上说, 渠道流也可以归于一种广义的管道流里. 笔者选择渠道流作为研究对象, 其研究方

法在理论上可推广到各种类型的管道.

笔者所研究的是一个置于运动物体上的二维渠道, 渠道的示意图如图 1. 在二维情形下, 渠道可以平移和转动. 图 2 示意了渠道转动 θ 角度后的

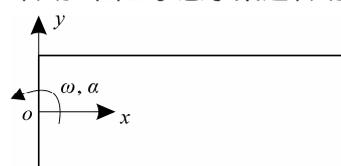


图 1 渠道运动的示意图

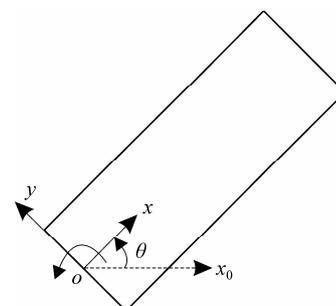


图 2 渠道转动 θ 角度后的示意图

收稿日期: 2010-01-19.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://3xb.nbu.edu.cn>

基金项目: 宁波大学学科项目(XK0711025); 宁波大学引进人才科研启动项目(XR0709009).

作者简介: 罗雄平(1972-), 女, 浙江宁波人, 博士/讲师, 主要研究方向: 流体力学. E-mail: luoxiongping@nbu.edu.cn

情况, 图中 x_0 为初始时刻的 x 坐标位置. 考虑两种情形, 一种是渠道作匀速转动下的定常流动; 另一种是渠道作加速转动下的非定常流动问题. 为得到高精度解, 笔者采用 Chebyshev-Fourier 谱方法数值求解渠道内流动的微分方程. 然后用积分方程得到全域物理量平衡关系, 并用它对数值流场数据作了检验.

1 微分控制方程和数值计算方法

1.1 流动的控制方程

非惯性系下渠道中的流动可用相对运动方程组来描述, 用渠道半宽度 δ 和壁面剪切速度 u_τ 作为长度和速度的参考量对方程组作无量纲化, 得:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H_u + \frac{1}{Re} \nabla^2 u, \quad (2)$$

$$\begin{cases} h_u = \omega_z v - a_{ox} + \alpha_z y + \Omega_z^2 x + 2\Omega_z v, \\ H_u = h_u - \frac{\partial p}{\partial x}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = H_v + \frac{1}{Re} \nabla^2 v, \quad (4)$$

$$\begin{cases} h_v = -\omega_z u - a_{oy} - \alpha_z x + \Omega_z^2 y - 2\Omega_z u, \\ H_v = h_v - \frac{\partial p}{\partial y}, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\bar{a}_o = (a_{ox}, a_{oy})$ 为动系基点的线加速度; Ω_z 和 α_z 分别为动系的转动角速度和角加速度.

1.2 数值计算方法

1.2.1 动量方程的计算方法

时间格式方面, 非定常项采用前差离散, 粘性项采用 Crank-Nicolson 离散, H_u 和 H_v 采用 Adams-Bashforth 离散.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2\right) g^{n+1} &= \frac{\Delta t}{2} (3H_g^n - H_g^{n-1}) + \\ &\left(1 + \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2\right) g^n, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, g 代表速度 u 或 v .

空间离散方面, 流向用 Fourier 级数离散, 竖

向用 Chebyshev 多项式离散, 于是物理量 f 的多项式:

$$I_N f(x, y) = \sum_{j=-nx/2}^{nx/2-1} \sum_{k=0}^{ny} \hat{f}_{jk} e^{ijx} T_k(y), \quad (7)$$

经过时空离散后的方程为:

$$\begin{aligned} \left(1 + k_x^2 \frac{\Delta t}{2Re}\right) \hat{g}_{ij}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2Re} \hat{g}_{ij}^{(2)n+1} &= \\ \frac{\Delta t}{2} \left(3\hat{H}_g^n - \hat{H}_g^{n-1}\right)_{ij} + \left(1 - k_x^2 \frac{\Delta t}{2Re}\right) \hat{g}_{ij}^{n+1} &+ \\ \frac{\Delta t}{2Re} \hat{g}_{ij}^{(2)n+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\hat{g}_{ij}^{(2)}$ 表示 $\partial^2 g / \partial y^2$ 的谱变换系数.

根据 Chebyshev 多项式的递推关系式,

$$\begin{aligned} \frac{c_{j-2}}{2(j-1)} \hat{g}_{j-2}^{(2)} - \frac{2j}{2(j-1)(j+1)} \hat{g}_j^{(2)} + \\ \frac{1}{2(j+1)} \hat{g}_{j+2}^{(2)} = 2j \hat{g}_j^{(0)}, \end{aligned} \quad (9)$$

(8)式可转变为以下形式:

$$\begin{aligned} \frac{Ac_{j-2}}{2(j-1)} \hat{g}_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{2jA}{2(j-1)(j+1)} + 2Cj\right] \hat{g}_j^{n+1} + \\ \frac{A}{2(j+1)} \hat{g}_{j+2}^{n+1} = \frac{c_{j-2}}{2(j-1)} E_{j-2} - \\ \frac{2j}{2(j-1)(j+1)} E_j + \frac{1}{2(j+1)} E_{j+2} + \\ \frac{Bc_{j-2}}{2(j-1)} \hat{g}_{j-2}^n - \left[\frac{2jB}{2(j-1)(j+1)} - 2Cj\right] \hat{g}_j^n + \\ \frac{B}{2(j+1)} \hat{g}_{j+2}^n, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $A = 1 + k_x^2 \frac{\Delta t}{2Re}$, $B = 1 - k_x^2 \frac{\Delta t}{2Re}$, $C = \frac{\Delta t}{2Re}$,

$$E = \frac{\Delta t}{2} \left(3\hat{H}_g^n - \hat{H}_g^{n-1}\right). \quad (11)$$

g 的边界条件是流向为周期边界条件, 在竖向为无滑移边界条件下,

$$g(y = \pm 1) = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{g}_j(y = \pm 1) = \sum_{m=0}^{nx-1} g_m(y = \pm 1) e^{-ijx_m} = 0, \quad (13)$$

$$\tilde{g}_j(y = \pm 1) = \sum_{k=0}^{ny} \hat{g}_{jk}(\pm 1)^k = 0. \quad (14)$$

联立(10)~(14)式, 用 Chebyshev-tau 方法可求

解得到速度值. 动量方程中的非线性项用 3/2 填充法去掉混淆误差.

1.2.2 压强 Poisson 方程的计算方法

压强 Poisson 方程是将动量方程取散度得到的, 它的求解亦在谱空间进行. 其方程表示如下:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \vec{h}_g - \partial D / \partial t, \quad (15)$$

$$\text{其中, } \vec{h}_g = (h_u, h_v), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (16)$$

压强的边界条件在沿着渠道方向是周期边界条件的. 在垂直壁面方向上, 压强边界条件由在固壁面上的 y 方向动量方程得到:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -a_{oy} - \alpha_z x + \Omega_z^2 y + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (17)$$

2 流动的积分控制方程

先用控制体包围渠道里(图 1)的流体. 在稳态的情况下, 积分形式的连续性方程和动量方程为:

$$\begin{cases} \int_{s_1} \rho \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{s_2} \rho \vec{v}_2 \cdot d\vec{A}_2 = 0, \\ \int_{s_1} \rho \vec{v}_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{s_2} \rho \vec{v}_2 \vec{v}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \vec{F}, \end{cases} \quad (18)$$

其中, $\vec{A}_1, \vec{v}_1, \vec{A}_2, \vec{v}_2$ 分别为渠道两端的横截面积和流体速度. 对于本文所研究的渠道流, 我们用渠道半宽度 δ 和壁面剪切速度 u_τ 作为长度和速度的参考量对方程作了无量纲化后, 上述方程可化为:

$$\int_{-1}^1 (u_2 - u_1) dy = 0. \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 (u_2 \vec{v}_2 - u_1 \vec{v}_1) dy = \int_{CS} \vec{p}_n ds - \int_{CV} (\vec{a}_e + \vec{a}_c) d\tau. \quad (20)$$

其中, \vec{p}_n 为表面应力矢; \vec{a}_e, \vec{a}_c 分别为牵连加速度和科氏加速度; CS 和 CV 分别为控制体的表面积和体积.

对于表面应力部分, 在文中的渠道流中, 有:

$$\int_{CS} \vec{p}_n ds = \int_{-1}^1 \left[\begin{array}{c} p_1 - p_2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right) / Re_\tau \\ \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_1 \right) / Re_\tau \end{array} \right] dy +$$

$$\int_0^l \left[\begin{array}{c} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \\ p_a - p_b + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \end{array} \right] dx, \quad (21)$$

其中, l 为渠道长度; 下标 a, b 分别表示控制体的下、上 2 个表面. $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ 为雷诺数.

对于无限渠道流、平行边界层和无限旋转圆筒间的 Taylor-Couette 流动这些理想流动在一个方向(如渠道流的流向)上可假设成均匀流动, 于是可应用周期边界条件. 从物理上来说, 在模拟一个大系统中, 研究其中远离边缘的一小部分时, 该部分的边界条件经常设成周期. 对于渠道流而言, 周期边界条件将导致两端物理量的稳态分布相近. 因此(20)式的左式接近为零. (21)式在稳态情况下可简化为:

$$\int_{CS} \vec{p}_n ds = \int_0^l \left[\begin{array}{c} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \\ p_a - p_b + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \end{array} \right] dx. \quad (22)$$

当动系基点的线加速度 $\vec{a}_o = (a_{ox}, a_{oy})$ 为零时, 在该渠道流中, 由于非惯性所引起的力源项为:

$$-\int_{CV} (\vec{a}_e + \vec{a}_c) d\tau = \begin{bmatrix} \Omega_z^2 l^2 + 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 v dx dy \\ -\alpha_z l^2 - 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 u dx dy \end{bmatrix}. \quad (23)$$

将(22)式和(23)式代入简化后的(20)式, 可得到上下表面力与惯性力和科氏力平衡式为:

$$\int_0^l \left[\begin{array}{c} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \\ p_a - p_b + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \right) / Re_\tau \end{array} \right] dx + \begin{bmatrix} \Omega_z^2 l^2 + 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 v dx dy \\ -\alpha_z l^2 - 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 u dx dy \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

3 动系作匀速转动和加速转动时的流动计算结果及其分析

首先考虑匀速转动渠道里的流动. 在计算中, 渠道长为 $2\pi\delta$ m. 假设渠道以 $\omega = 5u_\tau / \delta \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 的角速度作匀速转动. 雷诺数 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu = 20$, 其中 ν 为运动粘性系数. 计算区域和网格表示在图 3. Fourier 谱的配置点是均匀的, 而 Chebyshev 谱的配置点是两边密, 中间稀疏. 计算区域用 32×33 个网格来离散. 初始速度场假设为零. 从初始时刻到 $t = 30\delta / u_\tau$ s 的平均动能变化图(图 4), 本图(和下面所有图)中所示为无量纲量, 可看出渠道内流体的动能到此时刻已趋于稳定, 预示流场也达到一个稳定状态. $t = 30\delta / u_\tau$ s 后的流线如图 5 所示.

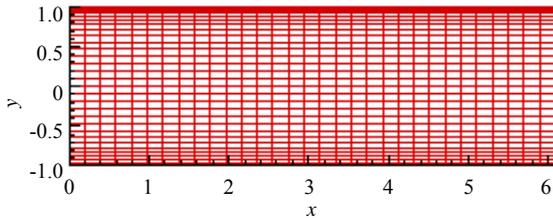


图 3 计算区域和网格

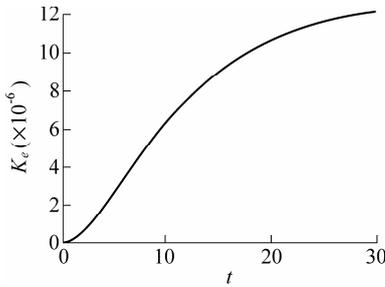


图 4 匀速旋转时的管道内流体平均动能变化

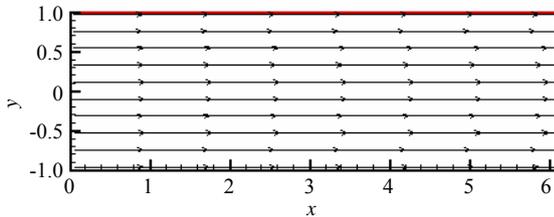


图 5 匀速旋转时的管道内流体的流线图

对于由积分方程推得的(24)式, 从程序中取数据比较一下, 可看到

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)_a \approx 0.$$

这应该是稳态均匀渠道流场的特征. 又可以看到 ν 值很小, 这是由离心力的方向所确定的. 于是(24)式可简化为:

$$\int_0^l \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_a \right) / Re_\tau \right] dx + \left[\begin{aligned} &\Omega_z^2 l^2 + 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 v dx dy \\ &- \alpha_z l^2 - 2\Omega_z \int_0^l \int_{-1}^1 u dx dy \end{aligned} \right] \approx 0. \quad (25)$$

剪切应力 $p_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) / Re_\tau$ 和流向惯性力 $\Omega_z^2 x$ 的等值线图分别表示在图 6 和图 7 中. 而压强和横向的科氏力 $-2\Omega_z u$ 的等值线图则用图 8 和图 9 表示. 对应(25)式, 由图 6~图 9 中可以算得:

$$\begin{bmatrix} -0.29 \\ 0.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.30 \\ -0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

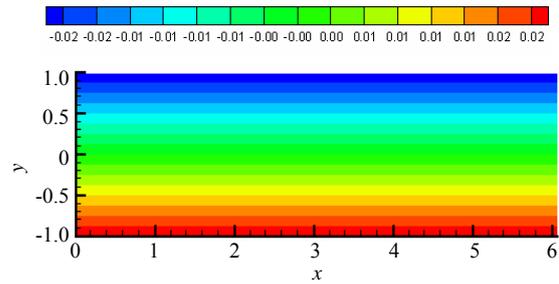


图 6 匀速旋转时的管道内流体剪切应力等值线图

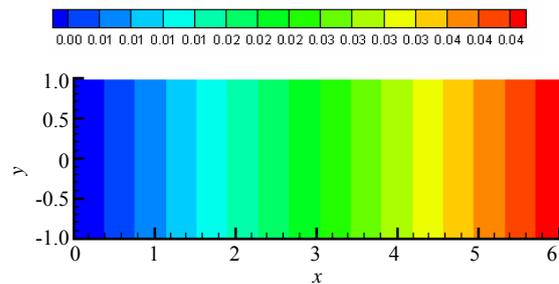


图 7 匀速旋转时的管道内流体流向惯性力等值线图

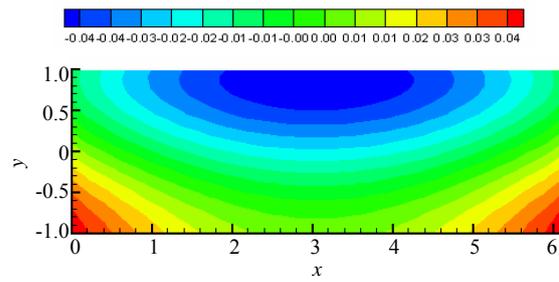


图 8 匀速旋转时的管道内流体压强等值线图

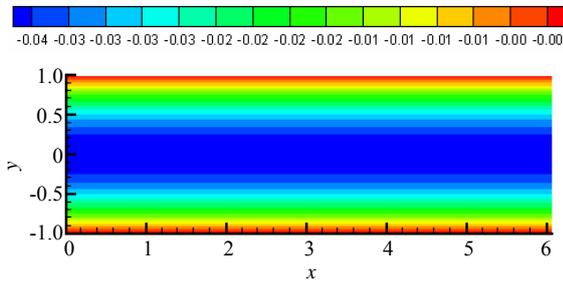


图 9 匀速旋转时的管道内流体横向科氏力的等值线图

这里的 0.01 是由于流向速度的非定常项还未完全等于零, 平均动能还有较小的上升斜率(图 4). 从这里可以看到积分方程预言的壁面表面力值与用微分方程进行的数值计算相符.

接着笔者在匀速转动渠道流动的计算基础上, 考虑了以 $\alpha = 0.02u_\tau^2 / \delta^2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ 的角加速度加速旋转渠道内的流动状态. 计算所得平均动能的变化曲线如图 10 所示. 从中可见, 能量到 $t = 30\delta / u_\tau \text{ s}$ 还在不断上升. 此时的流线与定常旋转的一样. 流场中的壁面剪切应力、流向惯性力、压强和横向的科氏力的数据表示在图 11 至图 14.

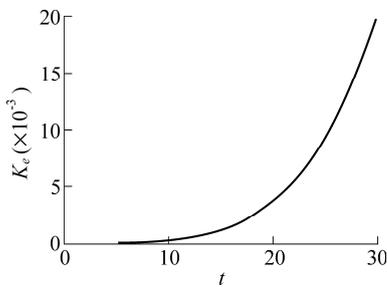


图 10 加速旋转时的管道内流体平均动能的变化曲线图

积分方程也可以检验非稳态流场的计算结果, 这时表面力与惯性力及科氏力不平衡, 此不平衡由非定常项来调节, 可估计出(25)式中各项的值.

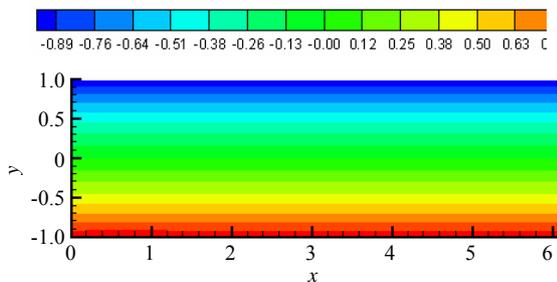


图 11 加速旋转时的管道内流体剪切应力图

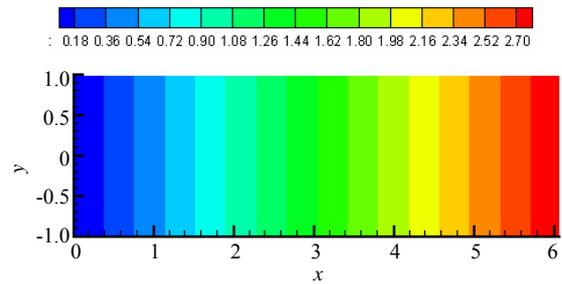


图 12 加速旋转时的管道内流体流向惯性力等值线图

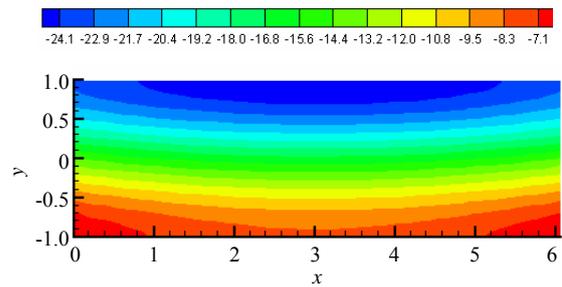


图 13 加速旋转时的管道内流体压强等值线图

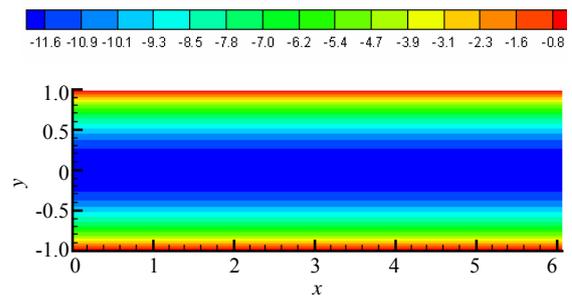


图 14 加速旋转时的管道内流体横向科氏力的等值线图

$$\begin{bmatrix} -12.68 \\ 107.62 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18.65 \\ -106.97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.97 \\ 0.65 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

从(27)式可以看到, 流向速度递增的速率比横向速度的大. 壁面的法向表面应力比剪切力大 8 倍, 这说明在加速旋转时, 壁面所受压力较大, 在设计管道时应该校核材料的径向应力.

4 结语

采用谱方法(Fourier-Chebyshev 谱)求解了非定常不可压缩 Navier-Stokes 方程, 得到了较高精度的结果. 其中, Chebyshev 谱的应用使渠道流边界的网格自然加密, 从而提高了壁面附近物理量计

算的精度. 计算的结果与积分控制方程的理论分析结果进行了比较, 得到相符结果.

由于渠道或边界层流动流向方向实际上是非均匀的, 旋转圆筒也只有有限长度, 所以流向也应用非周期的基函数来离散. 通过改善, 将来这个算法可推广到方管、圆管、同心圆管以及作行星运动、螺旋运动等各种容器内的流动问题研究.

参考文献:

- [1] Bearman P W, Graham J M R, Lin X W, et al. Numerical simulation of flow-induced vibration of a circular cylinder in uniform and oscillatory flow[C]//Flow-induced Vibration: Proceedings 6th International Conference on Flow-induced Vibration, London, 1995:231-240.
- [2] Baranyi L. Lift and drag evaluation in translating and rotating non-inertia systems[J]. Journal of Fluids and Structures, 2005, 20:25-34.
- [3] Pan H, Damodaran M. Computation of unsteady viscous incompressible flows in generalized non-inertial coordinate system using Godunov-projection method and overlapping meshes[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2002, 40:1365-1380.
- [4] Chon W, Amano R S. Experimental and computational studies on flow behavior around counter rotating blades in a double-spindle deck[J]. KSME International Journal, 2004, 18(8):1401-1417.

A Fourier-Chebyshev Spectral Method for Solving 2D Incompressible Channel Flow in Non-inertia Coordinate System

LUO Xiong-ping

(The Faculty of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo university, Ningbo 315211, China)

Abstract: Time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in primitive variable form with body forces of an apparent force are established, and a coriolis force caused by the linear acceleration, angular speed and angular acceleration of the generalized non-inertial coordinate system is expressed. The equations are numerically solved by a Fourier-Chebyshev spectral method, where Fourier polynomials are used in the streamwise discretization and Chebyshev modes in the transverse direction. With the boundary conditions expanded by spectral polynomials, the Chebyshev-tau methods are used to construct numerical integration of the momentum equations and pressure Poisson equations. The above spectral methods are applied in 2D channel flow with the kinetic reference system rotating at a constant and accelerating speed. The numerical results agree well with that from the theoretical analysis of the control integral equations.

Key words: spectral methods; Chebyshev-tau methods; non-inertial coordinate system; channel flow

CLC number: O351

Document code: A

(责任编辑 章践立)